

Teoremă. Dacă, într-un tetraedru, baza este triunghi ascuțitunghic, proiecția vârfului pe planul bazei este în ortocentrul bazei și una dintre fețele laterale este triunghi dreptunghic în vârful tetraedrului, atunci și celelalte fețe laterale sunt triunghiuri dreptunghice în vârful tetraedrului

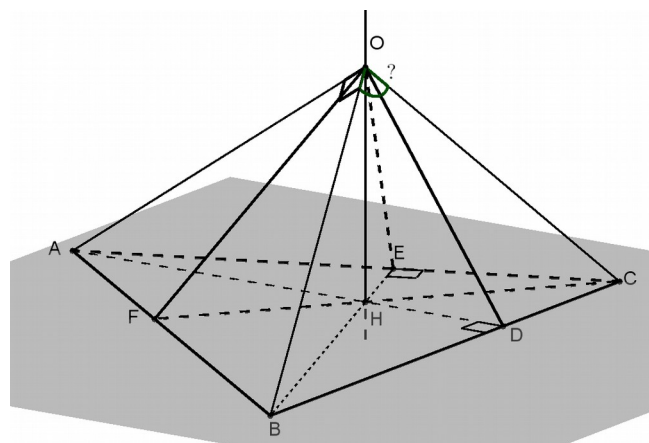


Figura 1

În figura 1, ABC este triunghi ascuțitunghic, avându-l pe H drept ortocentru, OH este perpendiculară pe planul (ABC) și măsura unghiului AOB este de 90° .

În $\triangle AOB$:

$$OA \perp OB \implies OA^2 + OB^2 = AB^2 \quad (1);$$

$$OF \perp AB, F \in AB \implies OF^2 = OA^2 - AF^2 = OB^2 - BF^2 \iff$$

$$OA^2 - OB^2 = AF^2 - BF^2 \quad (2).$$

Din (1) și (2) se obțin

$$2OA^2 = AB^2 + AF^2 - BF^2 \quad (3) \text{ și } 2OB^2 = AB^2 - AF^2 + BF^2 \quad (4).$$

În $\triangle AOC$:

$$OE \perp AC, E \in AC \implies OE^2 = OA^2 - AE^2 = OC^2 - CE^2 \implies$$

$$OA^2 = OC^2 + AE^2 - CE^2 \quad (5) \iff 2OA^2 = 2OC^2 + 2AE^2 - 2CE^2 \quad (5').$$

$$\text{Din (3) și (5')} \implies 2OC^2 + 2AE^2 - 2CE^2 = AB^2 + AF^2 - BF^2 \implies$$

$$2OC^2 = AB^2 + AF^2 - BF^2 - 2AE^2 + 2CE^2 \quad (6).$$

Din (4) și (6) se obține

$$OB^2 + OC^2 = AB^2 + CE^2 - AE^2 \quad (7).$$

În $\triangle ABC$:

$$BE \perp AC, E \in AC \implies BE^2 = AB^2 - AE^2 = BC^2 - CE^2 \implies$$

$$BC^2 = AB^2 + CE^2 - AE^2 \quad (8).$$

Din (7) și (8) se obține

$$OB^2 + OC^2 = BC^2 \quad (9).$$

Deci, conform reciprocei teoremei lui Pitagora, $\triangle BOC$ este dreptunghic în O.

Analog, se demonstrează că $\triangle AOC$ este dreptunghic în O.(q.e.d.)

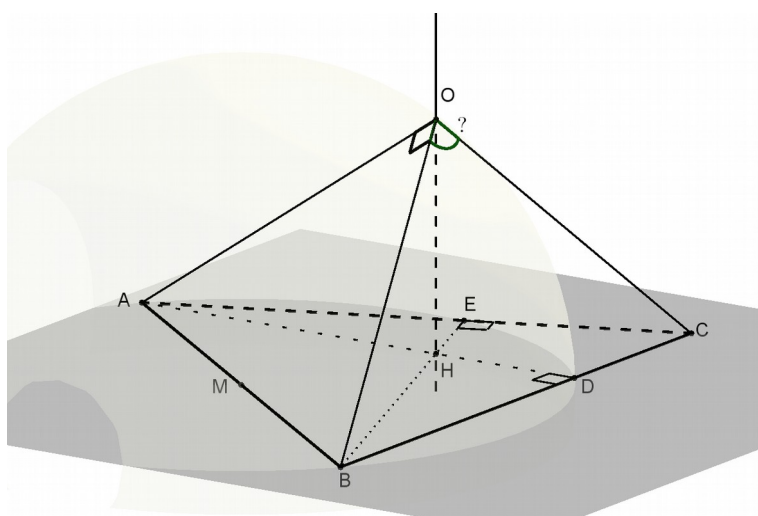


Figura 2

Observație Figura 2 indică modul în care se poate construi, cu ajutorul software-ului [GeoGebra](https://www.geogebra.org/m), tetraedrul tridreptunghic căruia i se cunoaște fața ce se opune triedrului drept ($\triangle ABC$).

1. Se determină ortocentrul bazei, H.
2. Se ridică perpendiculara, în H, pe planul bazei, (ABC).
3. Se construiește sfera ce are drept un diametru [AB].
4. Se determină intersecția dintre perpendiculara pe planul bazei, (ABC), în ortocentrul său, H, și sfera ce are drept un diametru [AB], O.
5. Se construiește piramida de bază $\triangle ABC$ și vârf O.

Conform teoremei precedente, piramida OABC este un tetraedru tridreptunghic.