Club GeoGebra Iberoamericano

3

ECUACIONES, SISTEMAS DE ECUACIONES E INECUACIONES

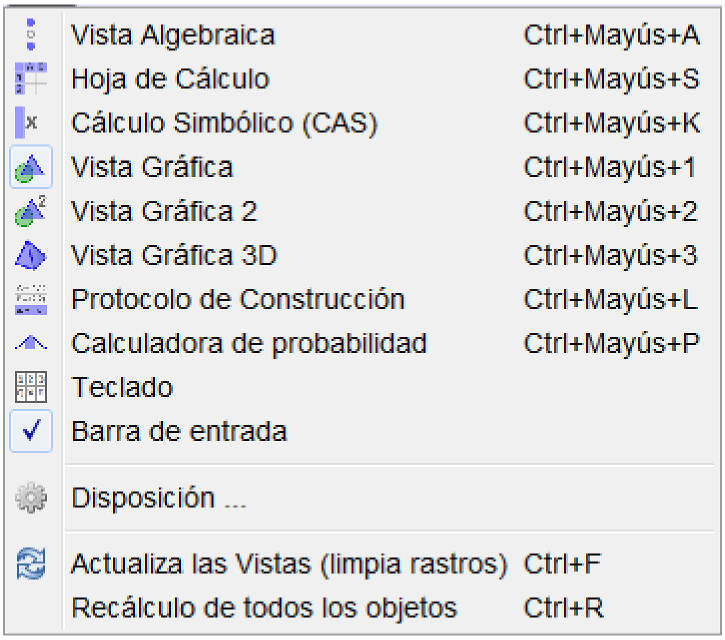
3. ECUACIONES, SISTEMAS DE ECUACIONES E INCECUACIONES

Introducción

Este tema lo dedicaremos a la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

Como propuesta de trabajo seguiremos utilizando GeoGebra, aprovechando las opciones de CAS incorporadas a partir de la última versión.

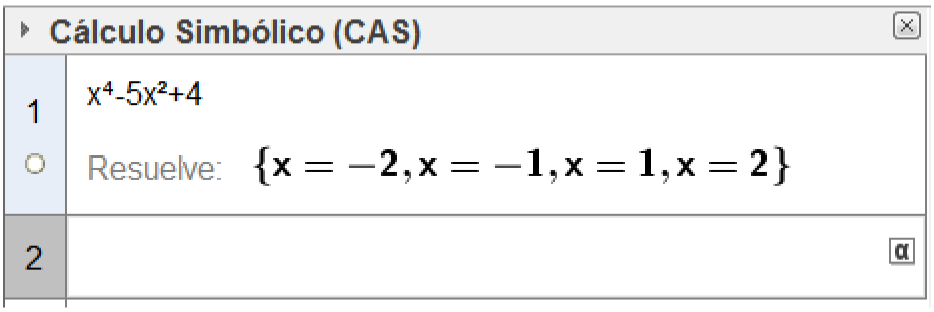
Comenzamos activando la vista **CAS – Cálculo simbólico** ya conocida.



Resolución de ecuaciones

Para resolver ecuaciones disponemos del botón $x=$ **Resuelve** en la barra de herramientas.

Bastará con escribir la ecuación que deseamos resolver y al pulsar el botón, GeoGebra devolverá las soluciones.



Como ha ocurrido con los botones expuestos anteriormente, disponemos de comandos que realizarán las mismas acciones.

Para resolver ecuaciones de cualquier tipo, podemos utilizar los comandos **Soluciones** o **Resuelve**, cuyas sintaxis son similares.

Por ejemplo, para resolver la ecuación expresión=0, conteniendo una única variable se utilizará:

Soluciones[expresión] **Resuelve[expresión]**

2 Soluciones[x²-4x+3]

$\rightarrow \{1, 3\}$

Cuando la ecuación contiene más de una incógnita será necesario incluir un segundo argumento que indique con respecto a cuál se desea resolver.

Soluciones[ecuación, variable] **Resuelve[ecuación, variable]**

3 Soluciones[a x²+ b x+c=0,a]

$\rightarrow \left\{\frac{-b\,x - c}{x^2}\right\}$

4 Soluciones[a x²+b x+c=0,x]

$\rightarrow \left\{\frac{\sqrt{-4\,a\,c + b^2} - b}{2\,a}, \frac{-\sqrt{-4\,a\,c + b^2} - b}{2\,a}\right\}$

El mismo resultado obtendremos utilizando **Resuelve**.

5 Resuelve[a x²+b x+c]

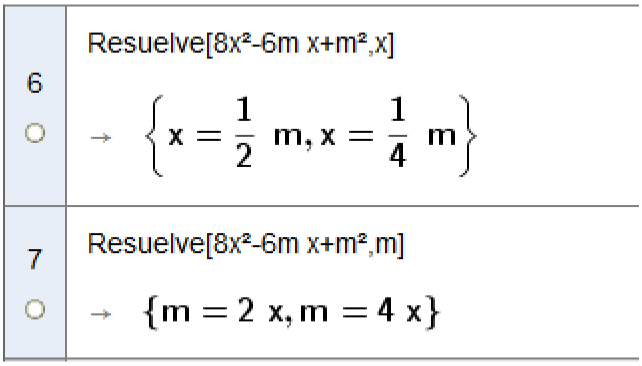
$\rightarrow \left\{x = \frac{\sqrt{-4\,a\,c + b^2} - b}{2\,a}, x = \frac{-\sqrt{-4\,a\,c + b^2} - b}{2\,a}\right\}$

Ejemplo 1

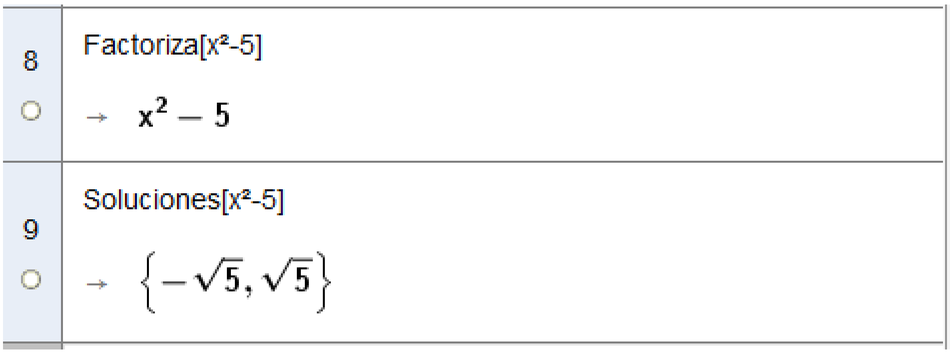
Resolver, con respecto a cada una de las variables, la ecuación:

$$8x^2 - 6mx + m^2 = 0$$

Para resolver la ecuación con respecto a cada una de las variables, bastará con escribir la ecuación indicando la variable con respecto a la que se desea obtener la solución, como aparece en la imagen siguiente:



El comando **Soluciones** puede utilizarse para calcular las raíces de un polinomio, solucionando de esta forma, los casos en los que el comando **Factoriza,** estudiado anteriormente, no devuelva las soluciones al no ser números fraccionarios.



Para obtener las raíces de un polinomio no será necesario expresarlo en forma de ecuación ya que en los comandos **Soluciones** o **Resuelve** se puede omitir el segundo término cuando es igual a 0.

Ejemplo 2

Resuelve las ecuaciones polinómicas:

$$x^3 + x^2 - 7x - 7 = 0 \qquad x^4 + 3x^2 - 4 = 0$$

Para obtener las soluciones de cada una de las ecuaciones bastará con utilizar cualquiera de los comandos anteriores.

10	Soluciones[x³+x²-7x-7=0] $\rightarrow \left\{-\sqrt{7}, -1, \sqrt{7}\right\}$
11	Soluciones[x⁴+3x²-4] $\rightarrow \{-1, 1\}$

A partir de las soluciones obtenidas comprobamos que en la segunda ecuación faltan algunas raíces ya que el polinomio es de cuarto grado y solo hemos obtenido dos raíces.

Podemos pedir que nos devuelva la descomposición en factores utilizando el comando **Factores** para obtener los distintos factores y el orden o **Factoriza** para obtener el polinomio como producto de sus factores.

12	Factores[x⁴+3x²-4] $\rightarrow \begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ x+1 & 1 \\ x^2+4 & 1 \end{pmatrix}$
13	Factoriza[x⁴+3x²-4] $\rightarrow (x-1)\ (x+1)\ \left(x^2+4\right)$
14	FactorC[x⁴+3x²-4] $\rightarrow (x-1)\ (x+1)\ (x+2\,i)\ (x-2\,i)$

Observamos, que hay dos raíces complejas que no hemos obtenido utilizando el comando **Soluciones**.

Para obtener todas las raíces, no solo las reales, será necesario emplear el comando **SolucionesC**.

15	SolucionesC[x⁴+3x²-4] $\rightarrow \{-1, 1, 2\,i, -2\,i\}$

Resolución aproximada de ecuaciones

En ocasiones, sobre todo en versiones anteriores a la 4.4. de GeoGebra, los comandos anteriores no serán capaces de hallar todas las soluciones de una ecuación, por lo que será necesario recurrir a la resolución numérica.

En la nueva versión los comandos **Soluciones** y **SolucionesC** devolverán las raíces, incluso aquellas que obtiene de manera aproximada.

Por ejemplo, al resolver la ecuación $x^6 + x - 2 = 0$, obtendremos las dos soluciones reales con el primer comando y todas las soluciones al resolverlas en C.

1 ○	Soluciones[x⁶+x-2] → $\{-1.21, 1\}$
2 ○	SolucionesC[x⁶+x-2] → $\{-1.21, 1, -0.52 + 1.06\,ί, -0.52 - 1.06\,ί, 0.63 + 0.88\,ί, 0.63 - 0.88\,ί\}$

Una vez introducida la expresión de este factor en la fila siguiente o copiada para facilitar su escritura, al marcar el círculo que aparece junto a la etiqueta de la fila, GeoGebra define una función cuya expresión es el polinomio anterior, que llevará a la **Vista algebraica** y representará en la **Vista gráfica**.

Además, GeoGebra ofrece otros comando para resolver de manera numérica una ecuación.

La sintaxis de estos comandos es:

SolucionesN[ecuación]

SolucionesN[ecuación, variable]

SolucionesN[ecuación, variable=valor inicial]

ResoluciónN[ecuación]

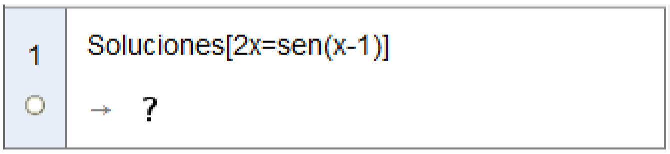
ResoluciónN[ecuación, variable]

Resolución [ecuación, variable=valor inicial]

Ejemplo 3

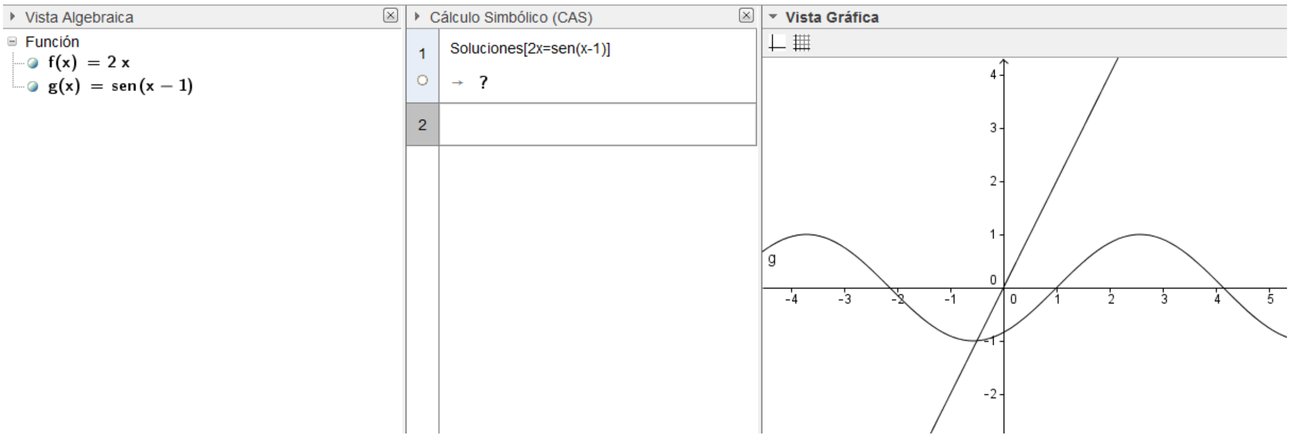
Resuelve la ecuación $2x = sen(x-1)$

Comenzamos utilizando el comando **Soluciones** para comprobar qué resultados obtenemos.

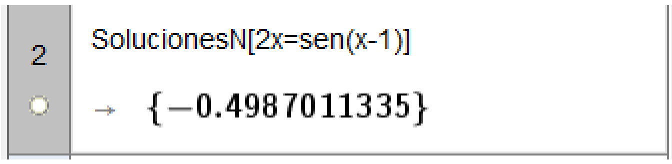


Recurrimos a la representación gráfica para conocer si existen soluciones.

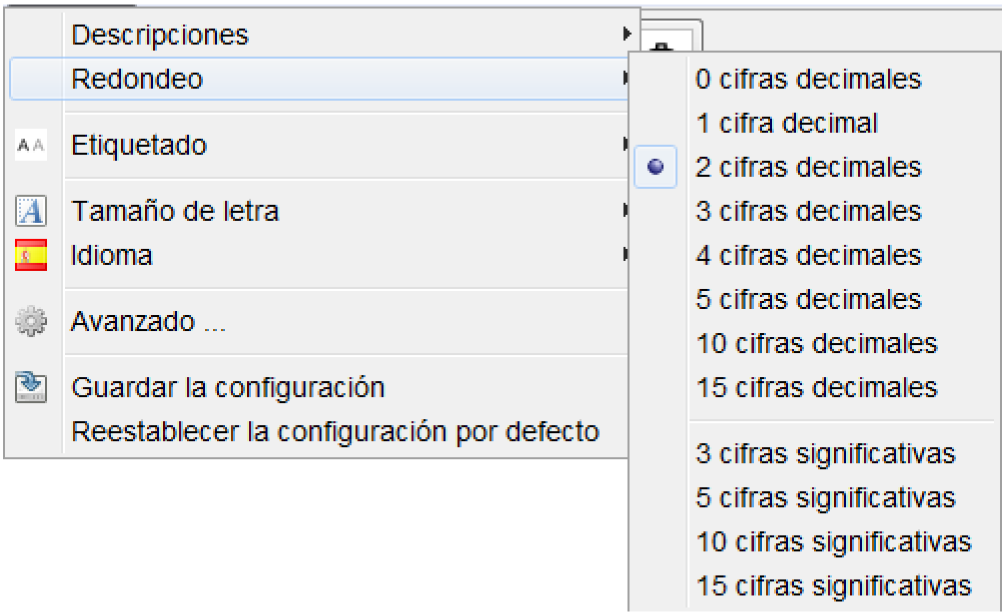
Para ello, definimos las dos funciones que corresponden a cada uno de los miembros de la ecuación.



Observamos que existe una raíz en el intervalo [-1, 0] que podemos obtener con ayuda del comando **SolucionesN**.

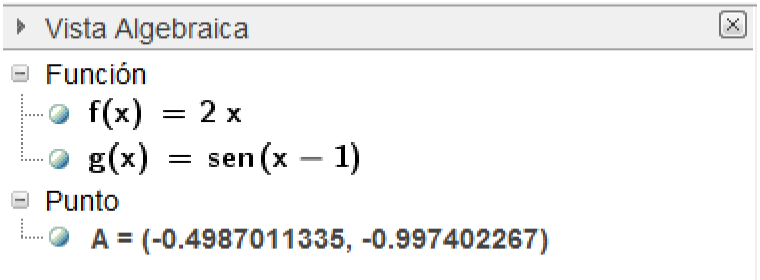


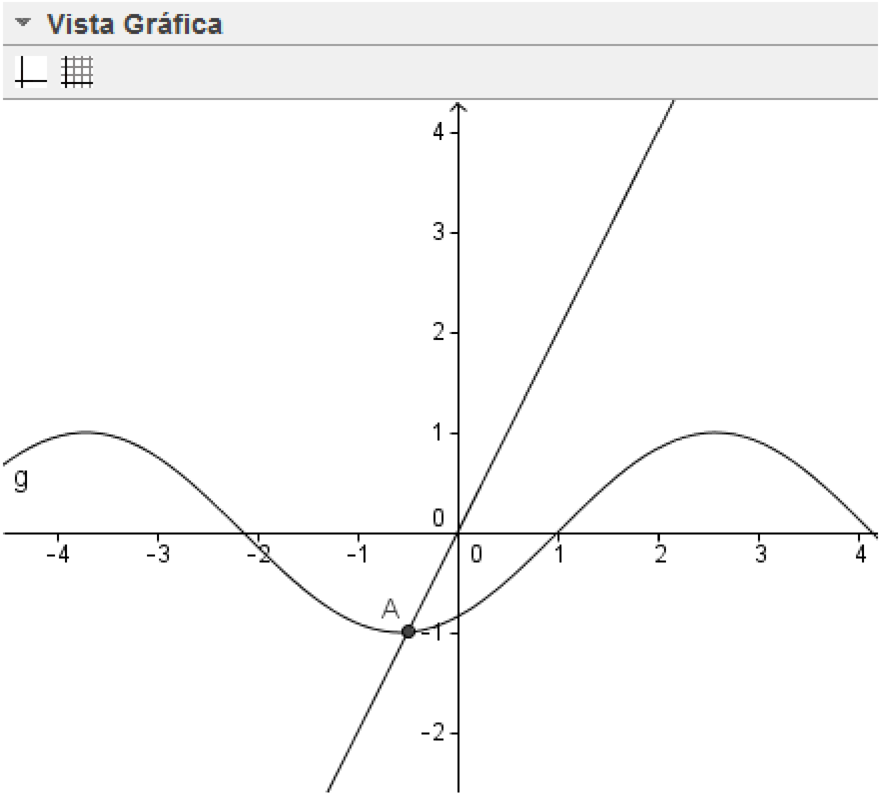
En cualquier momento es posible cambiar la precisión para los cálculos que hará que gracias al dinamismo de GeoGebra, todas las filas se actualizarán.



Podemos pensar que estos comandos aportan poco, ya que el valor anterior se podría obtener aplicando la herramienta Intersección de dos objeto para hallar el punto de intersección de las dos funciones.

Las coordenadas de este punto aparecerán en la **Vista algebraica** y también en la Vista gráfica.





Resolución de un sistema de ecuaciones

La resolución de un sistema de ecuaciones lineales se realizará a través de los comandos utilizados anteriormente para resolver ecuaciones.

Bastará utilizar los comandos **Soluciones** o **Resuelve** para obtener la solución, en caso de existir, de un sistema de ecuaciones.

Las ecuaciones del sistema se escribirán encerradas entre laves (como una lista, separadas por comas y lo mismo para las incógnitas.

La sintaxis será:

Soluciones[{ecuación$_1$,ecuación$_2$,…},{x, y, z, …}]

Resuelve[{ecuación$_1$,ecuación$_2$,…},{x, y, z, …}]

Por ejemplo, para resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2y-3z=1 \\ x+3y-2z=-3 \\ 4x-y-5z=4 \end{array}\right\}$$

Bastará con ejecutar la el comando con la sintaxis siguiente:

Soluciones[{3x+2y-3y=1,x+3y-2z=-3,4x-y-5z=4},{x,y,z}]

El programa devolverá, en este caso, la solución única, al ser el sistema compatible determinado.

1 Soluciones[{3x+2y-3z=1,x+3y-2z=-3,4x-y-5z=4},{x,y,z}]

$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo 4

Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x-2y+3z&=1 \\ y+2z&=-3 \\ x-3y+z&=4 \end{aligned}\right\}$$

Repetimos el proceso anterior utilizando de nuevo el comando **Soluciones**.

2 Soluciones[{x-2y+3z=1,y+2z=-3,x-3y+z=4},{x,y,z}]

$\rightarrow \begin{pmatrix} x & \frac{2}{7}x-\frac{11}{7} & -\frac{1}{7}x-\frac{5}{7} \end{pmatrix}$

Resultado que indica que el sistema es compatible indeterminado, cuya solución aparece en función de la incógnita x, aunque si lo resolvemos con respecto a las incógnitas x e y, obtendremos:

2 Soluciones[{x-2y+3z=1,y+2z=-3,x-3y+z=4},{x,y}]

$\rightarrow \begin{pmatrix} -7z-5 & -2z-3 \end{pmatrix}$

Ejemplo 5

Resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} x - y + z + t &= 1 \\ x + y + 2z - t &= 2 \\ x - 3y + z - 3t &= -2 \end{aligned}\right\}$$

Este sistema tiene más incógnitas que ecuaciones, por lo que debemos indicar con respecto a que incógnitas se desea resolver, siguiendo el mismo proceso que en los ejemplos anteriores, aunque si lo deseamos podemos indicar que todas son incógnitas para que el programa devuelva la solución considerando los parámetros.

3 Soluciones[{x-y+z+t=1,x+y+2z-t=2,x-3y+z-3t=-2},{x,y,z,t}]

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x & \frac{2}{9}x+\frac{1}{2} & -\frac{2}{3}x+1 & -\frac{1}{9}x+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 6

Discutir y resolver, según los valores del parámetro a, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} ax + y + z &= 4 \\ x - ay + z &= 1 \\ x + y + z &= a + 2 \end{aligned}\right\}$$

Una vez expresadas las ecuaciones anteriores, bastará con resolver el sistema de ecuaciones con respecto a las incógnitas [x, y, z]

4 Soluciones[{a x+y+z=4,x-a y+z=1,x+y+z=a+2},{x,y,z}]

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-a+2}{a-1} & 1 & \frac{a^2+a-3}{a-1} \end{pmatrix}$$

A partir del resultado anterior, podemos deducir que si **a = 1** el sistema es incompatible, que además, podemos comprobar resolviendo dicho sistema haciendo uso de la opción para sustituir valores en una expresión disponible a través del botón **Sustituye**.

5	{{(-a + 2) / (a - 1), 1, (a² + a - 3) / (a - 1)}}
○	Sustituye, a=1: $\left(\infty \quad 1 \quad \infty \right)$

Por tanto, la discusión del sistema sería:

$$Si \;\; a = 1 \qquad sistema\, incompatible$$

$$Si \;\; a \neq 1 \;\; sistema \;\; compatible \quad x = -\frac{a-2}{a-1},\, y = 1,\, z = \frac{a^2 + a - 3}{a-1}$$

El procedimiento para resolver sistemas de ecuaciones no lineales es similar al seguido para resolver sistemas lineales, para lo cual se utilizarán los mismos comandos, tal y como podemos comprobar en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 7

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y = 3 \end{array}\right\}$$

Una vez expresadas las ecuaciones anteriores, bastará con utilizar los comandos **Soluciones** o **Resuelve** para obtener las parejas de valores correspondientes a las soluciones, que aparecerán tal y como muestra la imagen siguiente:

6	Soluciones[{x²+y²=5,x+y=3},{x,y}]
○	$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

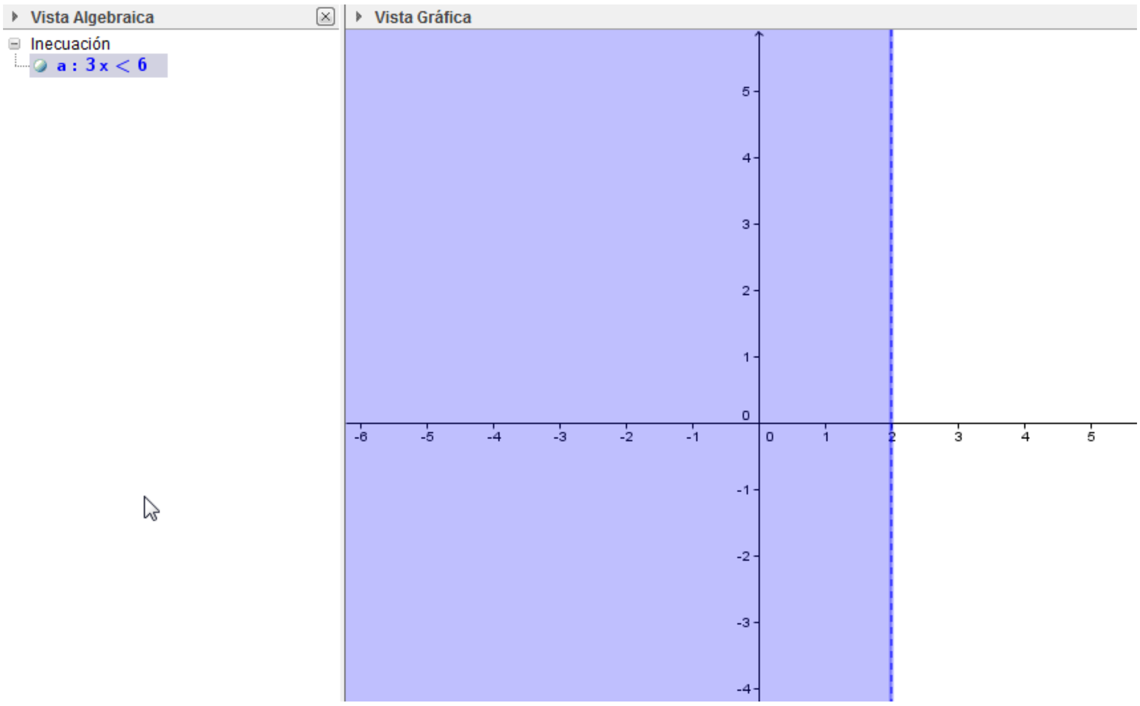
Utilizando el comando **SolucionesN** se podrá resolver de forma numérica un sistema de ecuaciones.

7	SolucionesN[{cos(x)-sen(y)=1,cos(x)+2sen(y)=0},{x,y}]
○	$\rightarrow \{-0.8410686706, -0.3398369095\}$

Inecuaciones

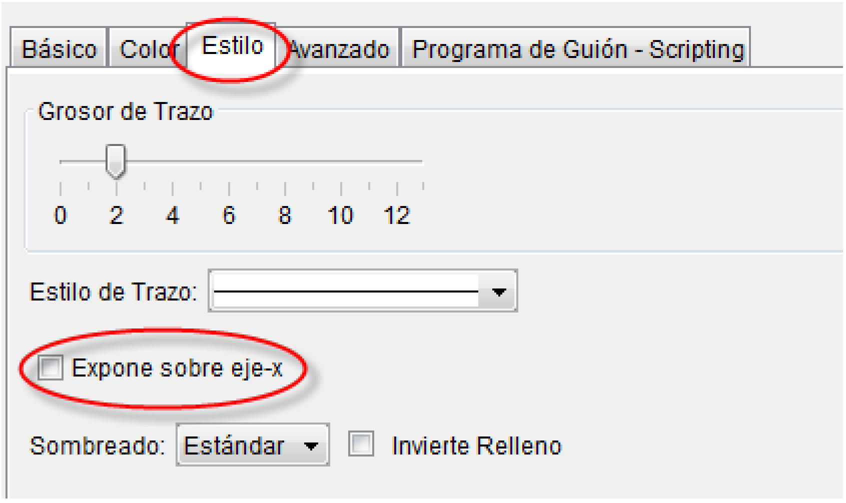
Para representar el conjunto solución de una inecuación, bastará con introducirla a través de la línea de entrada.

Al pulsar **Enter**, el conjunto solución aparecerá representado en la Vista gráfica, tal y como mostramos en la imagen siguiente:

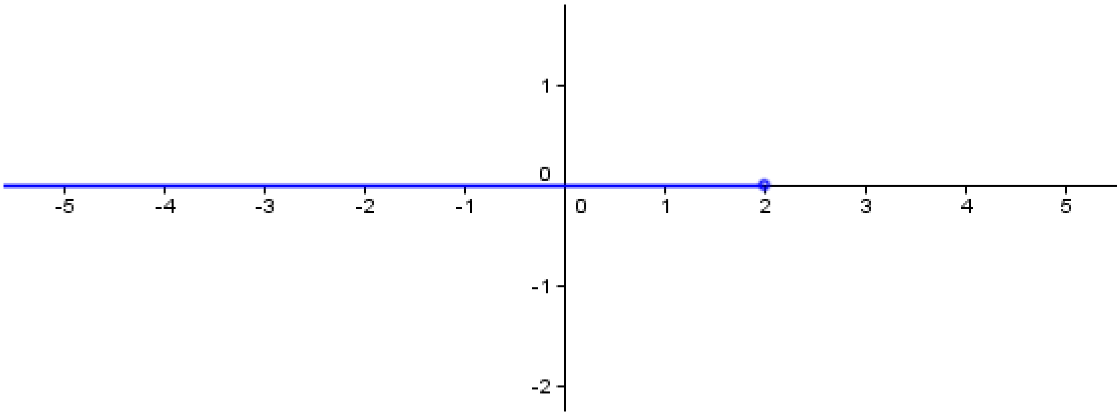


En la imagen observamos el conjunto de puntos del plano que corresponden al conjunto solución de la inecuación. Si deseamos que aparezca como conjunto solución el intervalo de valores de x, solo hay que pulsar el botón derecho sobre la vista gráfica o sobre el conjunto solución representado para seleccionar **Propiedades de Objeto**.

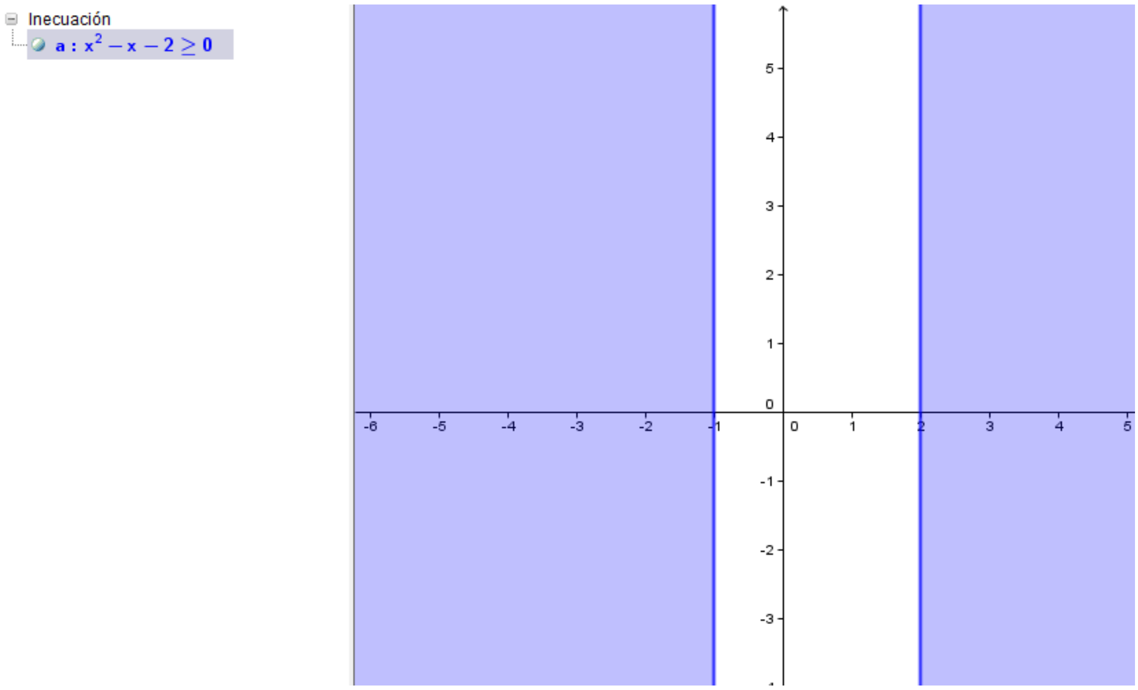
En la pestaña **Estilo**, solo hay que marcar la opción **Expone sobre eje-x** para que el conjunto solución aparezca representado en el eje de abscisas.

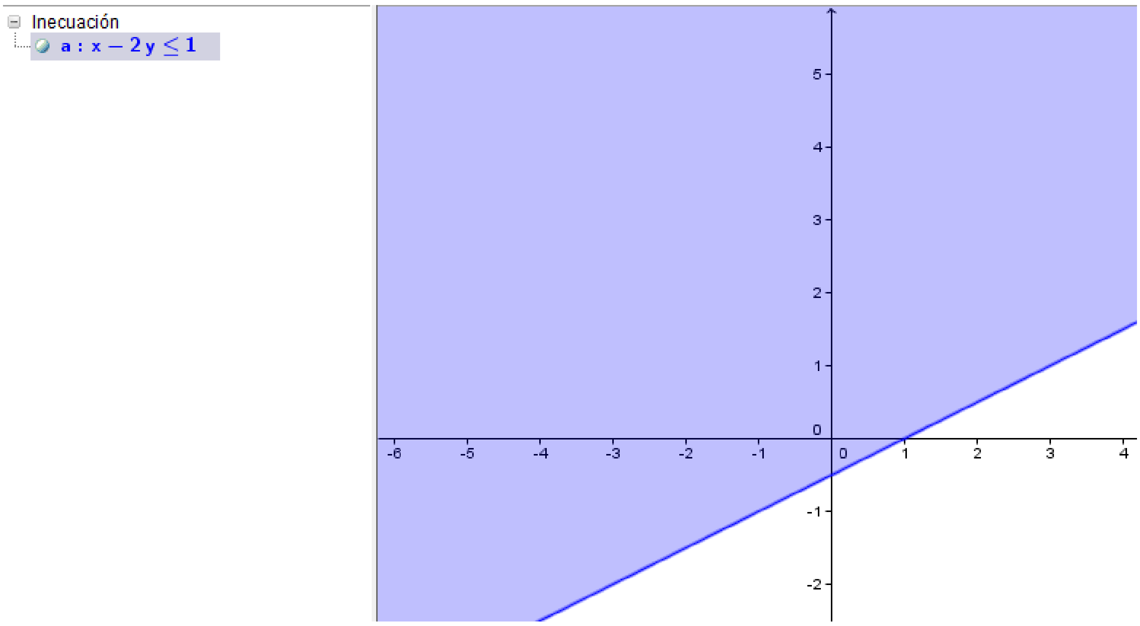


Una vez marcada la opción anterior, el resultado será el que aparece en la imagen siguiente:



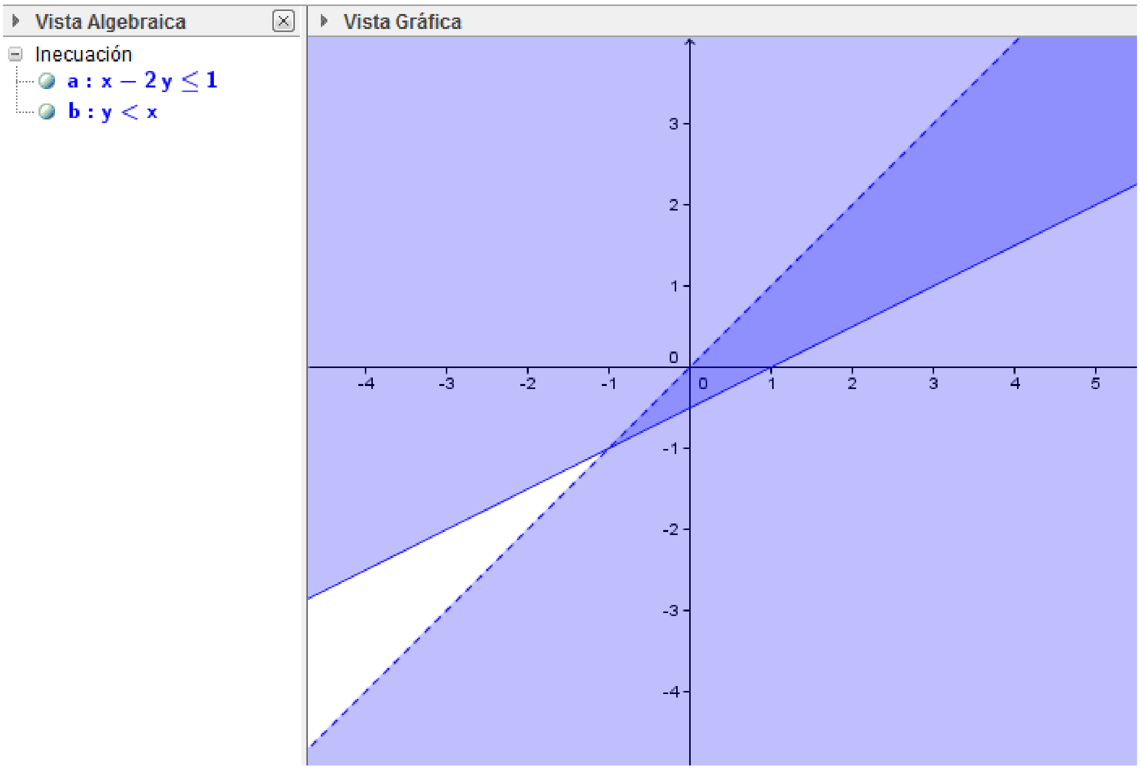
De manera análoga se podrá representar, y por tanto, resolver, cualquier inecuación de grado superior o de más de una incógnita.

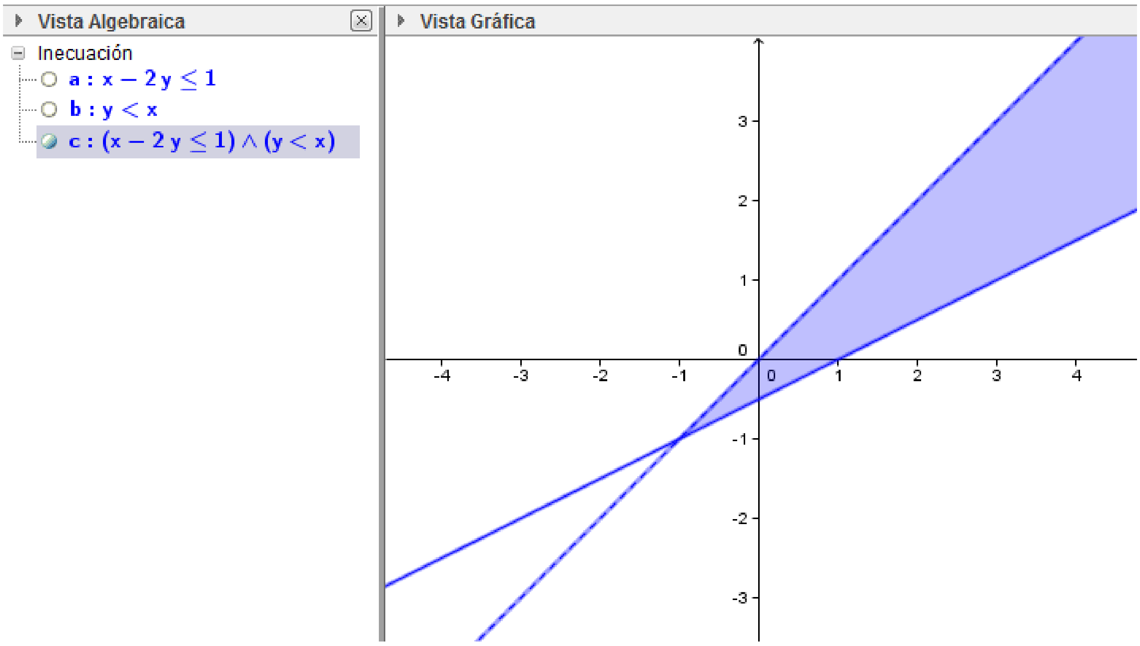




Utilizando el operador lógico **Y** (**∧**) se podrá obtener el conjunto solución correspondiente a un sistema de inecuaciones.

Para ello, bastará con representar con escribir **a ∧ b**, siendo *a* y *b* las inecuaciones.

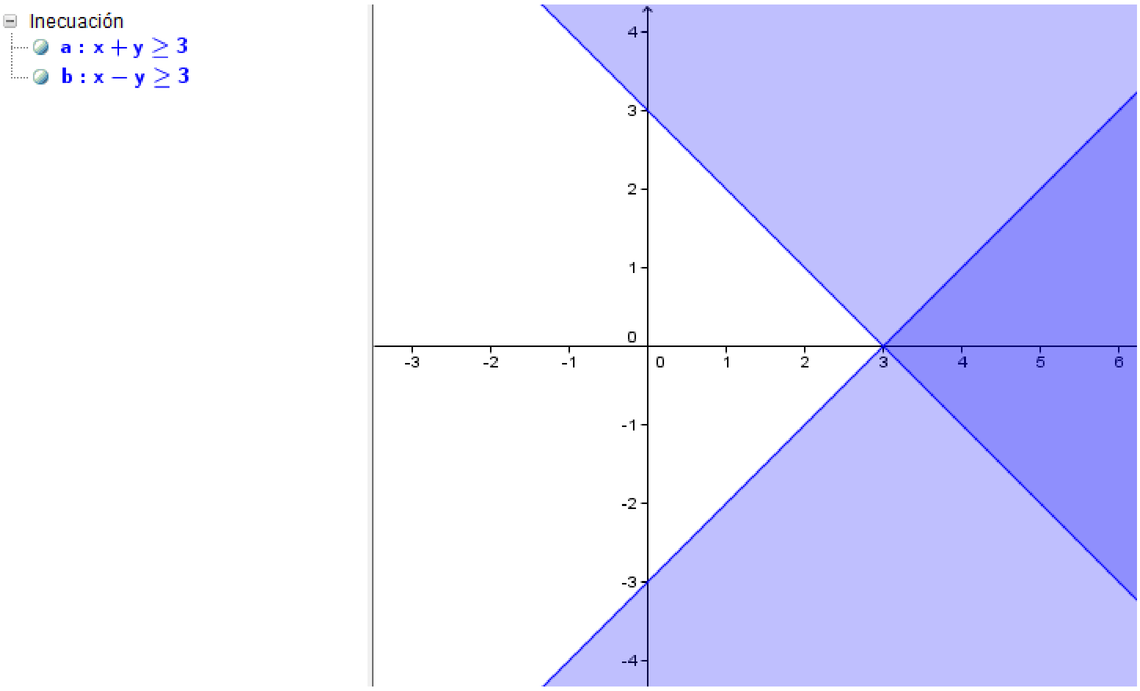




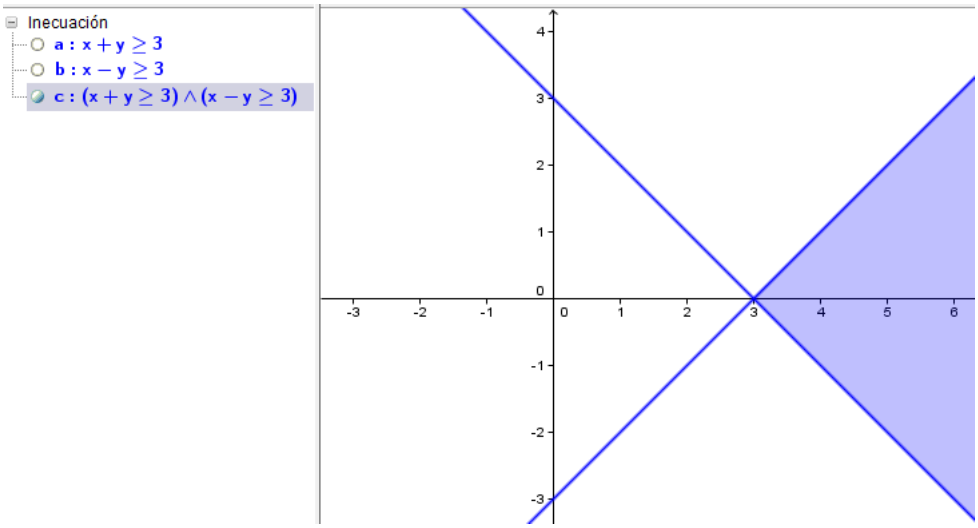
Ejemplo 8

Obtener el conjunto solución del sistema de inecuaciones $\left.\begin{array}{l} x+y \geq 3 \\ x-y \geq 3 \end{array}\right\}$.

Comenzamos introduciendo cada una de las ecuaciones a través de la línea de entrada, para obtener la representación que aparece en la imagen siguiente:



Para obtener el conjunto solución del sistema de inecuaciones, bastará con introducir la expresión a ∧ b.



Las posibilidades que ofrece la representación de inecuaciones nos permite resolver problemas de programación lineal.

Ejemplo 9

Una empresa elabora dos productos, A y B. Cada unidad de A requiere 2 horas en una máquina y 5 horas en una segunda máquina. Cada unidad de B necesita 4 horas en la primera máquina y 3 horas en la segunda máquina. Semanalmente se dispone de 100 horas en la primera máquina y de 110 horas en la segunda.

Si la empresa obtiene un beneficio de 70 euros por cada unidad de A, y de 50 euros por cada unidad de B, ¿qué cantidad semanal de cada producto debe producir con objeto de maximizar el beneficio total? ¿Cuál es ese beneficio?

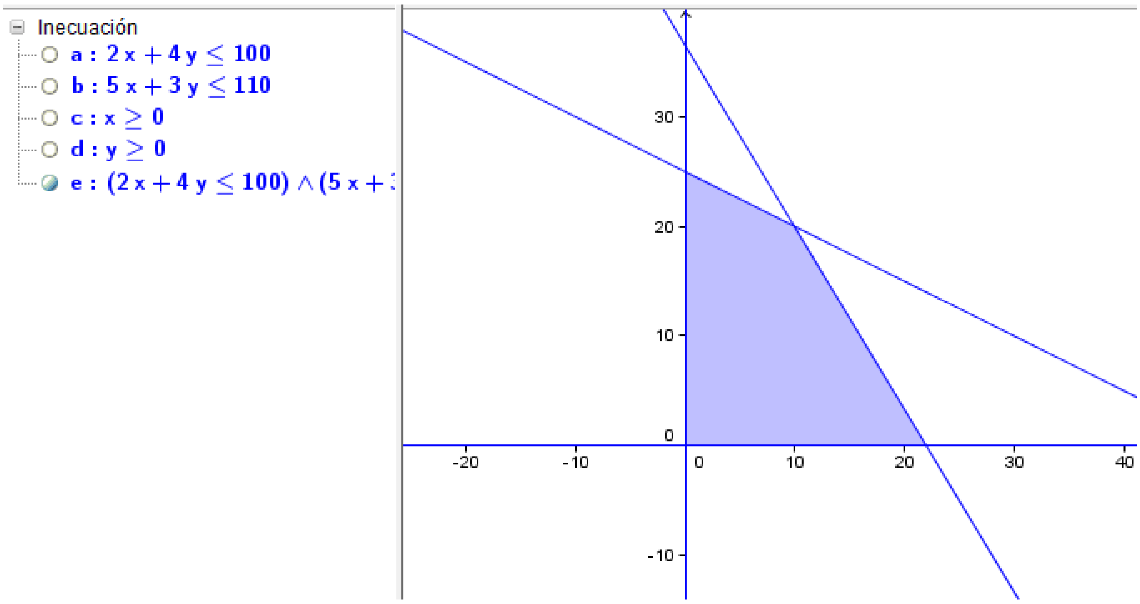
A partir de los datos construimos la tabla siguiente:

Productos	**Máquina 1**	**Máquina 2**
A	2 horas	5 horas
B	4 horas	3 horas
	100 horas	**110 horas**

Si llamamos *x* al número de unidades del producto A, e *y* al número de unidades del producto B, las relaciones entre estas variables, de acuerdo con las limitaciones de horas de cada máquina son las siguientes:

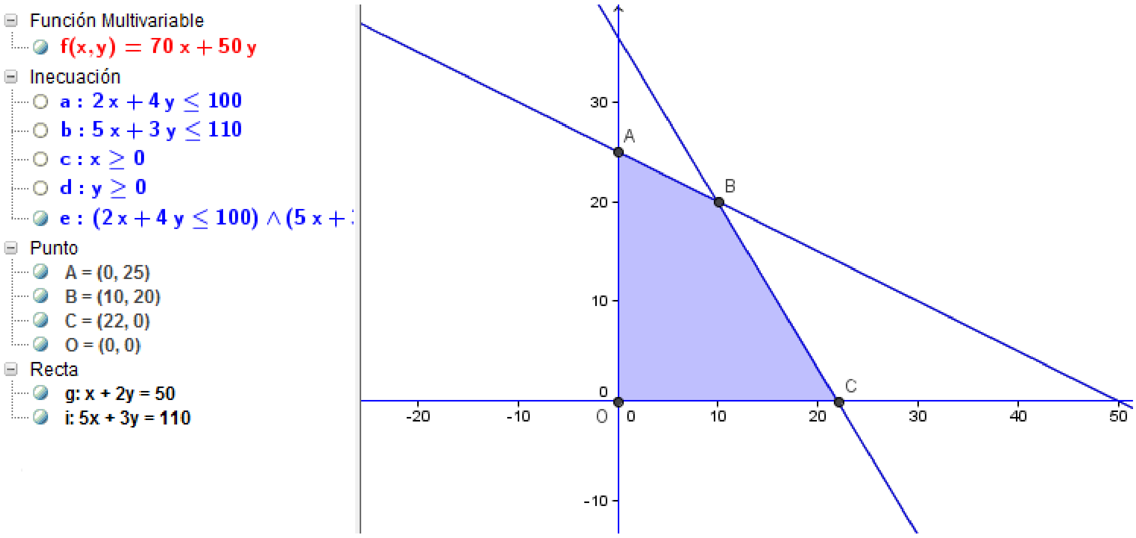
$$\left.\begin{array}{r} 2x+4y\leq 100 \\ 5x+3y\leq 110 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Representamos las desigualdades anteriores y obtenemos el recinto común.



La función que hay que maximizar es *70x+50y* que definimos introduciendo la expresión a través de la línea de entrada.

A continuación, para obtener los vértices del recinto, es necesario dibujar las rectas correspondientes a las dos primeras desigualdades.



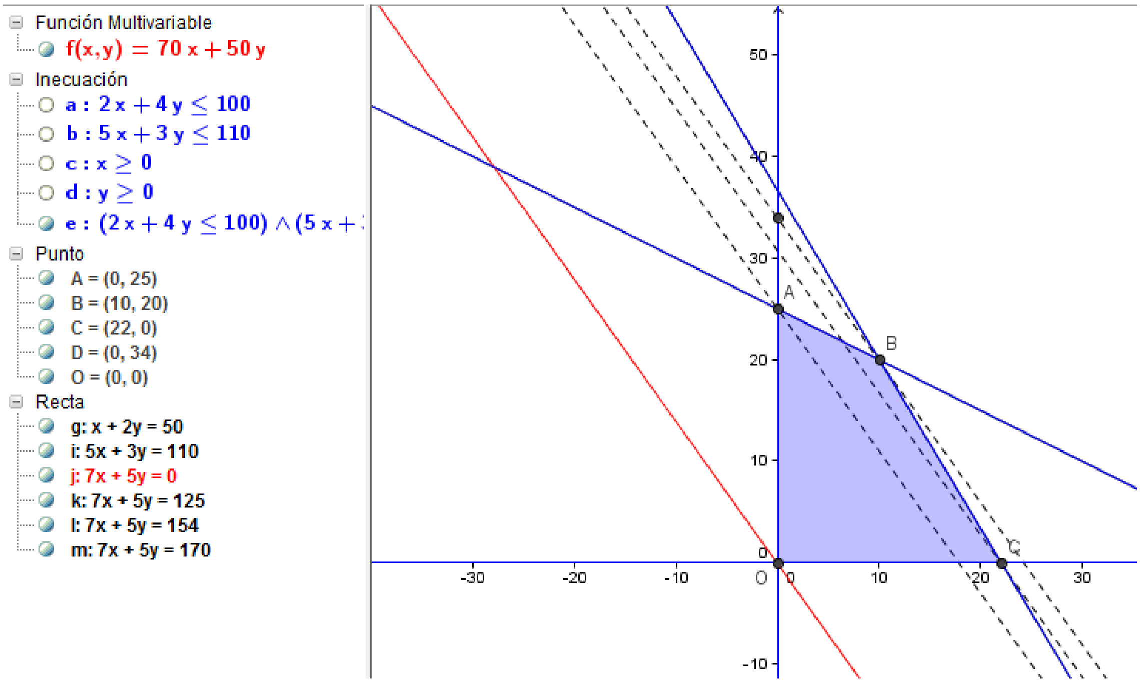
Ya solo queda comprobar en qué vértice se obtiene el máximo de la función.

Para ello, podemos obtener el valor de la función para las coordenadas de cada uno de los vértices, escribiendo a través de la línea de entrada f(x(A),y(A)), f(x(B),y(B)),…

Como alternativa se podrá obtener el comando **Vértices** para obtener las soluciones de un sistema de inecuaciones.

Vértices[sistema de inecuaciones]

También, se podrá representar la recta 70x+50y=0, dibujando a continuación las rectas paralelas por cada uno de los vértices del recinto para observar cuál tiene mayor ordenada en el origen.



Por tanto, el máximo de la función se alcanza en el vértice B cuyas coordenadas son (10,20), lo que significa que se harán 10 unidades del producto A y 20 del producto B.

El máximo de la función será 70.10+50.20=1.700 €.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Resolver la ecuación: $\frac{2x-1}{4} - 2(x-3) = 5 + \frac{3x}{2}$.
2. Resolver: $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$.
3. Resolver: $\frac{6}{x^2-1} - \frac{2}{x-1} = 2 - \frac{x+4}{x-1}$.
4. Resolver la ecuación siguiente con respecto a cada una de las variables: $x^2y - 2x^2 - y = x^2 - 2y$.
5. Determinar las raíces de los polinomios:
   a. $x^3 + 2x^2 + x + 2$
   b. $x^4 + 4x^3 - 25x^2 - 16x + 84$
   c. $x^6 - x^5 - 7x^4 + 6x^3 + x^2 + 7x - 7$
   d. $6x^5 + 25x^4 - 93x^3 - 404x^2 - 48x + 64$
6. Halla las raíces del polinomio: $2x^5 + 11x^4 + 2x^3 - 51x^2 - 14x + 60$.
7. Resolver el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 1 \\ 3x - 7y = 44 \end{array}\right\}$
8. Resolver los sistemas de ecuaciones siguientes:
   a. $\left.\begin{array}{r} 2x + y - z = -6 \\ x + 3y + z = 3 \\ 3x - 4y + 5z = 17 \end{array}\right\}$
   b. $\left.\begin{array}{r} x + 2y - 3z = 4 \\ 2x - y + 2z = 7 \\ 3x + y - z = 11 \end{array}\right\}$
   c. $\left.\begin{array}{r} x - 5y + z - t = 1 \\ x + 3y - z - 2t = 4 \end{array}\right\}$
9. Resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 1 \\ -y + z = 0 \\ 3y - z = 2 \\ x + 4y + 3z = 3 \end{array}\right\}$$

10. Resolver el sistema homogéneo siguiente: $\left.\begin{array}{r} 2\ x - 3\ y + z = 0 \\ x + 8\ y - 3\ z = 0 \\ 5\ x + 2\ y - z = 0 \end{array}\right\}$

11. Resolver: $\left.\begin{array}{r} 3\ x + 4\ y - z = 0 \\ 2\ x + \ y + z = 0 \\ 7\ x - 6\ y + \ z = 0 \end{array}\right\}$

12. Estudia su comportamiento según los valores de *m* y resuélvelo para *m=2*.

$$\left.\begin{array}{c} x + \ y \ = 1 \\ m\ y + z = 0 \\ x + (1 + m)\ y + m\ z = 1 + m \end{array}\right\}$$

13. Clasifica el siguiente sistema según los valores de *m*.

$$\left.\begin{array}{c} 2x + m\ y \ = 0 \\ x + m\ z = m \\ x - \ y + 3\ z = 1 \end{array}\right\}$$

14. Resuelve las inecuaciones siguientes:

$$\frac{x-3}{2} > 5x - 7 \qquad \frac{x-y}{2} \leq \frac{y-x}{3} \qquad x^2 - 7x + 12 \geq 0$$

15. Resuelve los sistemas de inecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} 5x + 5 > 2x + 7 \\ 2x - 3 > 5x - 8 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x + y \leq 3 \\ 3x - 2y \geq 6 \\ x + 3y \geq 1 \end{array}\right\}$$

16. Sea el recinto definido por las inecuaciones siguientes:

$x + y \leq 15 \qquad x \leq 2y \qquad 0 \leq y \leq 6 \qquad x \geq 0$

a. Representa gráficamente dicho recinto.

b. Calcula sus vértices.

c. Determina el máximo valor de la función F(x,y)=8x+5y en el recinto anterior y dónde se alcanza.

17. Un empresario fabrica camisas y pantalones para jóvenes. Para hacer una camisa se necesitan 2 metros de tela y 5 botones, y para hacer un pantalón hacen falta 3 metros de tela, 2 botones y 1 cremallera. La empresa dispone de 1050 metros de tela, 1250 botones y 300 cremalleras. El beneficio que se obtiene por la venta de una camisa es de 30 euros y el de un pantalón es de 50 euros. Suponiendo que se vende todo lo que se fabrica, calcule el número de camisas y de pantalones que debe confeccionar para obtener el máximo beneficio, y determine este beneficio máximo.

18. Un comerciante dispone de 1200 euros para comprar dos tipos de manzanas A y B. Las del tipo A las compra a 0.60 euros/kg y las vende a 0.90 euros/kg, mientras que las del tipo B las compra a 1 euro/kg y las vende a 1.35 euros/kg.

    Sabiendo que su vehículo a lo sumo puede transportar 1500 kg de manzanas, ¿cuántos kilogramos de cada tipo deberá adquirir para que el beneficio que obtenga sea máximo? ¿Cuál sería ese beneficio?