

Propuesta de aula

Grupo: Primer año de ciclo básico.

Tema: Multiplicación de números enteros.

Tiempo: aproximadamente 90 minutos.

Objetivos:

- Presentar la multiplicación de números enteros de una manera no tradicional.
- Definir la multiplicación de números enteros.
- Vincular la multiplicación de números enteros con la de números naturales.

Conocimientos previos:

- Multiplicación de números naturales.
- Propiedades de la multiplicación de números naturales.
- Concepto de número entero.
- Definición de valor absoluto.
- Definición de número opuesto.

Recursos didácticos:

- Pizarrón.
- Marcadores de colores.
- Computadora.
- GeoGebra.
- Proyector.
- Ficha de trabajo.

Estrategias metodológicas:

En primera instancia, se optará por realizar un repaso sobre algunas ideas que los estudiantes deben tener presentes para poder realizar las posteriores actividades.

Tras el repaso, se dividirá a la clase en varios grupos entre los cuales se repartirán cuatro actividades distintas, correspondientes a los cuatro casos que se pueden presentar al multiplicar dos números enteros (cuatro casos que podrían reducirse a tres o a dos, pero por interés serán cuatro).

Luego de que cada grupo realice la actividad que le corresponde, se llevará a cabo una puesta en común, donde cada equipo expondrá sus respuestas y se discutirán estas. Se pretende que los estudiantes debatan y traten de llegar a una respuesta en la cual todos estén de acuerdo. En el caso de que se arribe a conclusiones erradas, se hará notar el error y se tratará de que traten de observar cuál puede ser una respuesta correcta. En esta instancia de discusión, se realizarán otras preguntas a los estudiantes, que no están en las actividades propuestas por conveniencia, pues se pretende realizar otras observaciones. Se espera que esta instancia abarque como máximo una hora de clase.

Tras la discusión y la legitimación de ciertas respuestas, se procederá a entregar a cada estudiante una hoja impresa con algunas observaciones realizadas sobre la multiplicación de números enteros, unos ejemplos y dos ejercicios. Se leerá el contenido de esta hoja y se les pedirá a los estudiantes que realicen como tarea domiciliaria los ejercicios que aparecen propuestos.

Desarrollo tentativo de la clase:

Paso n°1. Se comenzará la clase preguntándoles a los estudiantes:

- 1) ¿A qué llamamos conjunto de los números enteros? Nombra algunos números enteros.
- 2) ¿A qué llamamos valor absoluto de un número real?

Se espera que recuerden que:

- 1) Llamamos conjunto de los números enteros al conjunto que tiene como elementos a todos los números naturales y sus opuestos. Algunos números enteros son, por ejemplo: 0, 1, -1, 384, -358, 1000000, -7856 y 91354.
- 2) Llamamos valor absoluto de un número real x , y lo escribimos $|x|$, a la distancia entre x y el número 0. Así, si x es un número real positivo o es cero, entonces $|x| = x$; y si x es un número real negativo, entonces $|x| = -x$, es decir el opuesto de x .

Paso n°2. Se dividirá a la clase en, por lo menos, ocho grupos. Se repartirán entre todos los grupos cuatro actividades distintas, de tal manera que haya al menos dos grupos que hagan una misma actividad.

Actividad 1

Ingresa al applet y lee el texto que allí aparece. Responde las siguientes preguntas en tu cuaderno:

- i) Mueve el deslizador de a y el de b y dale a ambos valores positivos. ¿De qué signo es el producto de a y b ?
- ii) Dale otros valores positivos a ambos números. ¿El producto sigue siendo del mismo signo?
- iii) Si a y b son dos números enteros positivos cualesquiera, ¿cómo es el signo de su producto?
- iv) ¿Qué pasa con el producto de a y b si $a = 0$ y $b \neq 0$? ¿Y si $a \neq 0$ y $b = 0$? ¿Y si ambos son cero?

Actividad 2

Ingresa al applet y lee el texto que allí aparece.

- i) Mueve el deslizador de a y el de b y dale a ambos valores negativos. ¿De qué signo es el producto de a y b ?
- ii) Dale otros valores negativos a ambos números. ¿El producto sigue siendo del mismo signo?
- iii) Si a y b son dos números enteros negativos cualesquiera, ¿cómo es el signo de su producto?
- iv) ¿Qué pasa con el producto de a y b si $a = 0$ y $b \neq 0$? ¿Y si $a \neq 0$ y $b = 0$? ¿Y si ambos son cero?

Actividad 3

Ingresa al applet y lee el texto que allí aparece.

- i) Mueve el deslizador de a y dale un valor positivo. Mueve el deslizador de b y dale un valor negativo. ¿De qué signo es el producto de a y b ?
- ii) Dale otros valores positivos a a y otros valores negativos a b . ¿El producto sigue siendo del mismo signo?
- iii) Si a es un número entero positivo y b es un número entero negativo, ¿cómo es el signo de su producto?
- iv) ¿Qué pasa con el producto de a y b si $a = 0$ y $b \neq 0$? ¿Y si $a \neq 0$ y $b = 0$? ¿Y si ambos son cero?

Actividad 4

Ingresa al applet y lee el texto que allí aparece.

- i) Mueve el deslizador de a y dale un valor negativo. Mueve el deslizador de b y dale un valor negativo. ¿De qué signo es el producto de a y b ?
- ii) Dale otros valores negativos a a y otros valores negativos a b . ¿El producto sigue siendo del mismo signo?
- iii) Si a es un número entero negativo y b es un número entero positivo, ¿cómo es el signo de su producto?
- iv) ¿Qué pasa con el producto de a y b si $a = 0$ y $b \neq 0$? ¿Y si $a \neq 0$ y $b = 0$? ¿Y si ambos son cero?

Fundamentaré la elección de estas actividades. A mi entender, hay una manera muy instalada de presentar la multiplicación de números enteros, que se basa en dar la regla de los signos y algunos ejemplos. Esta manera, en mi opinión, le impone a los estudiantes la definición de multiplicación de números enteros, les presenta sin reflexión mediante la manera en la cual se multiplican números enteros, pero, y repito que esta es mi opinión, este enfoque de presentación es poco incitativo para los estudiantes. Toda manera de enseñar y aprender está asociada a un régimen político, y no hay que asustarse al establecer semejante vínculo. Personalmente, pienso que las maneras de enseñar y aprender deben estar asociadas al régimen político actual, que es la democracia. Esa manera de presentar los contenidos a través de la imposición y la no participación de los estudiantes, para nada está asociado, a mi entender, con la democracia. Quizás alguien disienta conmigo en esto, pero las maneras de enseñar son asimiladas por el educando no sólo como maneras de enseñar, sino también como maneras de vincularse con la sociedad y la naturaleza, y como maneras de ser.

Dicho esto, debe quedar claro que la elección de estas actividades se basa en la idea de buscar la participación activa de los estudiantes, tratando de descubrir cómo se multiplican dos números enteros. La clase será dividida en equipos porque se busca que los estudiantes trabajen en conjunto, expresen a los demás sus observaciones y respuestas, escuchen, traten de entender y cuestionen lo que los demás compañeros exponen. Esta decisión busca generar en la clase un ambiente de debate, participación y respeto.

Aclaro desde ya que los valores de a y b varían entre -5 y 5 porque no quería que el producto tomara valores muy grandes, pues para ver en la recta real resulta complicado.

En cuanto al desarrollo de la actividad, tras entregarle a los grupos la hoja que les corresponda, se pasará por los bancos y se le preguntará a cada grupo si hay alguna pregunta que quieran hacer. Se dejará que trabajen aproximadamente 15 minutos como máximo. Posteriormente se pasará a realizar la exposición de las respuestas de cada equipo, comenzando primeramente aquellos que realizaron la **Actividad 1**, luego los de la **Actividad 2** y así sucesivamente. Se buscará que todos los estudiantes discutan las respuestas que brinde cada grupo cuando exponga, y que realicen las preguntas que les surjan, tratando de que sean los estudiantes mismos los que respondan.

La intención es que los grupos respondan lo siguiente:

Actividad 1

- i) Si $a = 2$ y $b = 3$, $C = 6$, por lo que el signo del producto de a y b es positivo.
- ii) Si a y b toman otros valores positivos, el signo del producto sigue siendo positivo.
- iii) Si a y b son dos números enteros positivos cualesquiera, entonces el producto será un número entero positivo.
- iv) Si $a = 0$ y $b \neq 0$, entonces $C = 0$. Si $a \neq 0$ y $b = 0$, entonces $C = 0$. Si $a = 0$ y $b = 0$, entonces $C = 0$.

Al discutir esta actividad, se les preguntará a los estudiantes: ¿si a y b son dos números enteros positivos, qué tipo de números son además a y b ? Se espera que respondan que a y b son también números naturales, por lo que en realidad se están multiplicando números naturales y ya saben cómo multiplicar dos números naturales. La intención es hacerle observar esto para que vean que en realidad para multiplicar enteros positivos se puede proceder de la misma manera que se procede al multiplicar números naturales.

Se preguntará también: ¿por qué si $a = 0$ o $b = 0$, entonces $a \times b = 0$? ¿En la multiplicación de números naturales, cómo se llama la propiedad en la cual si uno de los factores era 0, entonces el producto daba 0? Se espera que recuerden que esa propiedad es la de absorción y que observen que esa propiedad se sigue cumpliendo en la multiplicación de números enteros.

Actividad 2

- i) Si $a = -2$ y $b = -4$, $C = 8$, por lo que el signo del producto de a y b es positivo.

- ii) Si a y b toman otros valores negativos, el signo del producto sigue siendo positivo.
- iii) Si a y b son dos números enteros negativos cualesquiera, entonces el producto será un número entero positivo. Para hallar el producto, basta con multiplicar los números a y b .
- iv) Si $a = 0$ y $b \neq 0$, entonces $C = 0$. Si $a \neq 0$ y $b = 0$, entonces $C = 0$. Si $a = 0$ y $b = 0$, entonces $C = 0$.

Actividad 3

- i) Si $a = 3$ y $b = -4$, $C = -12$, por lo que el signo del producto de a y b es negativo.
- ii) Si a toma otros valores positivos y b toma otros valores negativos, el signo del producto sigue siendo negativo.
- iii) Si a es un número entero positivo cualquiera y b es un número entero negativo cualquiera, entonces el producto será un número entero negativo.
- iv) Si $a = 0$ y $b \neq 0$, entonces $C = 0$. Si $a \neq 0$ y $b = 0$, entonces $C = 0$. Si $a = 0$ y $b = 0$, entonces $C = 0$.

Actividad 4

- i) Si $a = -1$ y $b = 5$, $C = -5$, por lo que el signo del producto de a y b es negativo.
- ii) Si a toma otros valores negativos y b otros valores positivos, el signo del producto sigue siendo negativo.
- iii) Si a es un número entero negativo cualquiera y b es un número entero positivo cualquiera, entonces el producto será un número entero negativo.
- iv) Si $a = 0$ y $b \neq 0$, entonces $C = 0$. Si $a \neq 0$ y $b = 0$, entonces $C = 0$. Si $a = 0$ y $b = 0$, entonces $C = 0$.

Paso n°3. Tras la discusión y la exposición de las respuestas de cada grupo, se formalizarán algunas respuestas que se han dado. Se les pedirá a los estudiantes que respondan oralmente las siguientes preguntas a partir de lo que se discutió:

1. ¿Cuál es el signo del producto si a y b son números enteros del mismo signo?
2. ¿Cuál es el signo del producto si a y b son números enteros de distinto signo?

La intención es que a través de las preguntas agrupen las observaciones hechas en la puesta en común. Se espera que respondan que:

1. Si a y b son dos números enteros del mismo signo, entonces el signo del producto es positivo.
2. Si a y b son dos números enteros de diferente signo, entonces el signo del producto es negativo.

Paso n°4. Luego de concordar en las respuestas anteriores, se les dirá a los estudiantes que las dos proposiciones anteriores se las conoce como **regla de los signos**.

Se les preguntará a los estudiantes: ¿cómo hallamos el producto de dos números enteros cualesquiera? Se espera que observen primero, que debemos aplicar la regla de los signos. Pero en la actividad y en la discusión hecha jamás se habló de cómo hallar el producto sin tener en cuenta el signo. Para observar ello, se planteará un ejemplo de multiplicación de números enteros a partir del applet que aparecía en las distintas actividades. Mirando el applet, se hará notar que el producto de -4 y $+3$ es -12 , es decir que $(-4) \times (+3) = -12$. Como se vio, primero que nada, para hallar el producto aplicamos la regla de los signos, y como en este caso los dos factores son de distinto signo, el signo del producto es negativo. ¿Pero cómo llegamos al 12 que aparece allí luego del signo de menos? Se espera que algún estudiante observe rápidamente que si multiplicamos 4 por 3 , el producto es 12 . Se preguntará:

1. ¿Qué es 4 de -4 ?
2. ¿Qué es 3 de $+3$?

Se espera que los estudiantes observen que 4 es el valor absoluto de -4 y que 3 es el valor absoluto de $+3$. Se preguntará nuevamente entonces, ¿cómo hallamos el producto de dos números enteros cualesquiera? A partir de lo dicho, se espera que respondan que primero aplicamos la regla de los signos y hallamos el signo del producto, y luego multiplicamos los valores absolutos de los factores.

Paso n°5. Tras las observaciones anteriores, se dará a cada estudiante una hoja en la cual estarán escritas las observaciones hechas, algunos ejemplos y un ejercicio. En la hoja aparecerá lo siguiente:

Multiplicación de números enteros

Como habrás observado:

- Si el signo de los dos factores es el mismo, entonces el signo del producto es positivo.
- Si el signo de los dos factores es distinto, entonces el signo del producto es negativo.

Este resultado se conoce como **regla de los signos**.

¿Cómo hallamos el producto de los enteros que multiplicamos?

- Observa que escribimos el signo dado por la regla de los signos.
- Multiplicamos los valores absolutos de los factores.

Veamos algunos ejemplos:

a. **(+5) x (+2) = +10**, pues (+5) y (+2) son *números enteros de signo positivo* (por lo cual el producto será de signo positivo) y al realizar el *producto de sus valores absolutos*, este nos da 10.

b. **(+3) x (-4) = -12**, pues (+3) y (-4) son *números enteros de distinto signo* (por lo que el producto será de signo negativo) y al realizar el *producto de sus valores absolutos*, este nos da 12.

c. **(-7) x (+6) = -42**, pues (-7) y (+6) son *números enteros de distinto signo* (por lo cual su producto será de signo negativo) y al realizar el *producto de sus valores absolutos*, este nos da 42.

d. **(-8) x (-10) = +80**, pues (-8) y (-10) son *números enteros de signo negativo* (por lo cual su producto será de signo positivo) y al realizar el *producto de sus valores absolutos*, este nos da 80.

Ejercicio 1

Halla el producto en cada uno de los siguientes casos:

a) $(+4) \times (-2) =$

e) $(-20) \times (-2) =$

b) $(-1) \times (-8) =$

f) $(-6314) \times 0 =$

c) $(+12) \times (+3) =$

g) $(+9) \times (+8) =$

d) $(+7) \times (-3) =$

h) $(-4) \times (-8) =$

Ejercicio 2

Planteando algunos ejemplos como justificación, indica si las siguientes propiedades que se cumplen en los naturales se siguen cumpliendo en los enteros:

- i) Asociativa de la multiplicación.
- ii) Conmutativa de la multiplicación.
- iii) Distributiva de la multiplicación (para ello investiga cómo se multiplican tres números enteros).
- iv) Existencia de neutro de la multiplicación.

Paso n°6. Se leerán las proposiciones encuadradas y se les dejará como tarea domiciliaria a los estudiantes la realización de los ejercicios que aparecen planteados. He elegido estos dos ejercicios pues entiendo que es necesario que los estudiantes pongan en práctica lo que se trabajó en clase y que investiguen en sus casas un poco más, para que en la siguiente clase podamos discutir sobre lo que han investigado.

Bibliografía:

- Editorial Santillana.
<http://www.sectormatematica.cl/basica/santillana/multiplicacion_enteros.pdf> [Consulta: 10 de noviembre]
- Profesor en línea.
<http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Valor_absoluto.html>
[Consulta: 15 de noviembre]

Link del applet: <http://ggbm.at/QPMQFSjG>

Link libro applets de educación media con Ceibal:
<https://www.geogebra.org/material/simple/id/2440183#>

Creado por Rodrigo de Leon

Corregido por Equipo de Matemática de Plan Ceibal