Aufgabe 4 Kosten und Gewinne

Ein Betrieb stellt aus den Rohstoffen R_1, R_2, R_3 und R_4 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4 her und aus diesen die Endprodukte E_1, E_2 und E_3.
Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist folgenden Tabellen zu entnehmen.

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
R_1	a	b	0	0
R_2	0	c	d	0
R_3	0	0	e	0
R_4	0	0	f	g

	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	0	0
Z_2	1	4	0
Z_3	0	3	1
Z_4	1	0	2

	E_1	E_2	E_3
R_1	5	12	0
R_2	2	11	1
R_3	0	12	4
R_4	2	3	5

a) Geben Sie die zugehörigen Matrizen A_{RZ} , A_{ZE} und A_{RE}.
Berechnen Sie die fehlenden Werte der Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix.

b) Wegen eines Umbaus soll das Rohstofflager weitgehend geräumt werden. Dabei sollen zwei Bedingungen erfüllt werden:

i) Die Lagerbestände von R_2 und R_3 sollen vollständig aufgebraucht werden.
ii) Von R_1 und R_4 soll gleich viel übrig bleiben.

Der Lagerbestand beträgt 1 000 ME von R_1, 720 ME von R_2, 960 ME von R_3 und 1 000 ME von R_4.

Untersuchen Sie, ob die beiden obigen Bedingungen erfüllt sind, wenn 80 ME von E_1, 40 ME von E_2 und 120 ME von E_3 produziert werden.

c) Der Betrieb erhält einen Auftrag über 200 ME von E_1. Bestimmen Sie die Gesamtkosten für diesen Auftrag, wenn folgendes gilt:

i) Die Rohstoffkosten in GE pro ME betragen: 1 für R_1, 3 für R_2, 4 für R_3 und 2 für R_4.
ii) Die Fertigungskosten in GE je ME eines Zwischenprodukts betragen:
1 für Z_1, 1 für Z_2, 3 für Z_3 und 4 für Z_4.
iii) Die Fertigungskosten je ME des Endproduktes E_1 betragen 2 GE.
iv) Die Fixkosten betragen 400 GE.

d) Durch eine Änderung im Produktionsablauf werden die Fertigungskosten für die Zwischenprodukte und für die Endprodukte voneinander abhängig. Mit der Einschränkung: $0 < x < 2$ gilt:

Kosten	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
GE/ME	$2 - x$	$2 - x$	$4 - x$	$5 - x$

Kosten	E_1	E_2	E_3
GE/ME	$3 - x$	$4 - x$	$5 - x$

Es werden 200 ME von E_1, 100 ME von E_2 und 300 ME von E_3 bestellt.
Ermitteln Sie unter der Voraussetzung, dass sich die Rohstoffkosten [Teil c) i)] nicht ändern und die Fixkosten 1000GE betragen, den Wert für x, für den die Gesamtkosten für diesen Auftrag 32.000 GE betragen.

e) Die Endprodukte können nach einer weiteren Umstellung aus produktionsspezifischen Gründen nur im Verhältnis $E_1 : E_2 : E_3 = 2 : 1 : 3$ produziert werden.

Eine Produktion besteht demnach aus $2t$ ME von E_1, t ME von E_2 und $3t$ ME von E_3, mit ($100 < t < 1.200$). Die Fixkosten betragen 4000 GE pro Produktion.

Für die Herstellungskosten der Endprodukte bzw. die Verkaufspreise der Endprodukte gilt:

Kosten	E_1	E_2	E_3
GE/ME	$29 - 0{,}5\ln(t)$	$130 - 2\ln(t)$	$54 - 1{,}5\ln(t)$

Preis	E_1	E_2	E_3
GE/ME	$42 - 2\ln(t)$	$145 - 4\ln(t)$	$65 - 3\ln(t)$

Bestimmen Sie den Wert für t, für den der Gewinn $G(t)$ maximal wird, wenn die gesamte Produktion verkauft wird.

Aufgabe 4 Kosten und Gewinne

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	$A_{RZ}=\begin{pmatrix}a&b&0&0\\0&c&d&0\\0&0&e&0\\0&0&f&g\end{pmatrix}$ $A_{ZE}=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&4&0\\0&3&1\\1&0&2\end{pmatrix}$ $A_{RE}=\begin{pmatrix}5&12&0\\2&11&1\\0&12&4\\2&3&5\end{pmatrix}$ Berechnung der Werte $a, b, \ldots g$ in A_{RZ}: Wegen $A_{RZ}\cdot A_{ZE}=A_{RE}$ gilt $A_{RZ}\cdot A_{ZE}=\begin{pmatrix}a&b&0&0\\0&c&d&0\\0&0&e&0\\0&0&f&g\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&0\\1&4&0\\0&3&1\\1&0&2\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}2a+b&4b&0\\c&4c+3d&d\\0&3e&e\\g&3f&f+2g\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&12&0\\2&11&1\\0&12&4\\2&3&5\end{pmatrix}=A_{RE}$ Durch elementweisen Vergleich erhält man die Gleichungen: $\begin{array}{lll}2a+b=5 & 4b=12 & \\ c=2 & 4c+3d=11 & d=1\\ & 3e=12 & e=4\\ g=2 & 3f=3 & f+2g=5\end{array}$ Für die fehlenden Werte der Rohstoffmatrix erhalten wir: $a=1,\ b=3,\ c=2,\ d=1,\ e=4,\ f=1,\ g=2.$	15		
b)	Sei $\overrightarrow{v_R}$ der Vorratsvektor an Rohstoffen. Aus der Bedingung $A_{RE}\cdot\overrightarrow{x_E}=\overrightarrow{v_R}$ ergibt sich das LGS $\left(\begin{array}{ccc\|c}5&12&0&1\,000-\mathrm{r}\\2&11&1&720\\0&12&4&960\\2&3&5&1\,000-\mathrm{r}\end{array}\right)$ Dieses LGS ist eindeutig lösbar für $x_1=80,\ x_2=40,\ x_3=120$ und $r=120$. Es bleiben demnach von R_1 und R_4 jeweils 120 ME übrig.		10	
c)	Die Gesamtkosten (*GK*) für den Auftrag bestehen aus den Rohstoffkosten (*RK*), den Fertigungskosten für die Zwischenprodukte (*ZK*), den Fertigungskosten für das Endprodukt (*EK*) und den Fixkosten (*FK*).			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Es gilt: $RK = 200 \cdot (5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 2) = 3\,000$ $ZK = 200 \cdot (2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 4) = 1\,400$ $EK = 200 \cdot 2 = 400$, $FK = 400$ Die Gesamtkosten betragen demnach 5 200 GE.		20	
d)	Die Rohstoffkosten betragen in GE: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \cdot 5 + 100 \cdot 12 + 300 \cdot 0 \\ 200 \cdot 2 + 100 \cdot 11 + 300 \cdot 1 \\ 200 \cdot 0 + 100 \cdot 12 + 300 \cdot 4 \\ 200 \cdot 2 + 100 \cdot 3 + 300 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2200 \\ 1800 \\ 2400 \\ 2200 \end{pmatrix} = 21600$ Die Fertigungskosten für die Zwischenprodukte betragen in GE: $\begin{pmatrix} 2-x & 2-x & 4-x & 5-x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \cdot 2 + 100 \cdot 0 + 300 \cdot 0 \\ 200 \cdot 1 + 100 \cdot 4 + 300 \cdot 0 \\ 200 \cdot 0 + 100 \cdot 3 + 300 \cdot 1 \\ 200 \cdot 1 + 100 \cdot 0 + 300 \cdot 2 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 2-x & 2-x & 4-x & 5-x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \\ 600 \\ 800 \end{pmatrix} = 8400 - 2400x$ Die Fertigungskosten für die Endprodukte betragen in GE: $200 \cdot (3-x) + 100 \cdot (4-x) + 300 \cdot (5-x) = 2500 - 600x$. Die Fixkosten betragen 1000 GE. Damit ergibt sich für die Gesamtkosten: $GK = (33500 - 3000x)$ GE. Aus $33500 - 3000x = 32000$ ergibt sich $x = 0{,}5$. Die Gesamtkosten betragen für $x = 0{,}5$ genau 32000 GE.		20	10
e)	Die Kosten für einen Auftrag von $2t$ ME von E_1, t ME von E_2 und $3t$ ME von E_3 betragen: $GK = 2t \cdot (29 - 0{,}5\ln(t)) + t \cdot (130 - 2\ln(t)) + 3t \cdot (54 - 1{,}5\ln(t)) + 4000$ $= 350t - t \cdot (\ln(t) + 2\ln(t) + 4{,}5\ln(t)) + 4000$ $= 350t - 7{,}5t \cdot \ln(t) + 4000$. Der Verkaufspreis beträgt: $VP = 2t \cdot (42 - 2\ln(t)) + t \cdot (145 - 4\ln(t)) + 3t \cdot (65 - 3\ln(t)) = 424t - 17t \cdot \ln(t)$. Der Gewinn $G = VP - GK$ beträgt demnach in Abhängigkeit von t: $G(t) = t \cdot (74 - 9{,}5\ln(t)) - 4000$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Nun gilt: $G'(t) = 1 \cdot (74 - 9{,}5\ln(t)) + t \cdot (-9{,}5) \cdot t^{-1} = 64{,}5 - 9{,}5\ln(t)$. $G''(t) = -9{,}5t^{-1}$ Für maximalen Gewinn muss gelten: $G'(t) = 0$ $G'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(t) = \frac{64{,}5}{9{,}5} \quad \Leftrightarrow \quad t = e^{\frac{64{,}5}{9{,}5}} \approx 888{,}45$. Weiter gilt: $G''(888{,}45) < 0$. Also ist der Gewinn für *t* = 888,45 maximal. Er beträgt ca. 4 440 GE.		10	15
	Insgesamt 100 BWE	15	60	25