

# Diversión con banderas:

# Un camino de entrada a GeoGebra

- ★ José Manuel Arranz San José
- ★ Enrique Hernando Arnaiz
- ★ Rubén Jiménez Jiménez
- ★ Instituto GeoGebra de Castilla y León

Congreso internacional Geogebra. Córdoba 2023

SHELDON COOPER  
presents  
**FUN** WITH FLAGS



# Diversión con banderas:

# Un camino de entrada a GeoGebra

- ★ José Manuel Arranz San José
- ★ Enrique Hernando Arnaiz
- ★ Rubén Jiménez Jiménez
- ★ Instituto GeoGebra de Castilla y León

Congreso internacional Geogebra. Córdoba 2023

I.G. DE CASTILLA  
Y LEÓN

© presents ©

**FUN** WITH FLAGS



## PREVIO:

- ★ Sencillo Taller de introducción/motivación a GeoGebra en secundaria, 1º de bachillerato, ciclos, \*proyecto EsTaMat ...
- ★ Entramos por primera vez al “laboratorio de matemáticas” con una actividad curiosa, de contexto “amable” y usando herramientas sencillas.
- ★ Trabajamos con proporciones, particiones, polígonos, simetrías... (\*VIDEO: “El secreto (y amplio) mundo de los rectángulos\*”)
- ★ Mostramos el uso de las herramientas geométricas básicas...





## EL MUNDO DE LAS BANDERAS:

### ★ Error. Los rectángulos de las banderas no son todos iguales:

“Uno de los errores más habituales con relación al mundo de las banderas es el considerar que se pueden reproducir en un rectángulo común para todas.

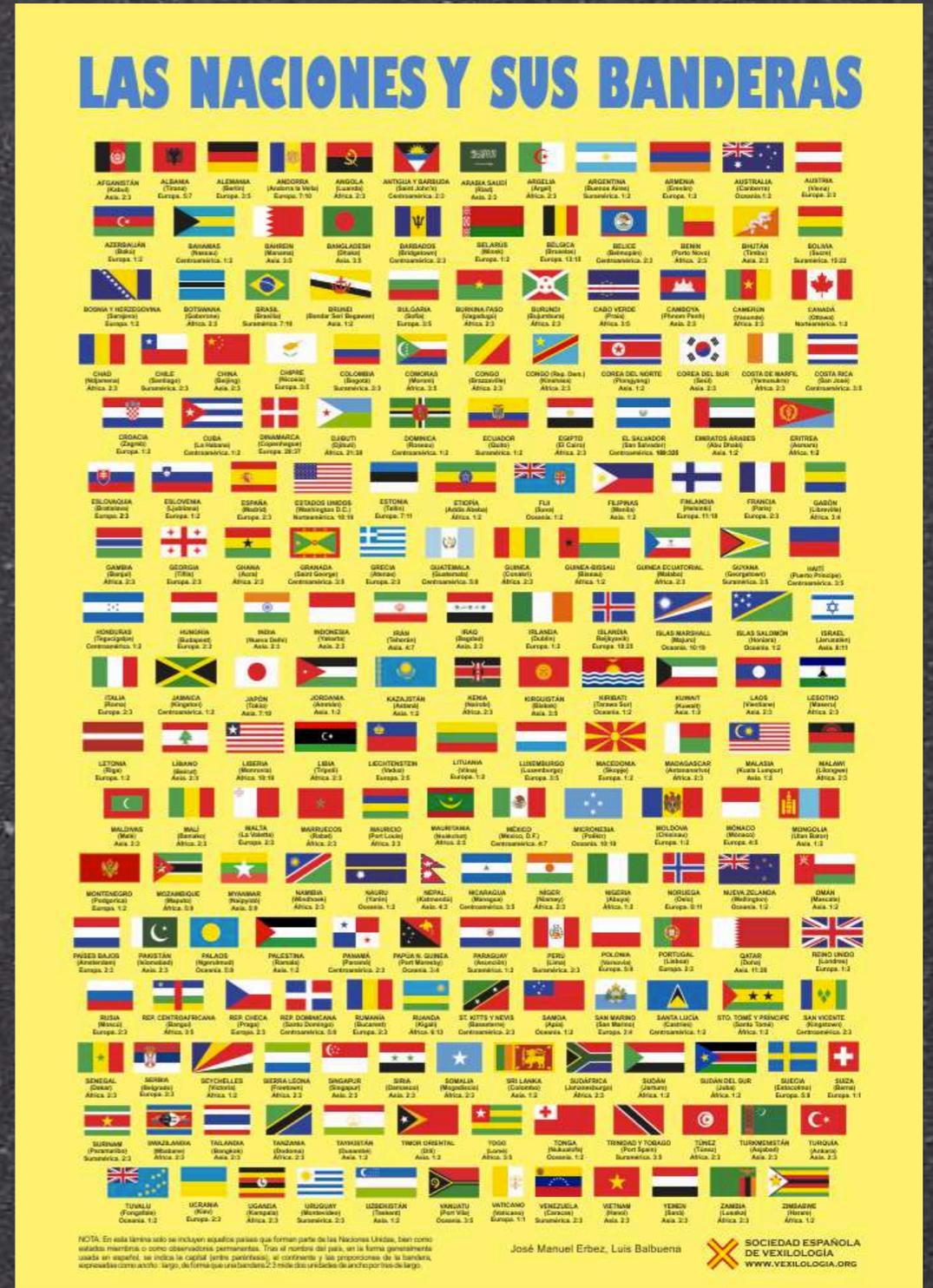
Posiblemente esté inducido porque en ciertas enciclopedias y atlas aparecen así\*.

Pero lo cierto es que hay veintiún modelos diferentes de proporcionalidad en las dimensiones. Si incluimos las cuadradas, las proporciones varían entre la 11:28 de Qatar y la cuadrada 1:1. Entre estas dos, se encuentran las siguientes: 1:2, 10:19, 5:9, 21:38, 4:7, 10:17, 3:5, 11:18, 5:8, 7:11, 2:3, 7:10, 5:7, 18:25, 8:11, 3:4, 28:37, 4:5 y 13:15”

(Luis Balbuena)

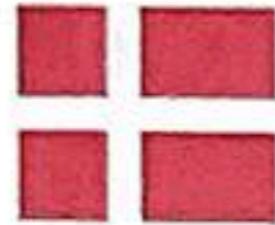
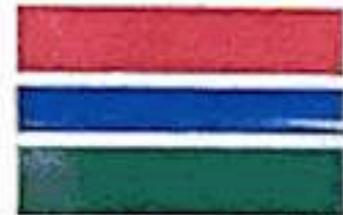
Sdad. Esp. de VEXILOLOGÍA (8 €)

<https://vexilologia.org/poster-de-banderas-del-mundo>



# EL MUNDO DE LAS BANDERAS:



				
CROACIA Europa. 1:2	CUBA Centroamérica. 1:2	DINAMARCA Europa. 28:37	DJIBUTI África. 21:38	DC Centro.
				
ESLOVAQUIA Europa. 2:3	ESLOVENIA Europa. 1:2	ESPAÑA Europa. 2:3	ESTADOS UNIDOS Norteamérica. 10:19	ESTONIA Europa. 7:11
				
GAMBIA África. 2:3	GEORGIA Europa. 2:3	GHANA África. 2:3	GRANADA Centroamérica. 3:5	GRECIA Europa. 2:3

(Luis Balbuena)

Sdad. Esp. de VEXILOLOGÍA (8 €)

<https://vexilologia.org/poster-de-banderas-del-mundo>

									
SURINAM (Paraná) América. 2:3	SWAZILANDIA (Maputo) África. 2:3	TAILANDIA (Bangkok) Asia. 2:3	TANZANIA (Dodoma) África. 2:3	TANZANIA (Dodoma) África. 2:3	TONGA (Nukunono) Oceanía. 1:1	TRINIDAD Y TOBAGO (Port of Spain) Suramérica. 3:3	TUNISIA (Tunis) África. 2:3	TURKMEÑISTÁN (Ashgabat) Asia. 2:3	TURQUÍA (Ankara) Asia. 2:3
									
TUVALU (Fonofua) Oceanía. 1:1	UCRANIA (Kiev) Europa. 2:3	UZBEKISTÁN (Tashkent) Suramérica. 2:3	VANUATU (Port Vila) Oceanía. 3:3	VATICANO (Ciudad del Vaticano) Europa. 1:1	VENEZUELA (Caracas) Suramérica. 2:3	VIEETNAM (Hanoi) Asia. 2:3	YEMEN (Sanaa) Asia. 2:3	ZAMBIA (Lusaka) África. 2:3	ZIMBABWE (Harare) África. 1:2

NOTA: En esta lámina sólo se incluyen aquellos países que forman parte de las Naciones Unidas, bien como estados miembros o como observadores permanentes. Tras el nombre del país, en la forma generalmente usada en español, se indica la capital (entre paréntesis), el continente y las proporciones de la bandera, expresadas como ancho: largo, de forma que una bandera 2:3 mide dos unidades de ancho por tres de largo.

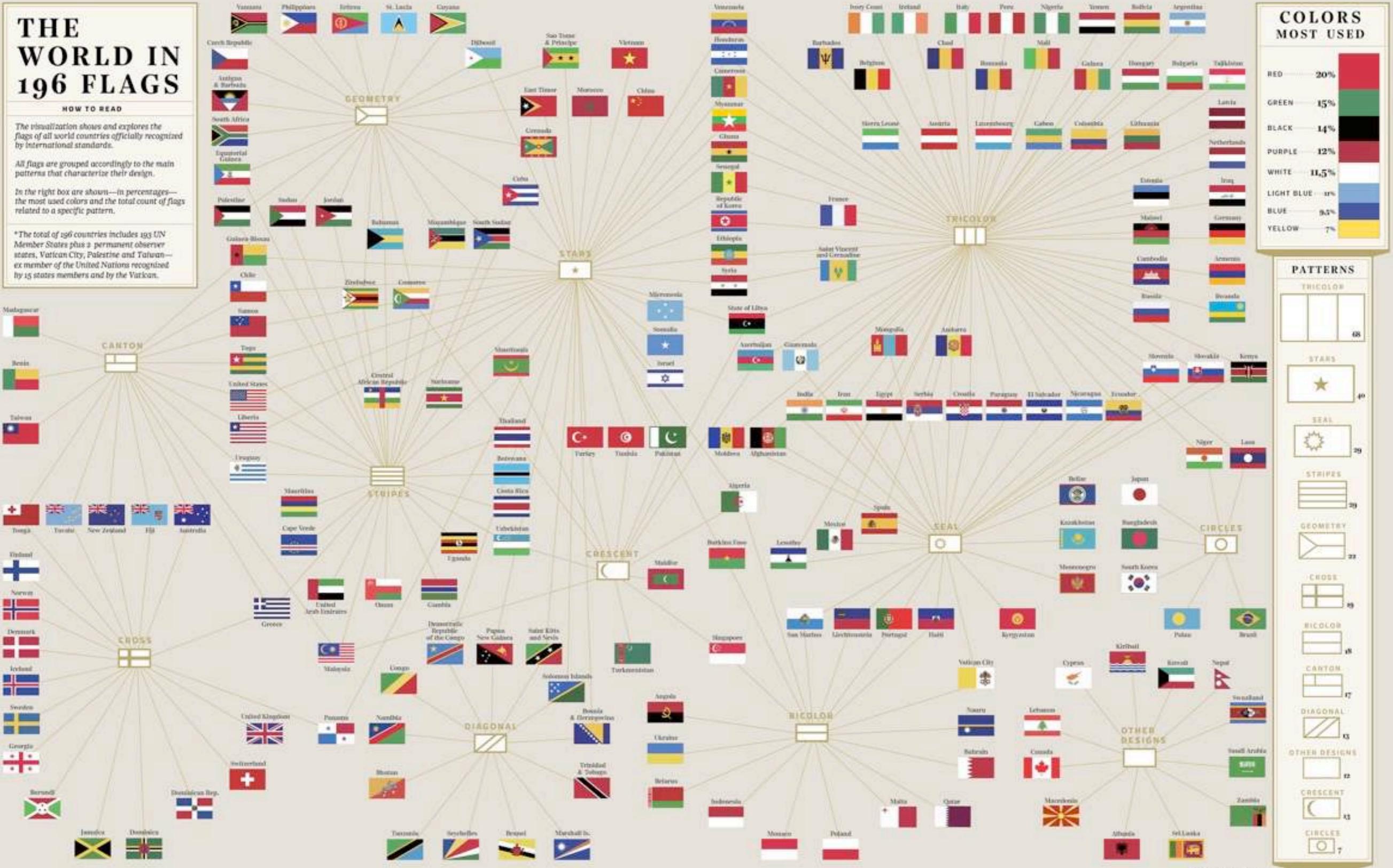
José Manuel Erbez, Luis Balbuena

SOCIEDAD ESPAÑOLA DE VEXILOLOGÍA  
WWW.VEXILOLOGIA.ORG

## SITUACIÓN DE APRENDIZAJE: “AL LÍO”

- ★ Nos ponemos a ello. Banderas: queremos trabajar los distintos conceptos matemáticos involucrados en su diseño y las conexiones entre ellos.
- ★ Producto final 1: cada alumno elegirá una bandera y, con nuestra ayuda, intentará construirla –completamente, es decir sin usar cuadrícula ni otro tipo de guías– con GeoGebra.
- ★ Para ello tendrá que investigar, como decíamos:
  - ★ Proporción altura:base (como se expresa en vexilología... y tiene sentido).
  - ★ Otras características geométricas presentes.
  - ★ Elementos que la componen y relación entre ellos...

# SITUACIÓN DE APRENDIZAJE: "AL LÍO"

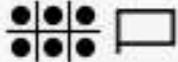


# SITUACIÓN DE APRENDIZAJE: “AL LÍO”

## Bandera de los Estados Unidos



### Datos generales

<b>Uso</b>	
<b>Proporción</b>	10:19
<b>Adopción</b>	14 de junio de 1777 (246 años) (versión original de 13 estrellas) 4 de julio de 1960 (63 años) (versión actual de 50 estrellas)
<b>Colores</b>	 Azul  Blanco  Rojo
<b>Diseño</b>	Trece franjas horizontales alternadas rojas y blancas, en el cantón, 50 estrellas blancas sobre un fondo azul.

# SITUACIÓN DE APRENDIZAJE: “AL LÍO”

## Bandera de los Estados Unidos



### Datos generales

<b>Uso</b>	 
<b>Proporción</b>	10:19
<b>Adopción</b>	14 de junio de 1777 (246 años) (versión original de 13 estrellas) 4 de julio de 1960 (63 años) (versión actual de 50 estrellas)
<b>Colores</b>	 Azul  Blanco  Rojo
<b>Diseño</b>	Trece franjas horizontales alternadas rojas y blancas, en el cantón, 50 estrellas blancas sobre un fondo azul.

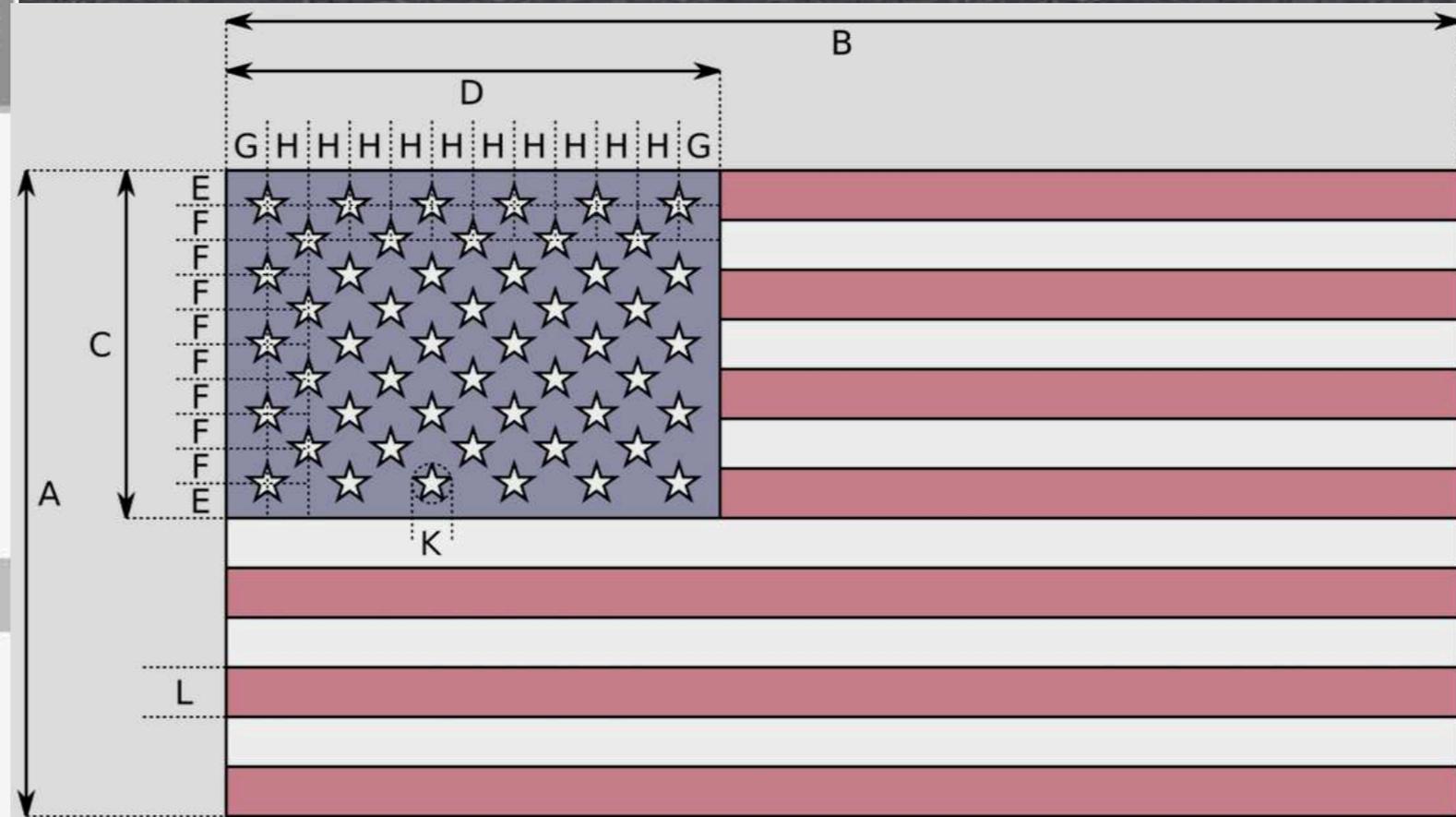
# SITUACIÓN DE APRENDIZAJE: “AL LÍO”

## Bandera de los Estados Unidos



### Datos generales

<b>Uso</b>	 
<b>Proporción</b>	10:19
<b>Adopción</b>	14 de junio de 1777 (246 años) (versión original de 13 estrellas) 4 de julio de 1960 (63 años) (versión actual de 50 estrellas)
<b>Colores</b>	<div style="display: flex; flex-direction: column; gap: 5px;"> <div> Azul</div> <div> Blanco</div> <div> Rojo</div> </div>
<b>Diseño</b>	Trece franjas horizontales alternadas rojas y blancas, en el cantón, 50 estrellas blancas sobre un fondo azul.



- A = altura (1.0)
- B = anchura (1.9)
- C = alto del cantón ( $0.5385 = A \cdot 7/13$ )
- D = ancho del cantón ( $0.76 = B \cdot 2/5$ )
- E = F = espaciado entre líneas de estrellas ( $0.0538 = C/10$ )
- G = H = espaciado entre columnas de estrellas ( $0.0633 = D/12$ )
- K = diámetro de la estrella ( $0.0616 = L \cdot 4/5$ )
- L = ancho de las franjas ( $0.0769 = A/13$ )

## SITUACIÓN DE APRENDIZAJE: “AL LÍO”

A similar diagram of the [flag of the United States](#) was given in [Executive Order 10834](#), by Dwight D. Eisenhower, on August 21, 1959. It appears in the United States Code, title 4, chapter 1 [1]. The code specifies the lengths as See "Flag of the United States" article for details. The exact values are given in parenthesis, see graphics above, for the modern US flag with 50 stars. Older flags do not get adjusted for any reason.  $A = 1.000 = (1/1)$   $B = 1.910 = (B/A = 1.910 \text{ fixed})$   $C = 0.53846 = (7/13)$   $D = 0.7615 = (C \cdot \sqrt{2}) = 7 \cdot \sqrt{2}/13$   $E = F = 0.053846 = (C/10 = 7/130)$   $G = H = 0.06346 = (D/12 = 7 \cdot \sqrt{2}/(12 \cdot 13))$   $K = 0.061803 = (\text{inv}(5x(\sqrt{5})+1))$   $L = 0.07692 = (1/13)$  How is this obtained or calculated? See below:  $L \cdot A = 1$   $A = 13L$   $L = 1/13 = 0.076923\dots$   $C = 7L = 7/13 = 0.5384615\dots$   $D = 0.76$  (From "Flag of the United States" wiki article:  $B \times 2/5$  which is correct only for this AR of the flag, in fact,  $D/C$  looks to be about  $\sqrt{2}$  and if so, then  $D = 7x\sqrt{2}/13 = 0.7614996\dots$  ) Given:  $E = F$ , then  $E = F = C/10 = 7/130 = 0.05384615\dots$  Given:  $G = H$ , then  $G = H = D/12 = 7x\sqrt{2}/156 = 0.0634583\dots$   $K = 0.0616$  (From "Flag of the United States" wiki article:  $L \times 4/5 = 4/65 = 0.06153846\dots$  which contradicts what was given. The correct value for  $K$  is  $\text{inv}(5x(\sqrt{5})+1) = 0.061803398874\dots$  if we work this number backward we will get  $K = L \times 4.017220926874\dots/5$ ) and somebody rounded it off or over simplified it, there is where the confusion came from. The aspect ratio,  $B/A$ , is independent of all other parameters and is stated as 1.9, but its rounded off from 1.91 (see the main "Flag of the United States" text for the 0.01 rounding error.)  $B = 1.910$  Just in case you wanted to make your own flag and all these numbers look too complicated, Here is something simple: US Letter paper size is 8.5x11. Fold 1/2 inch to get 10.5 inches. Thats your "B" and you can get one flag out of a paper:  $A = 5.5$  inch (this is your height of the flag)  $B = 10.5$  inch  $L = 27/64$  inch (height of each stripe)  $C = 2 \frac{15}{16}$  inches or 7 stripes  $D = 4 \frac{3}{16}$  inch  $E = F = 19/64$  inch  $G = H = 11/32$  inch  $K = 11/32$  inch Alternatively, fold 1/2 inch on the other side so you get 8 inches on one side. Thats your "B," and you can get two flags out of a paper:  $A = 4 \frac{3}{16}$  inch (this is your height of the flag)  $B = 8.0$  inch  $L = 5/16$  inch (height of each stripe)  $C = 2 \frac{1}{4}$  inches or 7 stripes  $D = 3 \frac{3}{16}$  inch  $E = F = 7/32$  inch  $G = H = 1/4$  inch  $K = 1/4$  inch

 Rojo

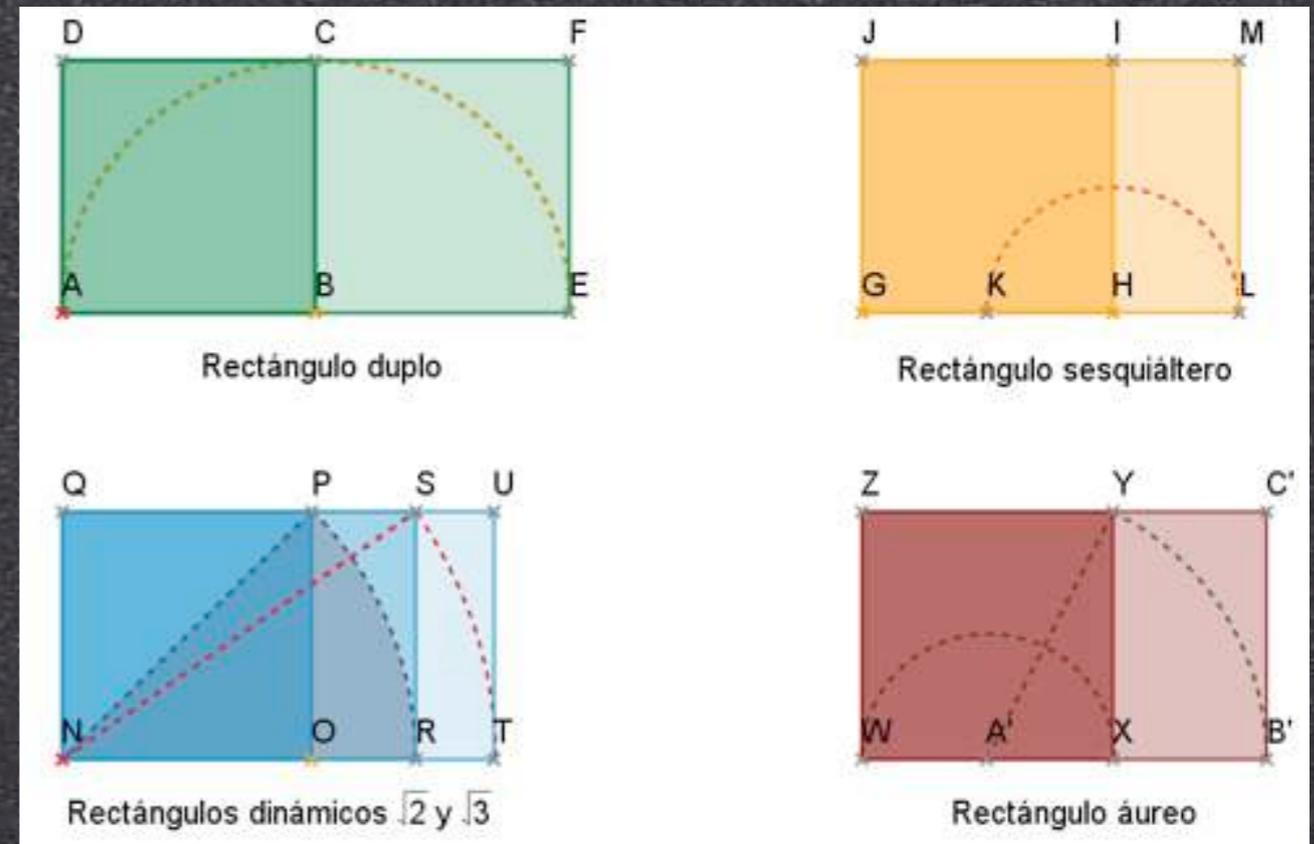
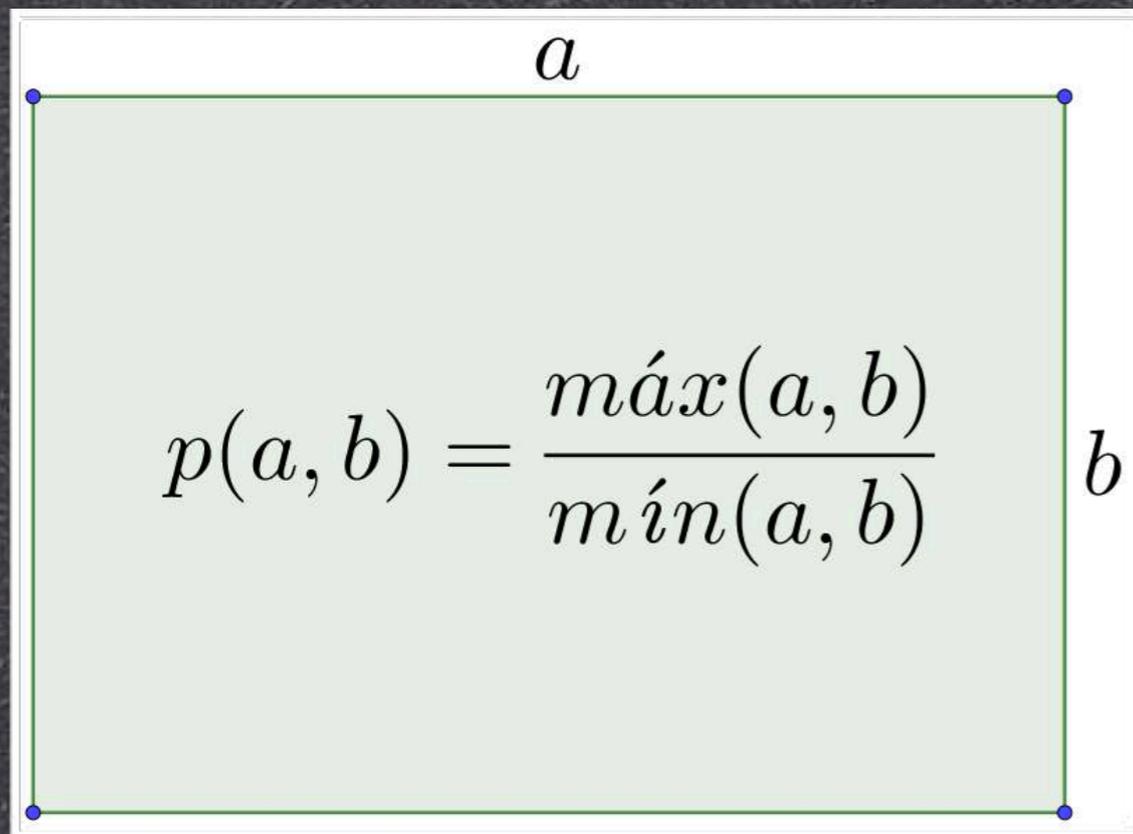
### Diseño

Trece franjas horizontales alternadas rojas y blancas, en el cantón, 50 estrellas blancas sobre un fondo azul.

- $E = F =$  espaciado entre líneas de estrellas ( $0.0538 = C/10$ )
- $G = H =$  espaciado entre columnas de estrellas ( $0.0633 = D/12$ )
- $K =$  diámetro de la estrella ( $0.0616 = L \cdot 4/5$ )
- $L =$  ancho de las franjas ( $0.0769 = A/13$ )

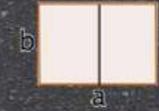
# ALTO Y ANCHO: PROPORCIÓN

- ★ Un poco de historia: [los griegos y las proporciones... GG](#)
- ★ [Ejercicio GG](#): Averigua, como los griegos, la proporción de este rectángulo
- ★ Tantos rectángulos como quieras... ¿cómo se construyen?
- ★ Prop. estáticas (rationales): como el rectángulo “duplo” (1:2) o el “sesquiáltero” (2:3)
- ★ Dinámicas (irrationales): como el  $\sqrt{2}$  (DIN A#), el  $\sqrt{3}$ , el áureo...
- ★ A partir del cuadrado y sin cuadrícula: ¿el 3:5? ¿el  $\sqrt{5}$ ?...



# ALTO Y ANCHO: PROPORCIÓN (ampliación)

Los "folios" y cuartillas: DIN A4, DIN A3, ..., Din A0 (1 m<sup>2</sup>)

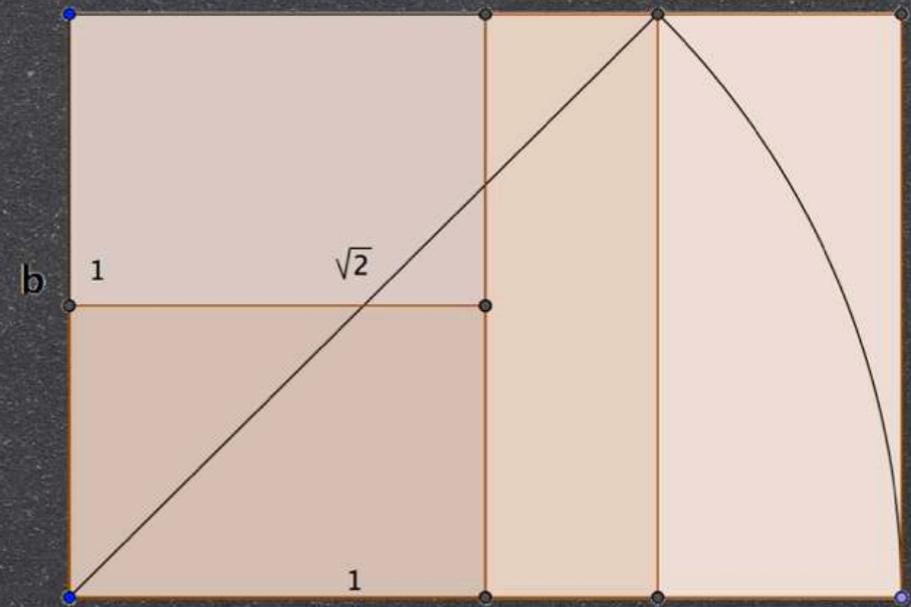


$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a/2} \rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

La "emboscada pitagórica"

=> hacer logo pitagóricos "pentalfa"  
y ver que irracional y áureo

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \Phi = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$$



=> ¿Cuál es la proporción del rectángulo que queda si quito un cuadrado máximo?

Rectángulo áureo:

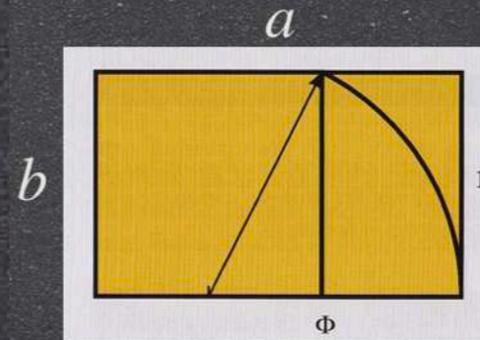
$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

$$a = x; b = 1$$

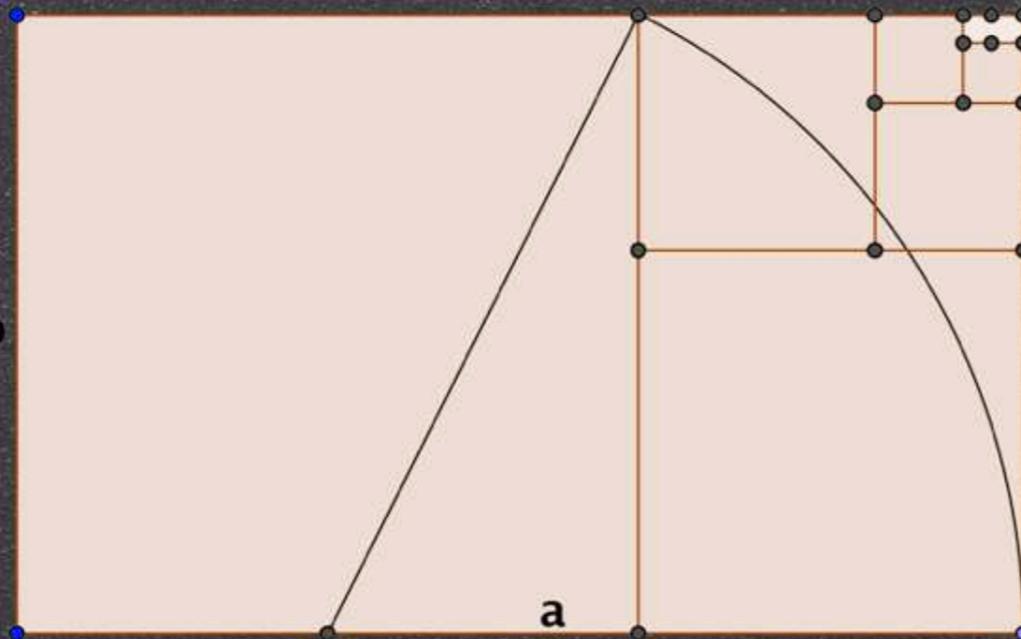
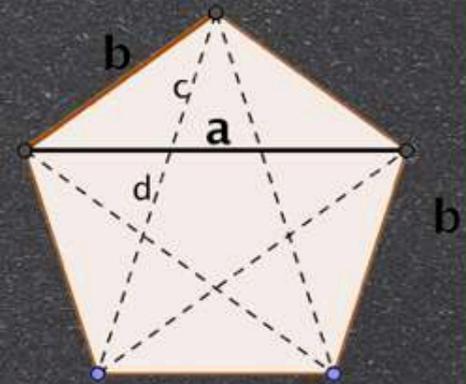
$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{b}$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi = 1.618...$$

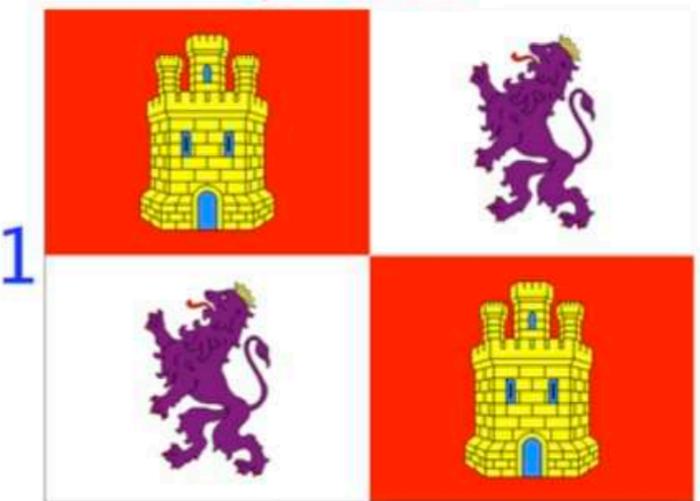
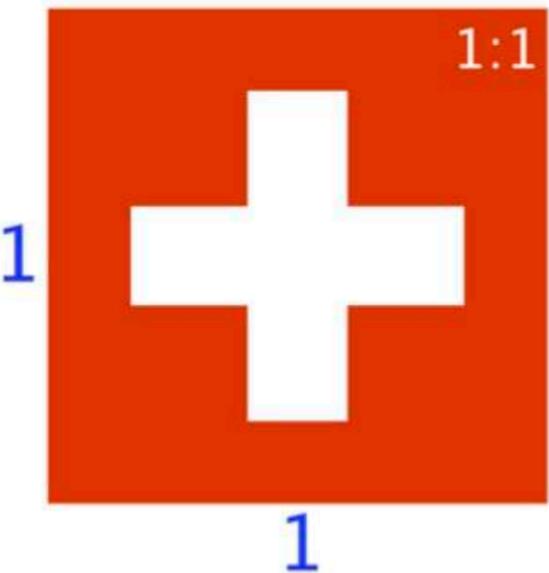


PENTALFA

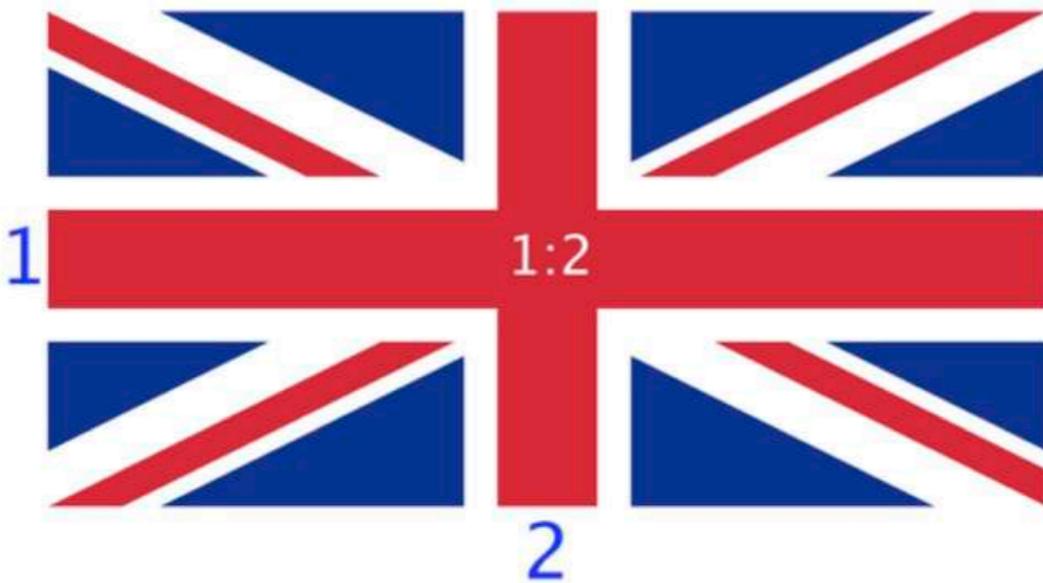


# Y... ¿EN LAS BANDERAS?

**¡ DIVERSIÓN  
CON  
BANDERAS!**

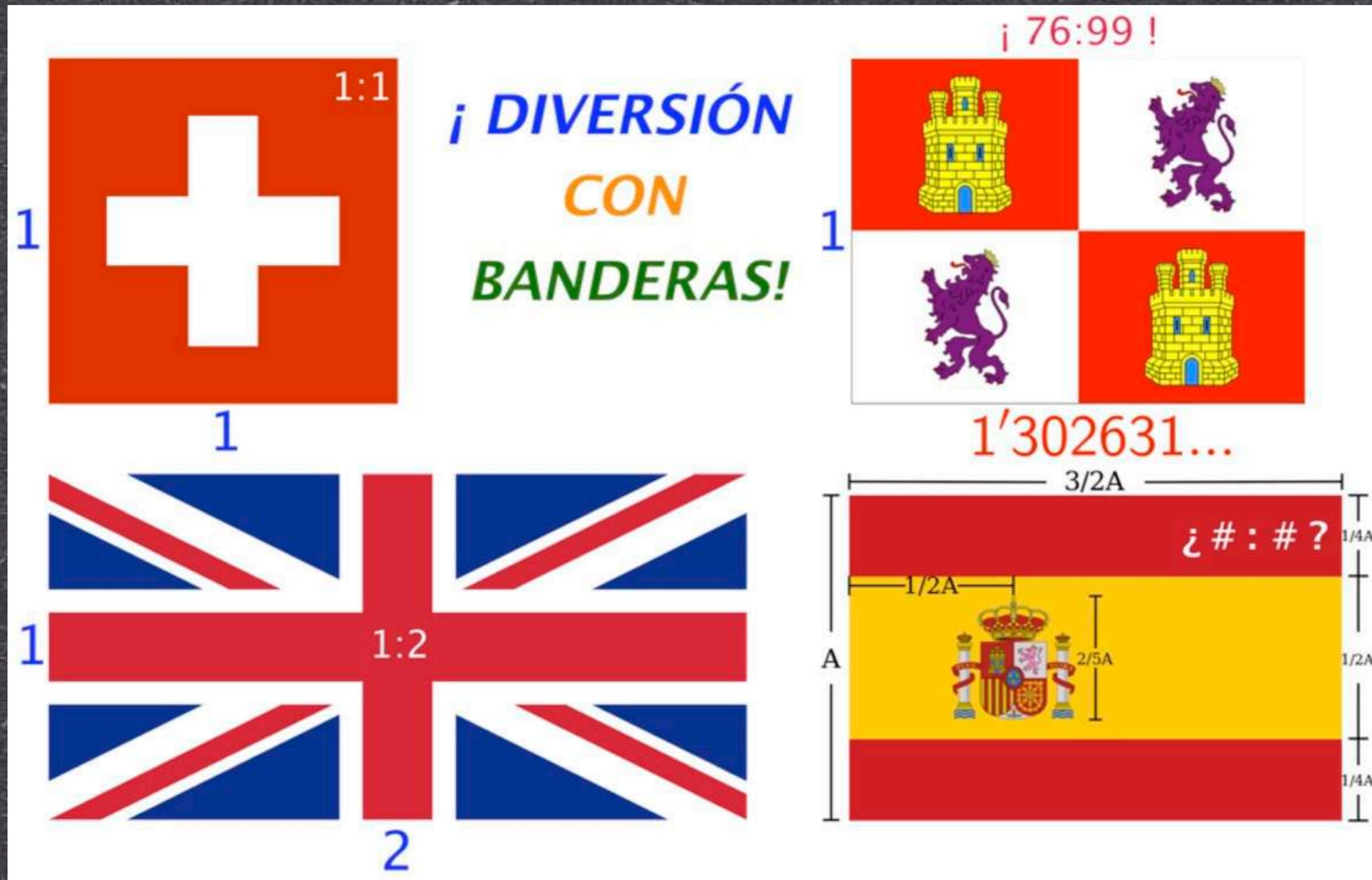


**¡ 76:99 !**



**¿ # : # ?**

# Y... ¿EN LAS BANDERAS?



**¡ DIVERSIÓN  
CON  
BANDERAS!**

¡ 76:99 !

1'302631...

¿#:#?

- ★ ¿¿Cómo narices se hace el 76:99 desde cuadrado?? (¿Dividir por Tales? ¿Ponderar puntos?)
- ★ ¿Y cuál es la proporción en la bandera de España?

# Y... ¿EN LAS BANDERAS?



- ★ ¿¿Cómo narices se hace el 76:99 desde cuadrado?? (¿Dividir por Tales? ¿Ponderar puntos?)
- ★ ¿Y cuál es la proporción en la bandera de España?

Y... ¿E... S?




**Bandera de España**  
Versión Institucional

**Territorio** España

**Proporción** 2:3

**Adopción** 28 de mayo de 1785 (238 años)  
(como pabellón naval)  
13 de octubre de 1843  
(adopción por el Ejército)  
5 de octubre de 1843  
(42 años)  
(última modificación de 1981)

**Colores**

**Diseño**

Tres franjas horizontales, roja, amarilla y roja, siendo la amarilla de doble anchura que cada una de las rojas. El escudo tendrá una altura de dos quintos de la anchura de la bandera y figurará en ambas caras de esta en el centro de la franja amarilla. El eje del escudo se colocará a una distancia de la vaina de media anchura de la bandera

1/4A  
1/2A

A

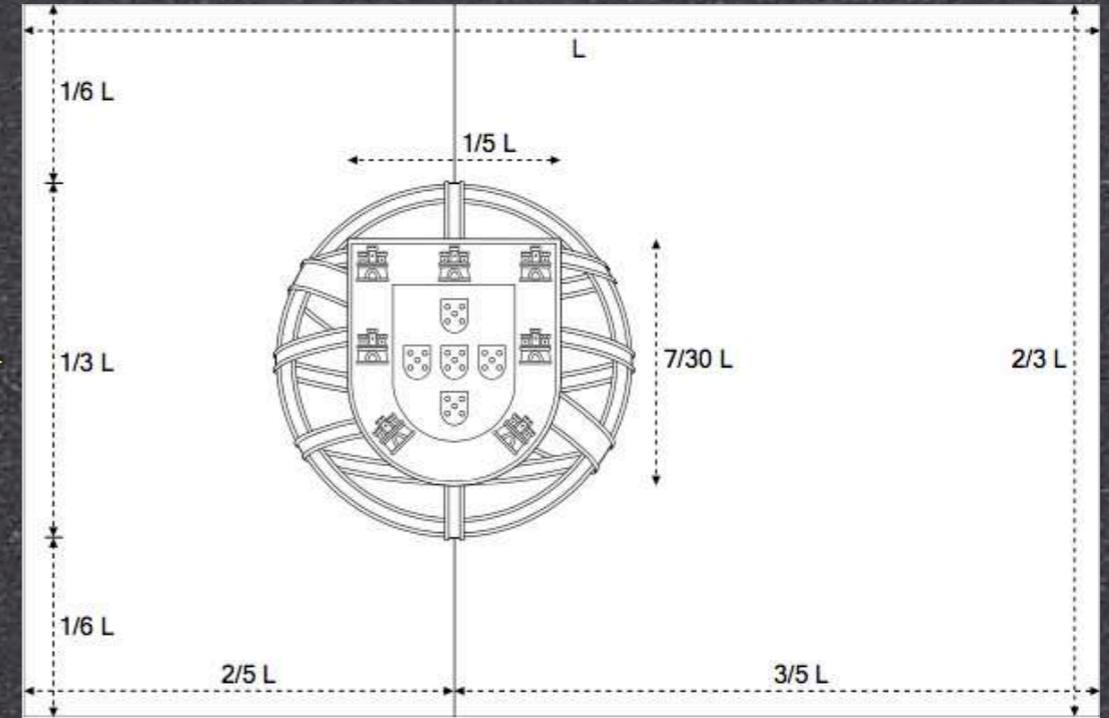
★ ¿¿Cómo narices se hace el 76:99 desca

★ ¿Y cuál es la proporción en la bandera de

¿Ponderar puntos?)

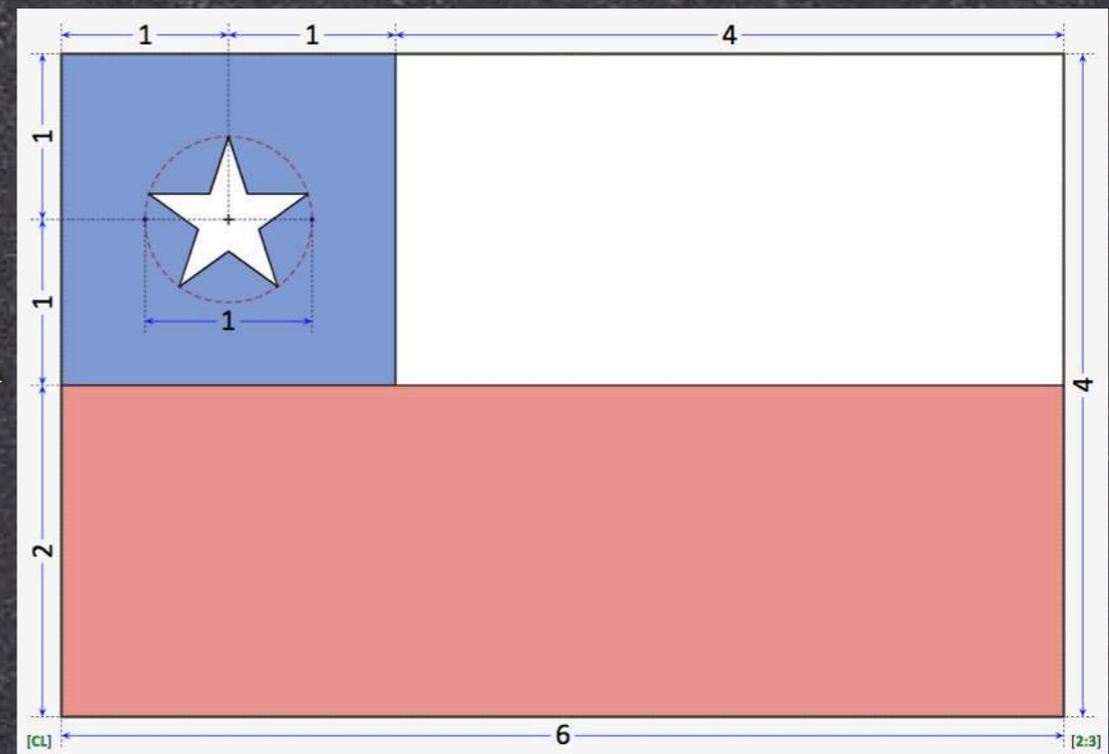
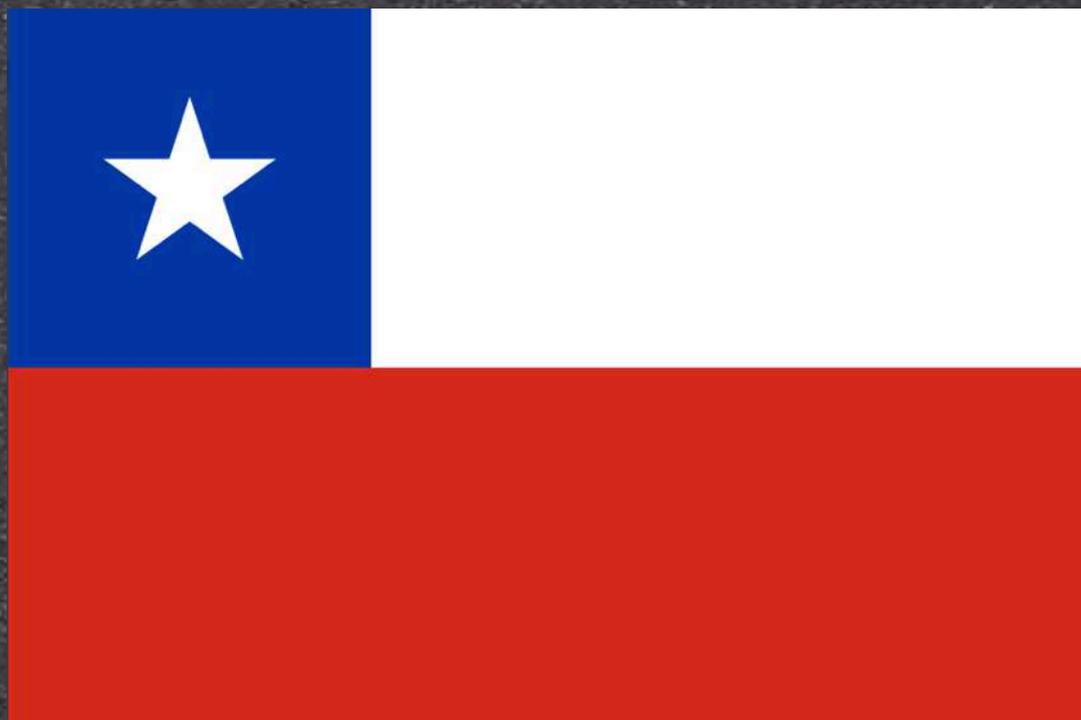
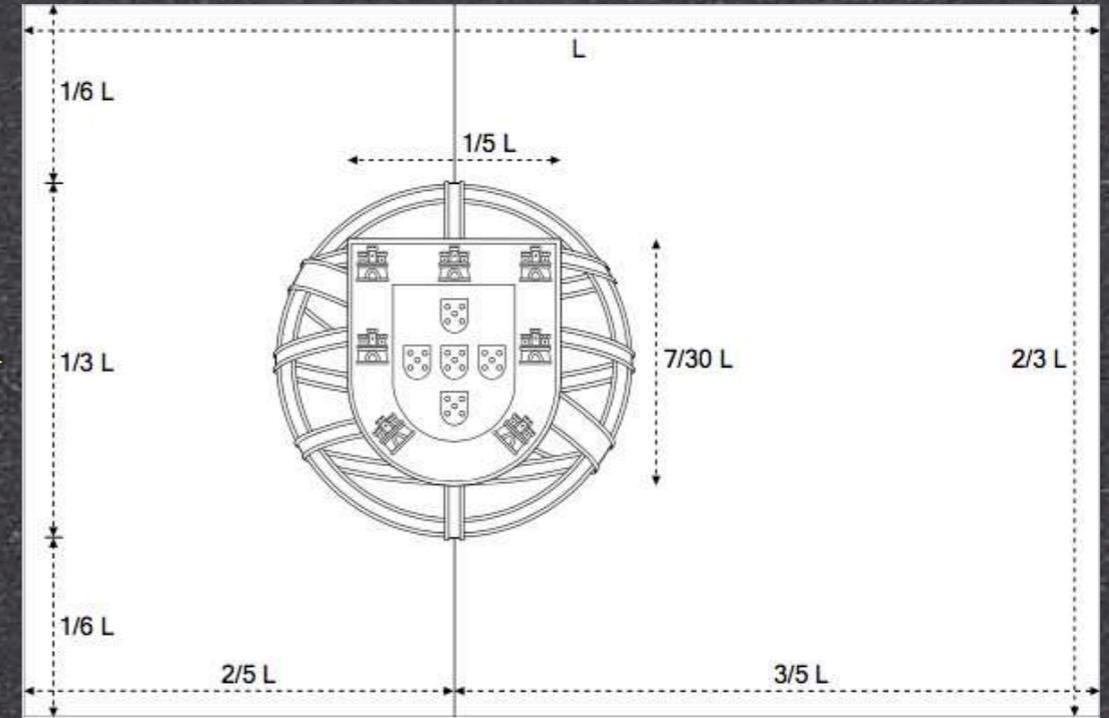
# Y... ¿EN LAS BANDERAS?

- ★ Mirad qué cosas más bonitas para trabajar... ( wikipedia: “bandera de...” )



# Y... ¿EN LAS BANDERAS?

★ Mirad qué cosas más bonitas para trabajar... ( wikipedia: “bandera de...” )





## (Y, SEGÚN EL TIEMPO DISPONIBLE...)

Luis Balbuena, por ejemplo, propone:

- ★ Describir y averiguar a qué país pertenecen las banderas que se van viendo en el entorno en el que cada cual se mueve (hoteles, restaurantes, instituciones, etc.)
- ★ Hacer un estudio estadístico de la distribución de los colores en en las banderas del mundo y en sus distintas partes.
- ★ Estudiar las simetrías que presentan las banderas (y hacer estadística).
- ★ Observar que hay grupos de banderas que tienen los mismos colores. Estudiar si hay alguna razón para ello.
- ★ Los alumnos matriculados en el centro donde estudias, ¿a cuántas nacionalidades distintas pertenecen? Hacer las banderas de esos países de alguna forma (GG, pintirlas en papel, en telas, en collage sobre cartulinas, etc.), con sus correspondientes dimensiones y exponerlas en el centro.

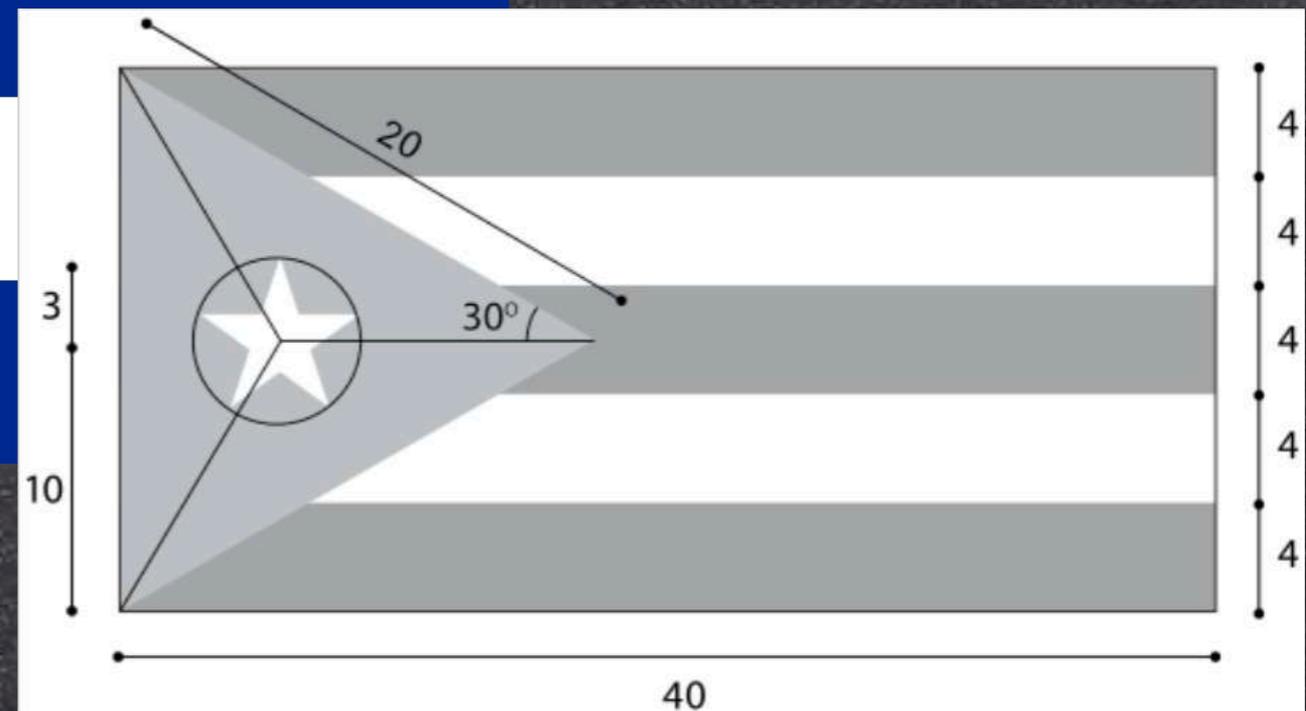
# HABRÁ QUE CONSTRUIR ALGUNA (VS. DIBUJARLA ;-)

- ★ El final de esta historia. Construir en modo “Geometría” sin cuadrícula y cumpliendo todas las especificaciones la(s) bandera(s) que hayan investigado (no demasiado sencilla... ¿Japón?...)
- ★ Según el tiempo, nos gusta inicialmente proponer/obligar a construir la de Cuba:



# HABRÁ QUE CONSTRUIR ALGUNA (VS. DIBUJARLA ;-)

- ★ El final de esta historia. Construir en modo “Geometría” sin cuadrícula y cumpliendo todas las especificaciones la(s) bandera(s) que hayan investigado (no demasiado sencilla... ¿Japón?...)
- ★ Según el tiempo, nos gusta inicialmente proponer/obligar a construir la de Cuba:



# HABRÁ QUE CONSTRUIR ALGUNA (VS. DIBUJARLA ;-)

- ★ Pensábamos que este era el final de la historia, que todas las banderas tienen proporciones estáticas (rationales)... ¡pero no! ¡Tenemos otro reto constructivo!
- ★ Aunque en el póster de Luis Balbuena en la S. de vexilología (2008) pone que la proporción de la bandera de Togo es 3:5, si nos fiamos de la wiki, desde 1960...

**Bandera de Togo**



**Datos generales**

<b>Proporción</b>	1:φ (1:1,618)
<b>Adopción</b>	27 de abril de 1960
<b>Colores</b>	 Verde  Amarillo  Rojo  Blanco
<b>Diseñador</b>	Paul Ahyi

## HABRÁ QUE CONSTRUIR ALGUNA (VS. DIBUJARLA ;-)

- ★ Pensábamos que este era el final de la historia, que todas las banderas tienen proporciones estáticas (rationales)... ¡pero no! ¡Tenemos otro reto constructivo!
- ★ Aunque en el póster de Luis Balbuena en la S. de vexilología (2008) pone que la proporción de la bandera de Togo es 3:5, si nos fiamos de la wiki, desde 1960...

### Bandera de Togo



Datos generales	
Proporción	1:φ (1:1,618)
Adopción	27 de abril de 1960
Colores	<ul style="list-style-type: none"><li>Verde</li><li>Amarillo</li><li>Rojo</li><li>Blanco</li></ul>
Diseñador	Paul Ahyi

### RAZÓN ÁUREA EN LA BANDERA DE TOGO

@geographics2.0



BANDERA TOGOLESA

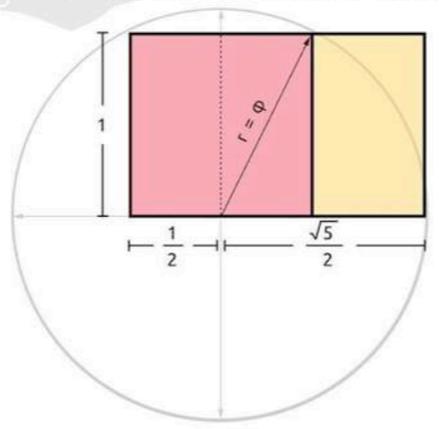
se dice que dos cantidades  $a$  y  $b$  tienen una razón áurea ( $1:\phi$ ) si

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \phi \quad \therefore 1 + \frac{1}{\phi} = \phi$$

RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN:

$$\phi + 1 = \phi^2$$
$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$
$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA:





## EN FIN...

Hasta aquí, brevemente, lo que queríamos contar, pero puede haber más, claro:

- ★ ¡Que diseñen su propia bandera e, importante, expliquen el por qué de la proporción y de los colores elegidos, de los elementos que pongan, de las simetrías presentes...!
- ★ Hacer un concurso de diseño de banderas para el centro, el barrio...
- ★ Pueden lanzarse retos “vexilológicos”
- ★ Libro GG Diversión con Banderas: <https://www.geogebra.org/m/kam9gzks>
- ★ Recordamos, el objetivo era motivar y fundamentar el uso de GeoGebra...

# ¿Conseguido? (Continuará...)



“No hay belleza perfecta que no tenga alguna rareza en sus proporciones.”

Sir Francis Bacon