

Condiția de coliniaritate a trei puncte

Teoremă

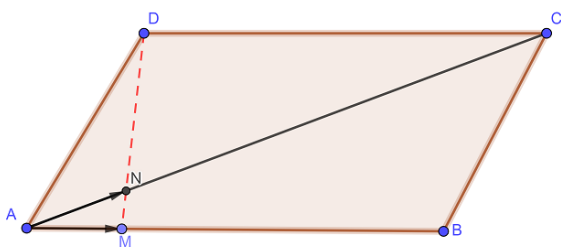
Fie $\vec{r}_A, \vec{r}_B$ și $\vec{r}_M$ vectorii de poziție ai punctelor A, B și respectiv M ($A \neq B$) în raport cu O, $O \notin AB$. Punctele A, B, M sunt puncte coliniare $\Leftrightarrow \vec{r}_M = \alpha \cdot \vec{r}_A + \beta \cdot \vec{r}_B$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha + \beta = 1$.

Aplicația 1

Fie ABCD un paralelogram. Pe [AB] și [AC] se iau punctele M și N, astfel încât $AM = \frac{1}{5} AB$, $AN = \frac{1}{6} AC$.

Arătați că punctele D, N, M sunt coliniare.

Soluție



Pentru ca rezolvarea să decurgă mai simplu este important să alegem polul pentru vectorii de poziție cât mai simplu, să coincidă cu unul dintre vârfurile paralelogramului.

Vom considera vectorii de poziție față de polul $O=A$, vom ține cont de regula paralelogramului pentru adunarea vectorilor.

Astfel, avem: $\vec{r}_C = \vec{r}_B + \vec{r}_D$; $\vec{r}_B = 5\vec{r}_M$, $\vec{r}_C = 6\vec{r}_N$.

Apoi: $\vec{r}_N = \frac{1}{6}\vec{r}_C = \frac{1}{6}(\vec{r}_B + \vec{r}_D) = \frac{5}{6}\vec{r}_M + \frac{1}{6}\vec{r}_D$; cum $\frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$, deducem coliniaritatea punctelor D, N, M.

Aplicația 2

Segmentele $[A_1B_1]$, $[A_2B_2]$, sunt concurente $\Leftrightarrow \frac{\vec{r}_{A_1} + k \cdot \vec{r}_{B_1}}{1+k} = \frac{\vec{r}_{A_2} + k \cdot \vec{r}_{B_2}}{1+k} = \frac{\vec{r}_{A_3} + k \cdot \vec{r}_{B_3}}{1+k} = \dots$

Egalitățile exprimă faptul că punctul de concurență este acela care le împarte în același raport, adică vectorul de poziție are aceeași expresie.