Problemas – Tema 2

CCSS Problemas resueltos - 11a - cálculo de área con integrales definidas

1. Calcula:

a) La integral definida $\int_0^4 (x^2-3x)\,dx$ **.**

b) El área encerrada por la función $f(x)=x^2-3x$ **, el eje** OX **y las rectas verticales** $x=0$ **,** $x=4$ **.**

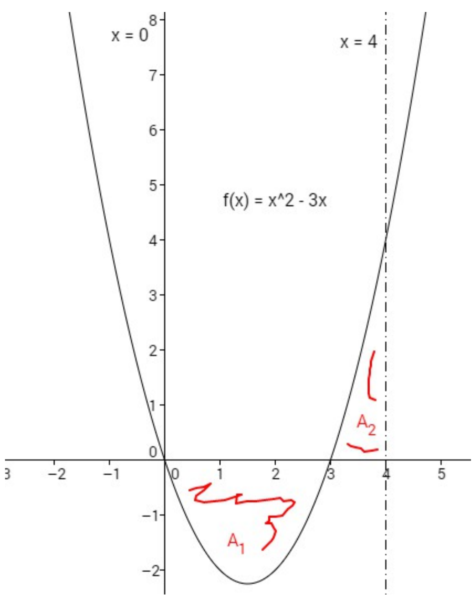
a) $\int_0^4 (x^2-3x)\,dx=[F(x)]_0^4=F(4)-F(0)$

$$\int_0^4 (x^2-3x)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}\right]_0^4=\frac{64}{3}-3\cdot\frac{16}{2}-(0)=\frac{64}{3}-24=\frac{-8}{3}$$

La integral definida es negativa. No confundir con el valor de un área, que siempre resulta positiva.

b) La función $f(x)=x^2-3x$ corta al eje OX en el intervalo $[0,4]$. Por lo tanto, el área encerrada no es igual a la integral definida en el apartado anterior.

Debemos esbozar su gráfica para comprender el área total.



El punto de corte con el eje de abscisas se produce en $(3,0)$. Por lo tanto, siguiendo la notación de la gráfica:

$$A=A_1+A_2 \quad \rightarrow \quad A_1=-\int_0^3 (x^2-3x)\,dx \quad , \quad A_2=\int_3^4 (x^2-3x)\,dx$$

$$A_1=-\int_0^3 (x^2-3x)\,dx=-[\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}]_0^3=-[\frac{27}{3}-\frac{27}{2}-(0)]=-[\frac{27}{3}-\frac{27}{2}]=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$$

$$A_2=\int_3^4 (x^2-3x)\,dx=[\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}]_3^4=[\frac{64}{3}-\frac{48}{2}-(\frac{27}{3}-\frac{27}{2})]=\frac{64}{3}-24+\frac{27}{6}=\frac{11}{6}$$

Por lo tanto → $A=A_1+A_2=\frac{9}{2}+\frac{11}{6}=\frac{19}{3}\quad u^2$

2. Calcula:

a) La integral definida $\int_0^{2\pi} sen(x)dx$ **.**

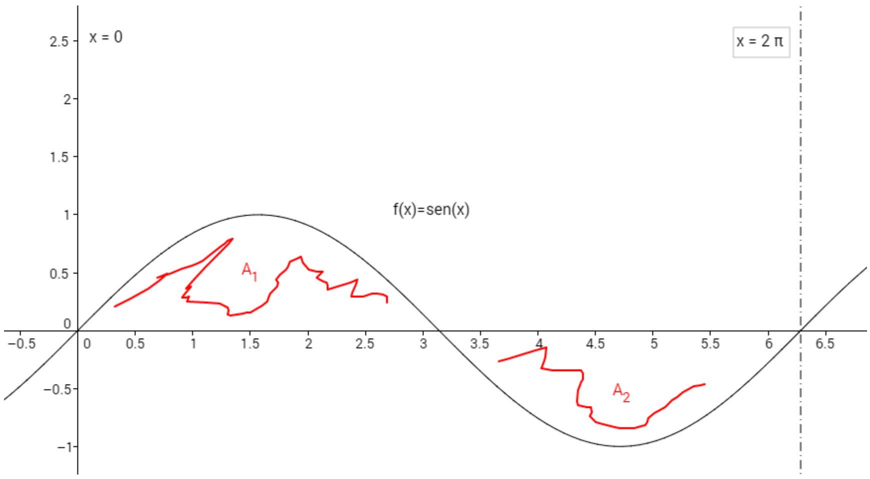
b) El área encerrada por la función $f(x)=sen(x)$ **, el eje** OX **y las rectas verticales** $x=0$ **,** $x=2\pi$ **.**

a) $\int_0^{2\pi} sen(x)dx=[F(x)]_0^{2\pi}=F(2\pi)-F(0)$

$$\int_0^{2\pi} sen(x)dx=[-\cos(x)]_0^{2\pi}=-\cos(2\pi)+\cos(0)=-1+1=0$$

b) La función $f(x)=sen(x)$ corta al eje OX en el intervalo $[0,2\pi]$. Por lo tanto, el área encerrada no es igual a la integral definida en el apartado anterior.

Debemos esbozar su gráfica para comprender el área total.



El punto de corte con el eje de abscisas se produce en $(\pi,0)$. Por lo tanto, siguiendo la notación de la gráfica:

$A=A_1+A_2$ → Las áreas A_1 y A_2 son iguales → $A_1=A_2$ → $A=2\cdot A_1$

$$A_1=\int_0^{\pi} sen(x)dx=[-\cos(x)]_0^{\pi}=-\cos(\pi)+\cos(0)=1+1=2 \quad \rightarrow \quad A=4 \ \ u^2$$

3. Calcula el área encerrada por la función $f(x)=-x^2-3$, el eje OX y las rectas verticales $x=0$ y $x=4$.

En el intervalo $[0,4]$ la función $f(x)=-x^2-3$ es $f(x)\leq 0$. Por lo tanto el área que nos solicitan coincide con el valor absoluto de la siguiente integral definida:

$$A=\left|\int_0^4 (-x^2-3)\,dx\right|=\left|\left[\frac{-x^3}{3}-3\mathrm{x}\right]_0^4\right|=\left|\frac{-64}{3}-12-0\right|=\frac{100}{3}\ u^2$$

4. Sean las funciones $f(x)=x^2-2x$ **y** $g(x)=-x^2+4x$ **.**

a) Representa las gráficas de ambas funciones, sobre los mismos ejes.

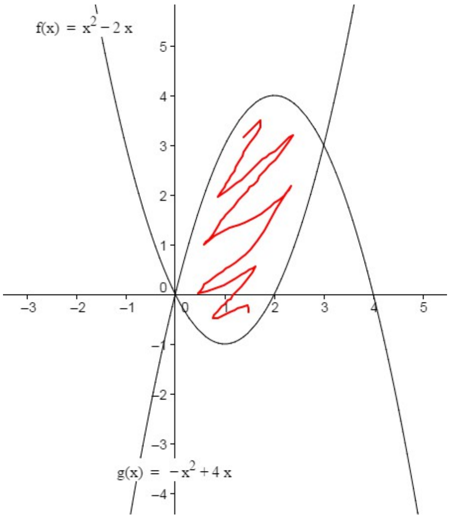
b) Calcula el área total del recinto limitado por ambas gráficas.

a) El mínimo relativo de $f(x)=x^2-2x$ podemos obtenerlos derivando e igualando a 0. Es decir: $f'(x)=2\mathrm{x}-2$, $f'(x)=0 \rightarrow 2\mathrm{x}-2=0 \rightarrow x=1 \rightarrow \textit{Vértice}(1,-1)$.

Los puntos de corte con el eje OX podemos obtenerlo igualando a 0 la función. Es decir: $f(x)=x^2-2x$, $f(x)=0 \rightarrow x^2-2x=0 \rightarrow \textit{Corte eje OX en } (0,0) \textit{ y } (2,0)$.

El mínimo relativo de $g(x)=-x^2+4x$ podemos obtenerlos derivando e igualando a 0. Es decir: $g'(x)=-2\mathrm{x}+4$, $g'(x)=0 \rightarrow -2\mathrm{x}+4=0 \rightarrow x=2 \rightarrow \textit{Vértice}(2,4)$.
Los puntos de corte con el eje OX podemos obtenerlo igualando a 0 la función. Es decir: $g(x)=-x^2+4x$, $g(x)=0 \rightarrow -x^2+4x=0 \rightarrow \textit{Corte eje OX en } (0,0) \textit{ y } (4,0)$.

Con estos puntos tenemos información suficiente para pintar las gráficas (lo hago con Geogebra).



b) Obtenemos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$f(x)=g(x) \rightarrow x^2-2x=-x^2+4x \rightarrow 2x^2-6x=0 \rightarrow x(2x-6)=0$$

Encontramos dos puntos de corte: $x=0$, $x=3$.

De la representación del apartado ***a)*** comprobamos que la gráfica de $g(x)$ permanece por encima de la gráfica de $f(x)$ en el intervalo $[0,3]$. Por lo tanto el área encerrada resulta:

$$A=\int_0^3 (g(x)-f(x))\,dx=\int_0^3 (-x^2+4x-x^2+2x)\,dx=\int_0^3 (-2x^2+6x)\,dx$$

$$A=\left[\frac{-2x^3}{3}+3x^2\right]_0^3=\frac{-2\cdot 27}{3}+3\cdot 9-0=\frac{-54}{3}+27=9 \quad u^2$$

5. Considere la región limitada por las curvas $y=x^2$ e $y=-x^2+4x$.

a) Esboza la gráfica de la región dada, hallando los puntos de corte de ambas curvas.

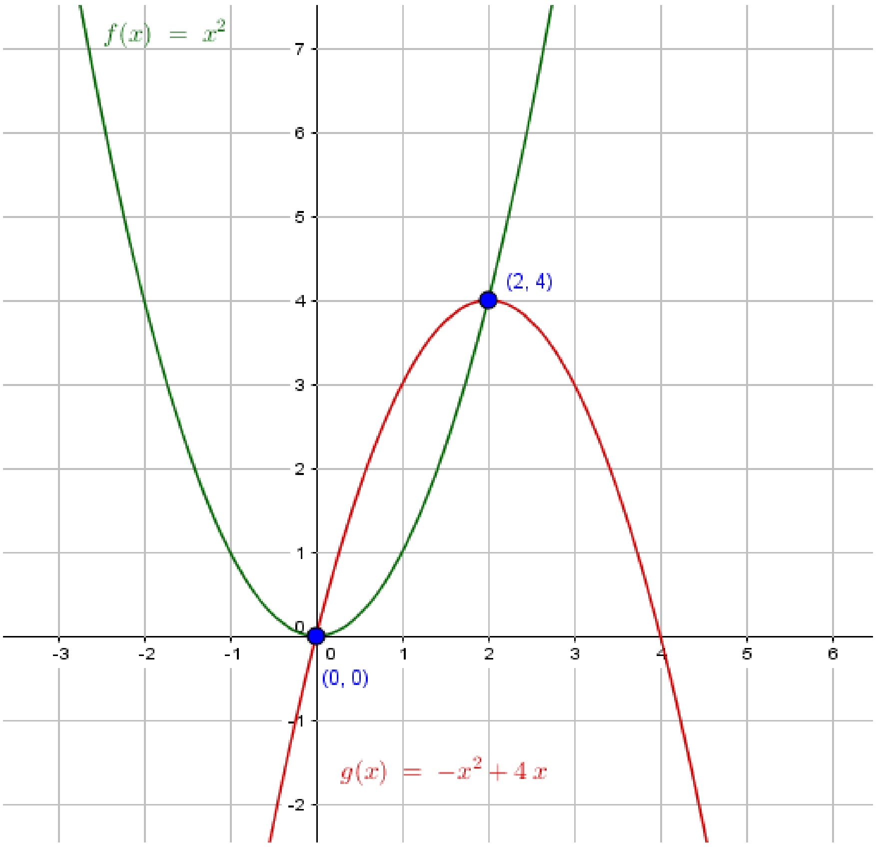
b) Expresa el área como una integral.

c) Calcula el área.

a) La gráfica de la función $y=x^2$ es bien conocida. Es convexa en toda la recta real, con un mínimo relativo y absoluto en el origen de coordenadas.

La gráfica de $y=-x^2+4x$ es cóncava hacia abajo en toda la recta real. Sus puntos de corte con el eje horizontal son $-x^2+4x=0 \rightarrow x=0$, $x=4 \rightarrow (0,0)$, $(4,0)$. Su máximo relativo y absoluto aparece en $y'=0 \rightarrow -2x+4=0 \rightarrow x=2 \rightarrow (2,4)$.

Los cortes entre ambas curvas los obtenemos igualando sus ecuaciones → $x^2=-x^2+4x \rightarrow x=0$, $x=2$.



b) El área encerrada por ambas curvas será igual a la integral definida entre los límites de integración $x=0$ y $x=2$, de la curva superior menos la curva inferior. Es decir.

$$A=\int_0^2 [(-x^2+4x)-(x^2)]dx=\int_0^2 (-2x^2+4x)dx$$

c) $A=\int_0^2(-2x^2+4x)dx=-2\int_0^2 x^2 dx+4\int_0^2 x\,d\,x=-2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2+4\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2$

Que resolvemos aplicando la regla de Barrow → $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$, siendo $F(x)$ una primitiva de la función $f(x)$.

$$A=-2\left[\frac{8}{3}-0\right]+4\left[\frac{4}{2}-0\right]=\frac{-16}{3}+8=\frac{8}{3}u^2$$

6. Calcular el área encerrada por las gráficas de las funciones $f(x)=2-x$ **y** $g(x)=\frac{2}{x+1}$ **.**

Obtenemos puntos de corte de ambas gráficas → $2-x=\frac{2}{x+1} \rightarrow -x^2+x=0 \rightarrow x=0 \;,\; x=1$

Con un sencillo esbozo podemos decidir qué función está por encima de la otra en el intervalo $[0,1]$. O bien darnos cuenta que $g(x)=\frac{2}{x+1}$ es una función convexa y estrictamente decreciente para $x>-1$, mientras que la recta $f(x)=2-x$ es estrictamente decreciente en toda la recta real. Por lo que la recta permanece por encima de la hipérbola en $[0,1]$. El área encerrada será igual a:

$$Área=\int_0^1 \left(2-x-\frac{2}{x+1}\right)dx=\left[2x-\frac{x^2}{2}-2\ln|x+1|\right]_0^1=2-\frac{1}{2}-2\ln(2)=\frac{3}{2}-2\ln(2)\ u^2$$

7. Calcular el área de la región delimitada en el primer cuadrante por la gráfica de la función $g(x)=x^3$ y la recta $y=4x$.

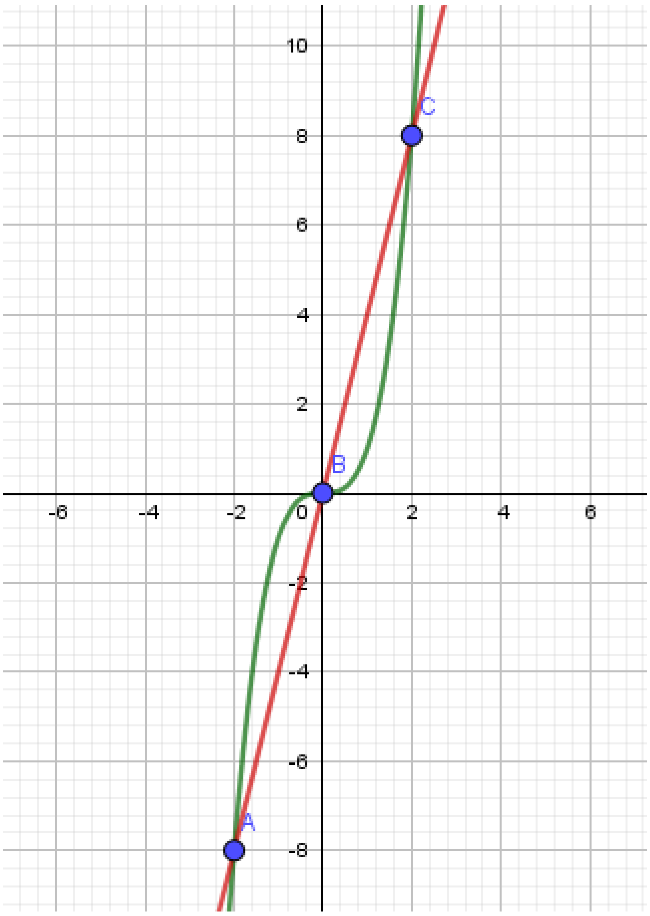
La función $g(x)=x^3$ es bien conocida. Estrictamente creciente en todo su dominio, y con un punto de inflexión en $x=0$.

La recta $y=4x$ también es creciente en su dominio y pasa por el $(0,0)$.

Los puntos de corte entre ambas funciones se obtienen igualando sus ecuaciones.

$$x^3=4x \quad \rightarrow \quad x^3-4x=0$$

$$x=-2 \quad , \quad x=0 \quad , \quad x=2$$



Con un sencillo boceto de sus gráficas, comprobamos que $g(x)=x^3$ está por encima de la recta en el intervalo $(-2,0)$ y por debajo de la recta en el intervalo $(0,2)$.

El área que nos pide el enunciado, en el primer cuadrante, se calcula con la siguiente integral definida:

$$Área=\int_0^2 (y-g(x))\,dx$$

$$Área=\int_0^2 (4x-x^3)\,dx$$

$$Área=4\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2-\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2=2[x^2]_0^2-\frac{1}{4}[x^4]_0^2$$

$$Área=2[4-0]-\frac{1}{4}[16-0]=8-4=4u^2$$

Donde hemos aplicado la regla de Barrow al resolver la integral definida:

$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$ $\rightarrow$ siendo $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$.

8. Calcula el área encerrada por la función $g(x)=x^3-4x$ y la recta $y=-x-2$.

Debemos obtener los puntos de corte de ambas funciones, para conocer los límites del área encerrada. Para ello, igualamos las funciones y resolvemos.

$$x^3-4x=-x-2 \quad \rightarrow \quad x^3-3x+2=0 \quad \rightarrow \quad (x-1)(x+2)^2=0$$

Los puntos de corte de ambas gráficas acontecen en $x=-2$ y $x=1$.

Debemos saber qué gráfica se encuentra por encima, en el intervalo $[-2,1]$, para estimar la forma de la integral definida. O bien realizar la integral definida de la resta de ambas funciones (sin considerar el orden), y aplicar valor absoluto para garantizar que obtenemos una cantidad positiva.

Por practicar un poco, no cuesta nada pintar ambas gráficas sobre unos mismos ejes.

La recta es sencilla de pintar. Para el polinomio podemos obtener los puntos de corte con los ejes y los extremos relativos, para hacernos una idea de cómo es su gráfica.

$g(x)=x^3-4x$ → Corte eje OX → $(-2,0),(0,0),(2,0)$

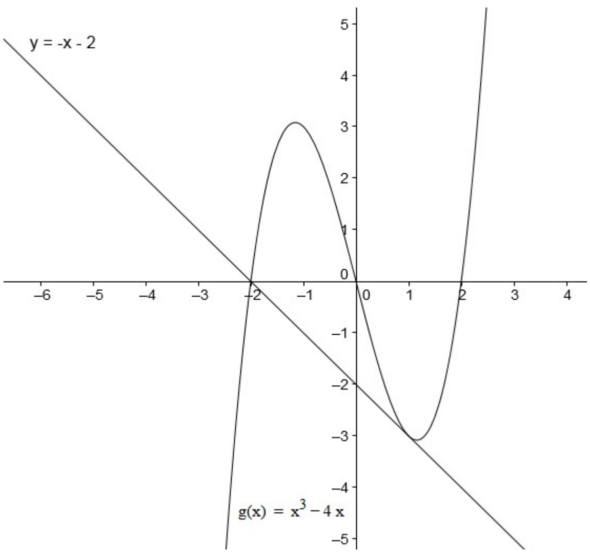
$$g'(x)=3x^2-4 \quad , \quad g'(x)=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{\pm 2\sqrt{3}}{3}$$

$$g''(x)=6x$$

$$g''\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}\right)<0 \quad , \quad g''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)>0$$

$x=\dfrac{-2\sqrt{3}}{3}$ máximo relativo

$x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ mínimo relativo



El área se calcula con la integral definida entre los puntos de corte del polinomio de grado tres menos la recta, ya que la imagen del polinomio se encuentra siempre igual o por encima de la imagen de la recta en el intervalo $[-2,1]$.

$$A=\int_{-2}^{1}(x^3-4x-(-x-2))\,dx=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-3\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}$$

$$A=\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2-4+6+4=\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+8=\frac{1-6+32}{4}=\frac{27}{4} \quad u^2$$

9. Sea $f(x)=-x^2+2x+3$ y la recta $2x+y-7=0$. Calcula el área encerrada por las gráficas de ambas funciones con el semieje positivo OX .

Debemos representar $f(x)=-x^2+2x+3$ y la recta $2x+y-7=0$. Primero obtenemos los puntos de corte de ambas gráficas.

$2x+y-7=0 \rightarrow y=-2x+7$ → Igualamos ambas gráficas.

$$-x^2+2x+3=-2x+7 \rightarrow -x^2+4x-4=0 \rightarrow x^2-4x+4=0 \rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=2$$

Encontramos un único punto de corte de ambas gráficas → $(2,3)$

Obtenemos punto de corte de la recta con los ejes.

$y=-2x+7 \rightarrow x=0 \rightarrow (0,7)$

$y=-2x+7 \rightarrow y=0 \rightarrow (\frac{7}{2},0)$

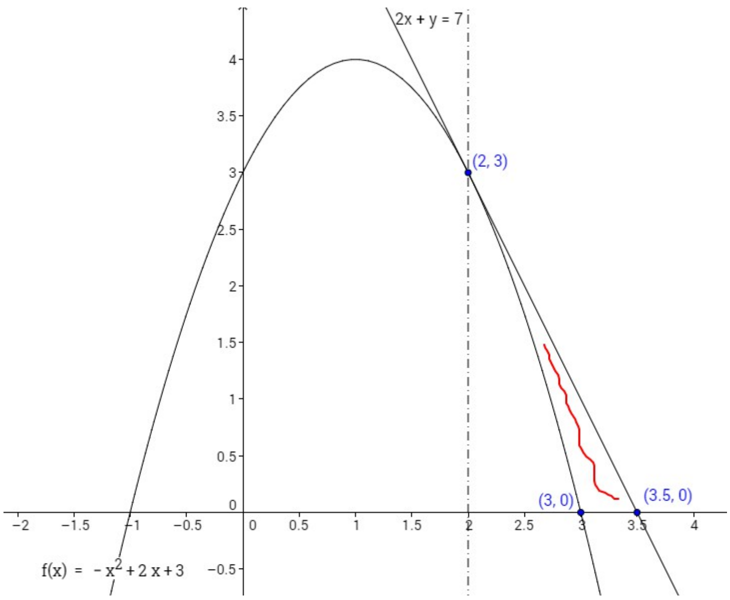
Obtenemos punto de corte de la parábola con los ejes.

$f(x)=-x^2+2x+3 \quad , \quad y=0 \rightarrow -x^2+2x+3=0 \rightarrow (-1,0),(3,0)$

$f(x)=-x^2+2x+3 \quad , \quad x=0 \rightarrow (0,3)$

El vértice es el máximo absoluto de la parábola, que será cóncava por ser negativo el coeficiente líder del polinomio de grado dos.

$f(x)=-x^2+2x+3 \rightarrow f'(x)=-2x+2 \quad , \quad f(x)=0 \rightarrow x=1 \rightarrow (1,4)$ máximo



Por lo tanto, el área se rompe en dos tramos. El primero, la integral en el intervalo $[2,3]$ de la recta menos la parábola. El segundo, la integral en el intervalo $[3,7/2]$ de la recta sobre el eje horizontal (ya que en ese intervalo la parábola queda por debajo del eje de abscisas).

$$A=\int_2^3 (-2x+7-(-x^2+2x+3))\,dx+\int_3^{7/2} (-2x+7)\,dx$$

Resolvemos por separado cada integral (aunque podríamos agrupar la integral de la recta en un intervalo unificado $[2,7/2]$).

$$\int_2^3 (-2x+7-(-x^2+2x+3))\,dx=\int_2^3 (x^2-4x+4)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right]_2^3=\frac{1}{3}u^2$$

$$\int_3^{7/2} (-2x+7)\,dx=[-x^2+7x]_2^{7/2}=\frac{1}{4}u^2$$

$$A=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}u^2$$