5GUAA3 LIMITES ET ASYMPTOTES

Table des matières

1 Les limites

1.1 Adhérence

Un **point adhérent au domaine de définition** d'une fonction f est un point qui appartient au domaine de f ou qui est « juste à côté ».

Exemples :

1. Si $dom_f =]0;1]$, les points de $[0;1]$ sont adhérents au domaine.
2. Si $dom_f =]0;\rightarrow$, les réels positifs ou nuls sont adhérents au domaine.
3. Si $dom_f = \mathbb{R}_0$, tous les réels sont adhérents au domaine.

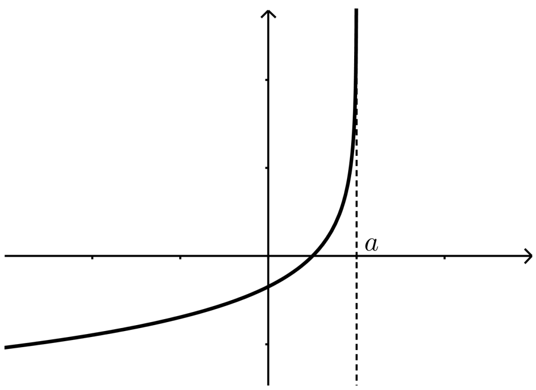
1.2 Limites en un réel

1.2.1 Limites infinies

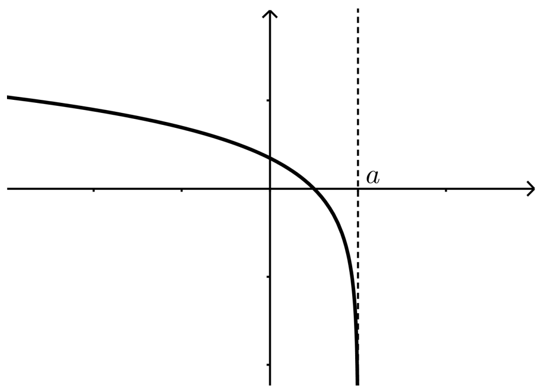
Si a est un point adhérent au domaine de f,

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ signifie que lorsque x s'approche de a, $f(x)$ tend vers $+\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ signifie que lorsque x s'approche de a, $f(x)$ tend vers $-\infty$.



$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$

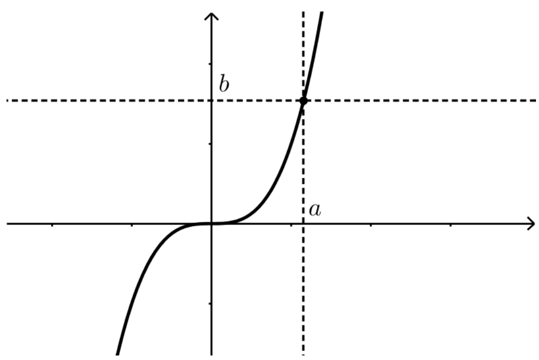


$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

1.2.2 Limites finies

Si a est un point adhérent au domaine de f et si $b \in \mathbb{R}$,

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ signifie que lorsque x s'approche de a, $f(x)$ s'approche d'une valeur finie b.



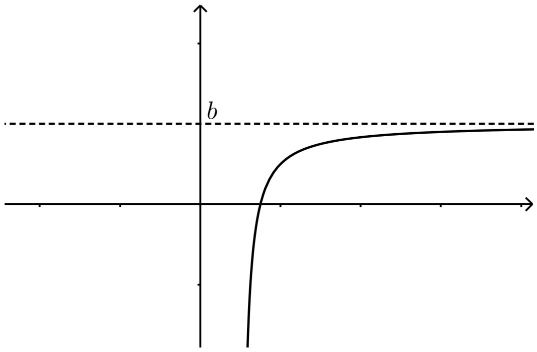
1.3 Limites en l'infini

1.3.1 Limites finies

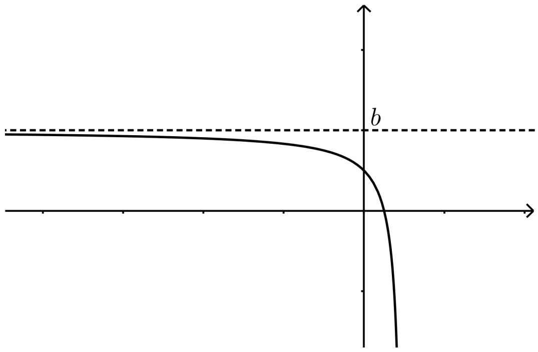
Si $b \in \mathbb{R}$,

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ signifie que lorsque x est infiniment grand, $f(x)$ s'approche d'une valeur finie b.

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ signifie que lorsque x est infiniment grand dans les négatifs, $f(x)$ s'approche d'une valeur finie b.



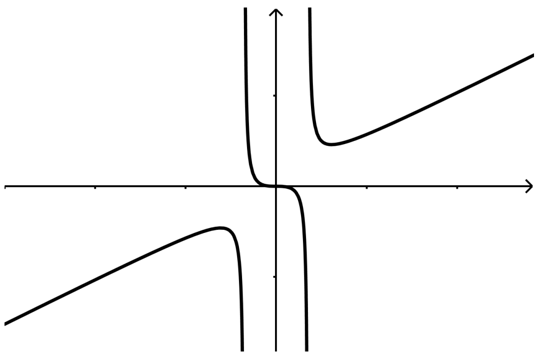
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$



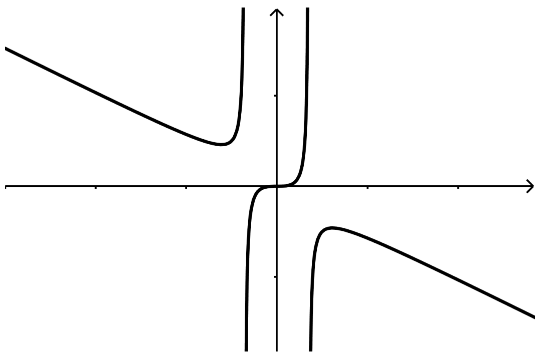
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

1.3.2 Limites infinies

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ signifie que lorsque x est infiniment grand, $f(x)$ devient infiniment grand aussi.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ signifie que lorsque x est infiniment grand, $f(x)$ devient infiniment grand dans les négatifs.
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ signifie que lorsque x est infiniment grand dans les négatifs, $f(x)$ devient infiniment grand.
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ signifie que lorsque x est infiniment grand dans les négatifs, $f(x)$ devient infiniment grand dans les négatifs.



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



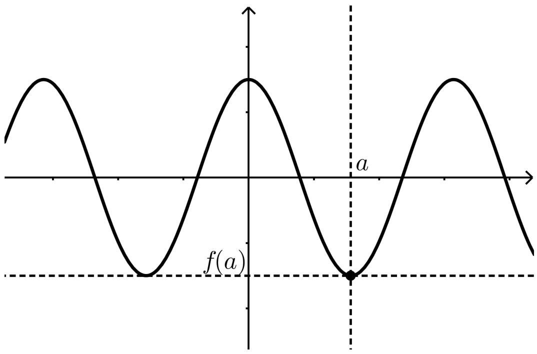
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

1.4 Limites à gauche ou à droite et continuité

$L_g = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ est la limite à gauche de f en a, c'est-à-dire la limite quand x s'approche de a par des valeurs plus **petites** que a.

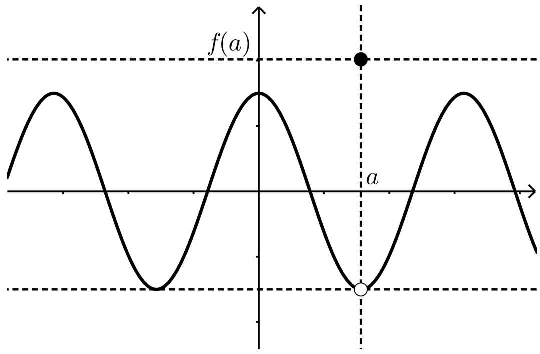
$L_d = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ est la limite à droite de f en a, c'est-à-dire la limite quand x s'approche de a par des valeurs plus **grandes** que a.

Une fonction f est continue en $x = a$ si $L_g = L_d = f(a)$.



$L_g = L_d = f(a)$

donc la fonction est continue en a.

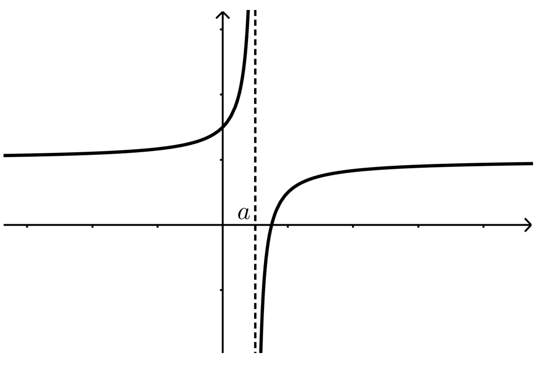


$L_g = L_d \neq f(a)$

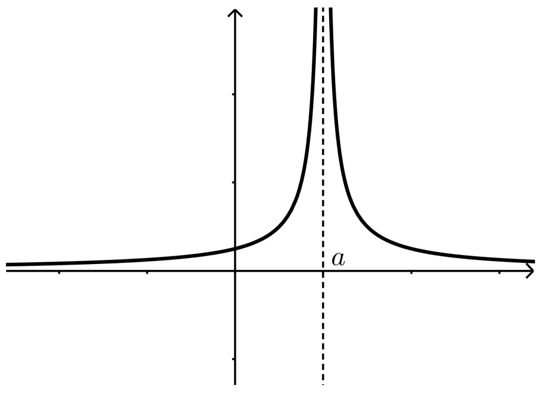
donc la fonction n'est pas continue en a.

1.5 Existence d'une limite

La $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ **existe** lorsque $L_g = L_d$. Elle vaut alors $L (= L_g$ ou $L_d)$.



$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$
et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$
donc la limite n'existe pas.

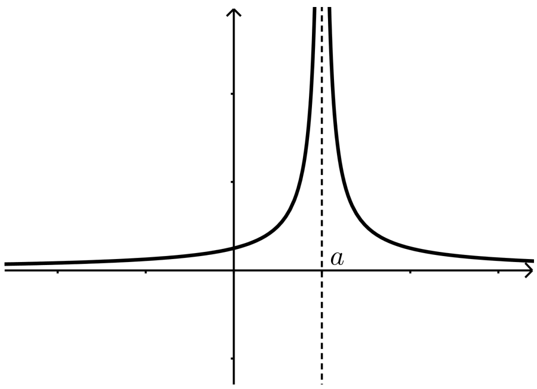


$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$
et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$
donc la limite existe et vaut $+\infty$

2 Les asymptotes

2.1 Asymptote verticale

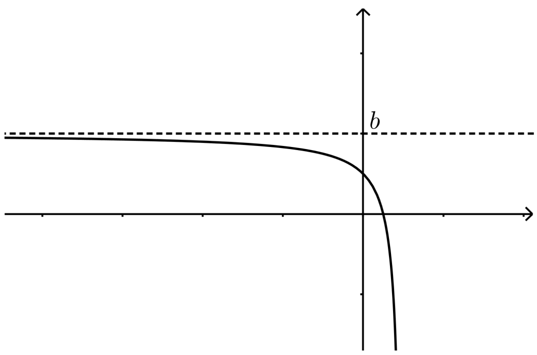
Le graphe d'une fonction f admet une **asymptote verticale** (AV) d'équation $x = a$ si a est un point adhérent mais **hors du domaine** de f et si $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.



2.2 Asymptote horizontale

Le graphe d'une fonction f admet une **asymptote horizontale** (AH) d'équation $y = b$ lorsque $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$.

Si c'est le cas quand $x \to +\infty$, on parlera d'AH à droite. Si c'est le cas quand $x \to -\infty$, on parlera d'AH à gauche.

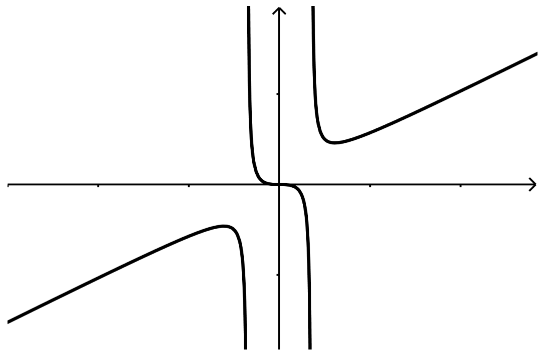


AH à gauche

2.3 Asymptote oblique

Le graphe d'une fonction f admet une **asymptote oblique** (AO) d'équation $y = mx + p$ lorsque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (mx + p)] = 0$.
À nouveau, on peut distinguer les AO à droite et à gauche.

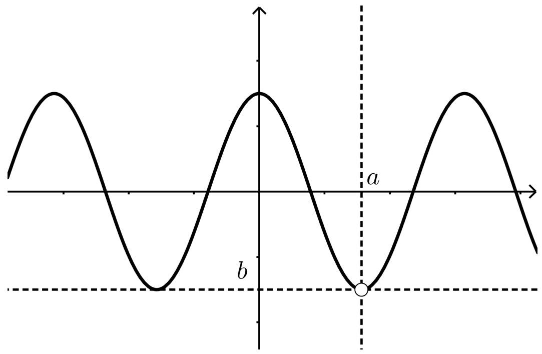
En pratique, $\begin{cases} m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ p = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - mx \end{cases}$



AO à gauche et à droite

2.4 Rond creux

Le graphe d'une fonction f admet un **rond creux** (RC) en $(a; b)$ si a est un point adhérent **mais hors du domaine** de f et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.



RC en $(a; b)$

3 Le calcul de limites

Pour calculer $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, il suffit de remplacer x par a dans l'expression de $f(x)$.
Parfois, tout marche bien et on tombe tout de suite sur un nombre réel ; ce sont les limites **immédiates**. Parfois, on tombe sur une indétermination du type $\frac{0}{0}, \frac{+\infty}{-\infty}, +\infty - \infty, ...$ Dans ces cas, il faut lever l'indétermination à l'aide des techniques ci-dessous.

3.1 Calculs immédiats

Exemples :

• $\lim\limits_{x \to 3} 2x + 1 = 2.3 + 1 = 7$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x+1} = \frac{2}{+\infty} = 0$

• $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{x} \quad \nexists$ car -1 n'est pas un point adhérent au domaine de $f(x) = \sqrt{x}$.

3.2 Fonctions polynômes ou inverses de polynômes

Pour soulever l'imprécision $\infty - \infty$, on ne s'intéresse qu'au terme de plus haute puissance.
Exemple :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} x^3 - 3x - 4 &= -\infty + 3\infty - 4 \\
&= -\infty + \infty \\
&= \textbf{? indétermination ?} \\
&= \lim_{x \to -\infty} x^3 \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

Lorsque l'on obtient $\frac{b}{0}$, on se rappelle que diviser par un nombre infiniment petit donne un nombre infiniment grand. Ensuite, on fait un tableau de signe pour déterminer le signe du nombre infiniment grand.
Exemple :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - x}{x+3} &= \frac{9+3}{-3+3} \\
&= \frac{12}{0} \\
&= \pm\infty
\end{aligned}$$

		-3		0		1	
$\frac{x^2-x}{x+3}$	-	//	+	0	-	0	+

$$\begin{cases}
\lim\limits_{x \to -3^-} \frac{x^2 - x}{x+3} &= -\infty \\
\lim\limits_{x \to -3^+} \frac{x^2 - x}{x+3} &= +\infty
\end{cases}$$

3.3 Fonctions rationnelles

Pour soulever l'imprécision $\frac{0}{0}$, on factorise le numérateur et le dénominateur par $x-a$, on simplifie et on recalcule la limite.

Exemple :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+x-2} &= \frac{1-1}{1-1-2} \\
&= \frac{0}{0} \\
&= \textbf{? indétermination ?} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+2} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Pour soulever l'imprécision $\frac{\infty}{\infty}$, on ne s'intéresse qu'aux termes de plus hautes puissances, au numérateur et au dénominateur.

Exemple :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2-x+3}{x^3+8x+7} &= \frac{2\infty+\infty+3}{-\infty-8\infty+7} \\
&= \frac{\infty}{-\infty} \\
&= \textbf{? indétermination ?} \\
&= \lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2}{x^3} \\
&= \lim_{x\to -\infty}\frac{2}{x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

4 Exercices

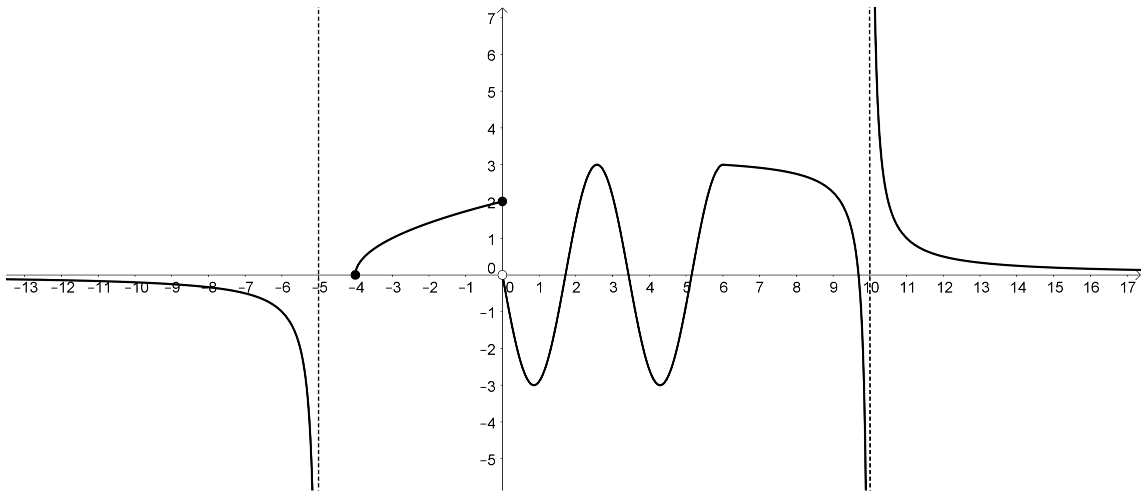
4.1 Les limites par graphique

1. Donnez les points adhérents mais hors du domaine des fonctions ci-dessous.

$$f_1(x) = \frac{x}{x^2-1} \qquad f_2(x) = -\frac{2x+1}{4x+2} \qquad f_3(x) = 2x + \frac{1}{3x}.$$

2. Sur base du graphe ci-dessous, déterminez les limites suivantes.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to-6^-} f(x) =$
$\lim\limits_{x\to-5^+} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to-5^-} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to-4^-} f(x) =$
$\lim\limits_{x\to-4^+} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) =$
$\lim\limits_{x\to5^-} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to6^+} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to10^+} f(x) =$
$\lim\limits_{x\to10^-} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to12^+} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to17^+} f(x) =$



3. À l'aide des limites, expliquez pourquoi la fonction ci-dessus n'est pas continue en 0.

4.1.1 Solutions

1. $f_1 : \{-1; 1\}$, $f_2 : \{-1/2\}$, $f_3 : \{0\}$

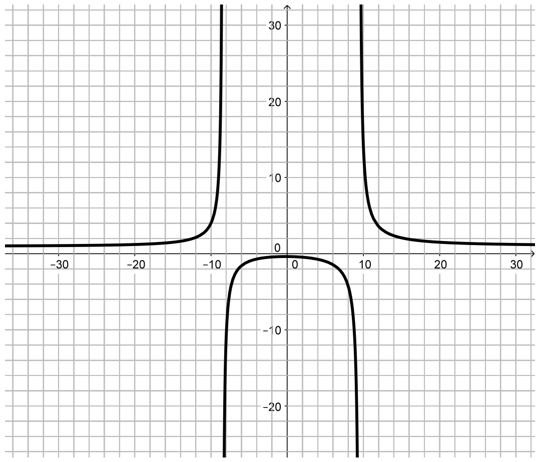
2.

0	0	3
$\nexists$	$-\infty$	$\nexists$
0	environ 1,5	0
environ -0,75	3	$+\infty$
$-\infty$	environ 1	0

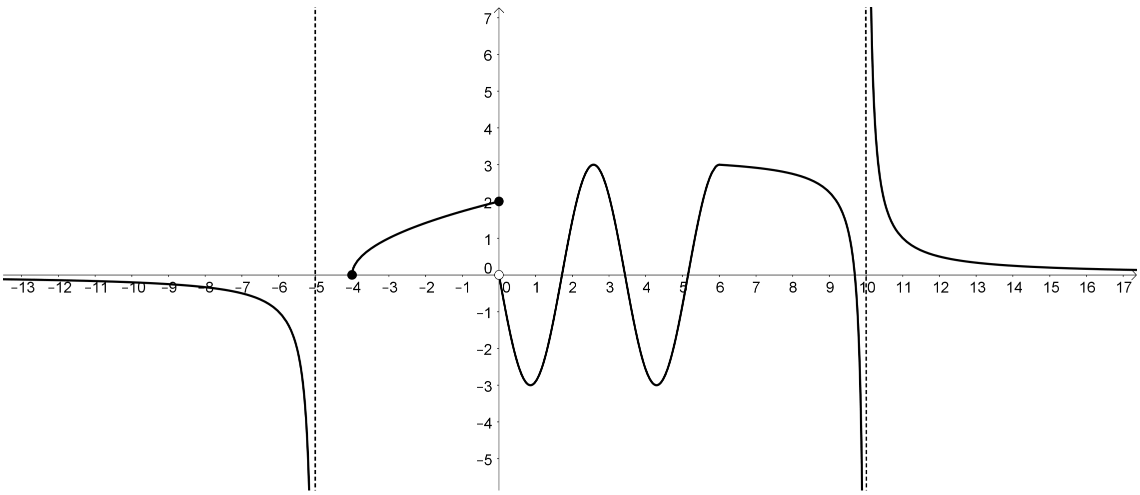
3. $f(0) = 0$ et $L_d = 0$ mais $L_g = 2$.

4.2 Les asymptotes

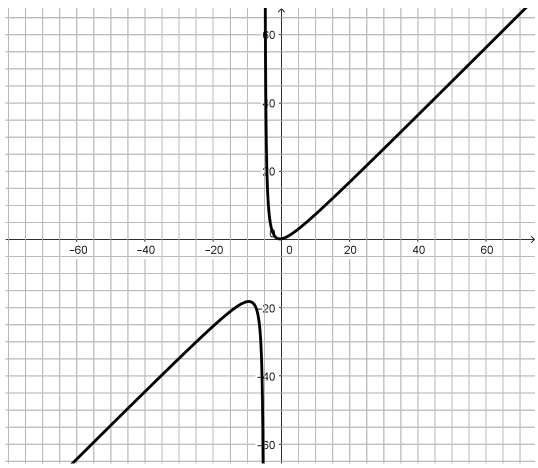
Pour chacun des graphes suivants, estimez les équations des asymptotes. Justifiez ces équations à l'aide des limites.



A



B



C

4.2.1 Solutions

A $AV \equiv x = -10$ car $\lim_{x \to -10^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -10^+} f(x) = -\infty$

$AV \equiv x = 10$ car $\lim_{x \to 10^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to 10^+} f(x) = +\infty$

$AH \equiv y = 0$ car $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

B $AV \equiv x = 10$ car $\lim_{x \to 10^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to 10^+} f(x) = +\infty$

$AV \equiv x = -5$ car $\lim_{x \to -5^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to -5^+} f(x) \quad \nexists$

$AH \equiv y = 0$ car $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

C $AV \equiv x = -5$ car $\lim_{x \to -5^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to -5^+} f(x) = +\infty$

$AO \equiv y = x - 5$

4.3 Calcul de limites

1. Calculez les limites des fonctions ci-dessous.

   (a) $\lim_{x \to -3} \frac{1}{x}$

   (b) $\lim_{x \to 0} \frac{3 + x}{2x}$

   (c) $\lim_{x \to -5} \sqrt{x + 4}$

   (d) $\lim_{x \to 2} \sqrt{2x - 1}$

   (e) $\lim_{x \to \infty} \frac{2}{x + 1}$

   (f) $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x + 1}{x + 3}$

   (g) $\lim_{x \to \infty} 8x^2$

   (h) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{3}$

   (i) $\lim_{x \to \pm\infty} x^n$ pour n pair

   (j) $\lim_{x \to \pm\infty} x^n$ pour n impair

   (k) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n}$

   (l) $\lim_{x \to 1} x^3 + 3x - 4$

   (m) $\lim_{x \to +\infty} x^3 + 3x - 4$

   (n) $\lim_{x \to -\infty} x^3 + 3x - 4$

   (o) $\lim_{x \to -\infty} x^3 - 3x - 4$

   (p) $\lim_{x \to -1} \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

   (q) $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

   (r) $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

(s) $\lim_{x \to -2} \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

(t) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$

(u) $\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - x - 2}{3x^2 - 6x + 3}$

(v) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{3x + 7}$

(w) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^3 - 8x + 7}$

(x) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x - 3}$

(y) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x - 3}$

(z) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2 - x}$

2. Calculez les limites suivantes. Quand elles donnent lieu à une asymptote verticale, une asymptote horizontale ou un rond creux, précise-le.

(a) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 2}{x + 1}$

(b) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x^3 - 1)(x + 2)}{1 - x^2}$

(c) $\lim_{x \to 1} \frac{(x^3 - 1)(x + 2)}{1 - x^2}$

(d) $\lim_{x \to -1} \frac{(x^3 - 1)(x + 2)}{1 - x^2}$

(e) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x^2 - 5x + 7}{8x^2 - 6x + 1}$

(f) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{-(x + 3)^2}{8x^2 + 2x + 5}$

3. Pour chacune des fonctions ci-dessous,

— déterminez le domaine de définition,

— déterminez les équations des éventuelles asymptotes.

(a) $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 1}$

(b) $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^3 + 3x^2 - 4}$

(c) $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 2}$

4.3.1 Solutions

1. (a) $\frac{-1}{3}$
   (b) $-\infty$ à gauche, $+\infty$ à droite
   (c) $\nexists$
   (d) $\sqrt{3}$
   (e) 0
   (f) 2
   (g) $+\infty$
   (h) $-\infty$
   (i) $+\infty$
   (j) $-\infty$ à gauche, $+\infty$ à droite
   (k) 0
   (l) 0
   (m) $+\infty$
   (n) $-\infty$
   (o) $-\infty$
   (p) $\frac{1}{6}$
   (q) $+\infty$ à gauche, $-\infty$ à droite
   (r) $-\infty$ à gauche, $+\infty$ à droite
   (s) $\frac{1}{12}$
   (t) 0
   (u) $-\infty$ à gauche, $+\infty$ à droite
   (v) $-\infty$ à gauche, $+\infty$ à droite
   (w) 0
   (x) $\frac{5}{4}$
   (y) 1
   (z) 0

2. (a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2}{x+1} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2}{x+1} = -\infty$
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x^3-1)(x+2)}{1-x^2} = -\infty$
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{(x^3-1)(x+2)}{1-x^2} = \frac{-9}{2}$
   On a donc un rond creux en $(1, \frac{-9}{2})$.

(d) $\lim_{x \to -1^-} \dfrac{(x^3-1)(x+2)}{1-x^2} = +\infty$ et $\lim_{x \to -1^+} \dfrac{(x^3-1)(x+2)}{1-x^2} = -\infty$
On a donc une AV$\equiv x = -1$.

(e) $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{4x^2-5x+7}{8x^2-6x+1} = \dfrac{1}{2}$
On a donc une $\text{AH}_d \equiv y = \frac{1}{2}$ et une $\text{AH}_g \equiv y = \frac{1}{2}$.

(f) $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{-(x+3)^2}{8x^2+2x+5} = \dfrac{-1}{8}$
On a donc une $\text{AH}_d \equiv y = \frac{-1}{8}$ et une $\text{AH}_g \equiv y = \frac{-1}{8}$.

3. (a) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-1}$
   - $Dom_f = \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$
   - AV$\equiv x = 1$, AV$\equiv x = -1$, AH$\equiv y = 0$ et pas d'AO

   (b) $f(x) = \dfrac{x^2-x-6}{x^3+3x^2-4}$
   - $Dom_f = \mathbb{R}\backslash\{-2;1\}$
   - AV$\equiv x = -2$, AV$\equiv x = 1$, AH$\equiv y = 0$ et pas d'AO

   (c) $f(x) = \dfrac{2x^2-3x+1}{x-2}$
   - $Dom_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$
   - AV$\equiv x = 2$, pas d'AH, AO$\equiv y = 2x+1$