DWI KARTIKASARI

Kalkulus dengan EMT

Materi Kalkulus mencakup di antaranya:

- Fungsi (fungsi aljabar, trigonometri, eksponensial, logaritma, komposisi fungsi)
- Limit Fungsi,
- Turunan Fungsi,
- Integral Tak Tentu,
- Integral Tentu dan Aplikasinya,
- Barisan dan Deret (kekonvergenan barisan dan deret).

EMT (bersama Maxima) dapat digunakan untuk melakukan semua perhitungan di dalam kalkulus, baik secara numerik maupun analitik (eksak).

Mendefinisikan Fungsi

Terdapat beberapa cara mendefinisikan fungsi pada EMT, yakni:

- Menggunakan format nama_fungsi := rumus fungsi (untuk fungsi numerik),
- Menggunakan format nama_fungsi &= rumus fungsi (untuk fungsi simbolik, namun dapat dihitung secara numerik),
- Menggunakan format nama_fungsi &&= rumus fungsi (untuk fungsi simbolik murni, tidak dapat dihitung langsung),
- Fungsi sebagai program EMT.

Setiap format harus diawali dengan perintah function (bukan sebagai ekspresi).

Berikut adalah adalah beberapa contoh cara mendefinisikan fungsi:

$$f(x) = 2x^2 + e^{\sin(x)}.$$

```
>function f(x) := 2*x^2+exp(sin(x)) // fungsi numerik
>f(0), f(1), f(pi)
```

```
      1
      4.31977682472
      20.7392088022
```

```
>f(a) // tidak dapat dihitung nilainya
```

```
      Variable or function a not found.
      Error in:
      f(a) // tidak dapat dihitung nilainya ...
         ^
```

Silakan Anda plot kurva fungsi di atas!

Berikutnya kita definisikan fungsi:

$$2\,h\,x + h^2$$

```
>function g(x) := sqrt(x^2-3*x)/(x+1)
>g(3)
```

```
      0
```

```
>g(0)
```

```
      0
```

```
>g(1) // kompleks, tidak dapat dihitung oleh fungsi numerik
```

```
      Floating point error!
      Error in sqrt
      Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
      g:
          useglobal; return sqrt(x^2-3*x)/(x+1)
      Error in:
      g(1) // kompleks, tidak dapat dihitung oleh fungsi numerik ...
         ^
```

Silakan Anda plot kurva fungsi di atas!

```
>f(g(5)) // komposisi fungsi
```

```
      2.20920171961
```

```
>g(f(5))
```

```
      0.950898070639
```

```
>function h(x) := f(g(x)) // definisi komposisi fungsi
>h(5) // sama dengan f(g(5))
```

```
      2.20920171961
```

Silakan Anda plot kurva fungsi komposisi fungsi f dan g:

$$2\,x+h$$

dan

$$2\,x$$

bersama-sama kurva fungsi f dan g dalam satu bidang koordinat.

```
>f(0:10) // nilai-nilai f(0), f(1), f(2), ..., f(10)
```

```
      [1,  4.31978,  10.4826,  19.1516,  32.4692,  50.3833,  72.7562,
      99.929,  130.69,  163.51,  200.58]
```

```
>fmap(0:10) // sama dengan f(0:10), berlaku untuk semua fungsi
```

```
      [1,  4.31978,  10.4826,  19.1516,  32.4692,  50.3833,  72.7562,
      99.929,  130.69,  163.51,  200.58]
```

```
>gmap(200:210)
```

```
      [0.987534,  0.987596,  0.987657,  0.987718,  0.987778,  0.987837,
      0.987896,  0.987954,  0.988012,  0.988069,  0.988126]
```

Misalkan kita akan mendefinisikan fungsi

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=n\,x^{n-1}$$

Fungsi tersebut tidak dapat didefinisikan sebagai fungsi numerik secara "inline" menggunakan format :=, melainkan didefinisikan sebagai program. Perhatikan, kata "map" digunakan agar fungsi dapat menerima vektor sebagai input, dan hasilnya berupa vektor. Jika tanpa kata "map" fungsinya hanya dapat menerima input satu nilai.

```
>function map f(x) ...
   if x>0 then return x^3
   else return x^2
   endif;
 endfunction
```

```
>f(1)
```

```
      1
```

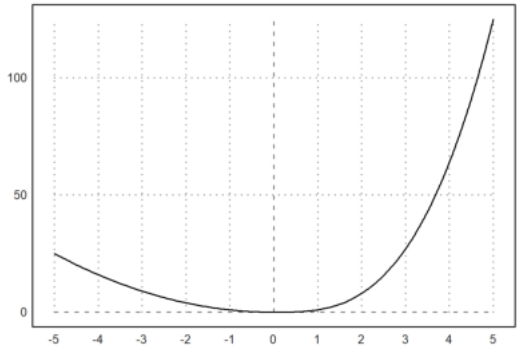
```
>f(-2)
```

```
      4
```

```
>f(-5:5)
```

```
      [25,  16,  9,  4,  1,  0,  1,  8,  27,  64,  125]
```

```
>aspect(1.5); plot2d("f(x)",-5,5):
```




```
>function f(x) &= 2*E^x // fungsi simbolik
```

$$2\,E^{x}$$

```
>$f(a) // nilai fungsi secara simbolik
```

$$2\,e^{a}$$

```
>f(E) // nilai fungsi berupa bilangan desimal
```

```
      30.308524483
```

```
>$f(E), $float(%)
```

$$2\,e^{e}$$

$$30.30852448295852$$

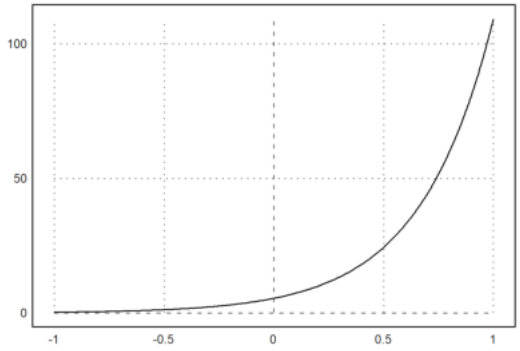
```
>function g(x) &= 3*x+1
```

$$3\,x+1$$

```
>function h(x) &= f(g(x)) // komposisi fungsi
```

$$2\,E^{3\,x+1}$$

```
>plot2d("h(x)",-1,1):
```



Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan fungsi-fungsi tersebut dan komposisinya di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, hitung beberapa nilainya, baik untuk satu nilai maupun vektor. Gambar grafik fungsi-fungsi tersebut dan komposisi-komposisi 2 fungsi.

Juga, carilah fungsi beberapa (dua) variabel. Lakukan hal sama seperti di atas.

Menghitung Limit

Perhitungan limit pada EMT dapat dilakukan dengan menggunakan fungsi Maxima, yakni "limit". Fungsi "limit" dapat digunakan untuk menghitung limit fungsi dalam bentuk ekspresi maupun fungsi yang sudah didefinisikan sebelumnya. Nilai limit dapat dihitung pada sebarang nilai atau pada tak hingga (-inf, minf, dan inf). Limit kiri dan limit kanan juga dapat dihitung, dengan cara memberi opsi "plus" atau "minus". Hasil limit dapat berupa nilai, "und" (tak definisi), "ind" (tak tentu namun terbatas), "infinity" (kompleks tak hingga).

Perhatikan beberapa contoh berikut. Perhatikan cara menampilkan perhitungan secara lengkap, tidak hanya menampilkan hasilnya saja.

```
>$showev('limit(sqrt(x^2-3*x)/(x+1),x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-3\,x}}{x+1}=1$$

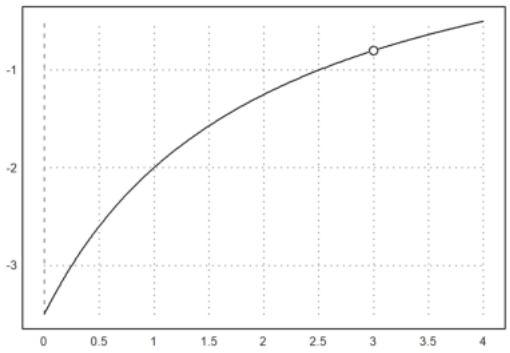
```
>$limit((x^3-13*x^2+51*x-63)/(x^3-4*x^2-3*x+18),x,3)
```

$$-\frac{4}{5}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{x+h}-x^x}{h}=infinity$$

Fungsi tersebut diskontinu di titik x=3. Berikut adalah grafik fungsinya.

```
>aspect(1.5); plot2d("(x^3-13*x^2+51*x-63)/(x^3-4*x^2-3*x+18)",0,4); plot2d(3,-4/5,>points,style="ow",>add):
```



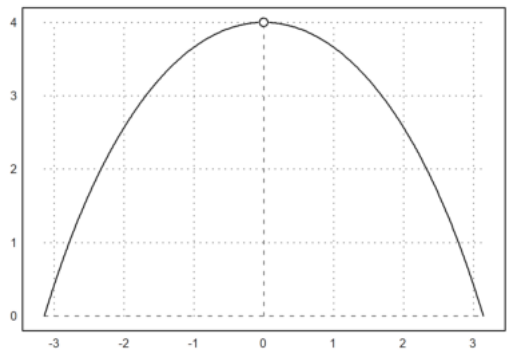

```
>$limit(2*x*sin(x)/(1-cos(x)),x,0)
```

$$4$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\tan(x+h)-\tan x}{h}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

Fungsi tersebut diskontinu di titik x=0. Berikut adalah grafik fungsinya.

```
>plot2d("2*x*sin(x)/(1-cos(x))",-pi,pi); plot2d(0,4,>points,style="ow",>add):
```



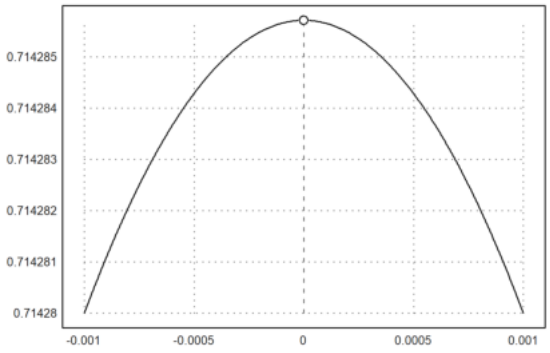

```
>$limit(cot(7*h)/cot(5*h),h,0)
```

$$\frac{5}{7}$$

$$\frac{d}{d\,x}\sin^2\left(3\,x^5+7\right)=30\,x^4\,\cos\left(3\,x^5+7\right)\,\sin\left(3\,x^5+7\right)$$

Fungsi tersebut juga diskontinu (karena tidak terdefinisi) di x=0. Berikut adalah grafiknya.

```
>plot2d("cot(7*x)/cot(5*x)",-0.001,0.001); plot2d(0,5/7,>points,style="ow",>add):
```




```
>$showev('limit(((x/8)^(1/3)-1)/(x-8),x,8))
```

$$\lim_{x\to 8}\frac{\frac{x^{\frac{1}{3}}}{2}-1}{x-8}=\frac{1}{24}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit(1/(2*x-1),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\,x-1}=-1$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit((x^2-3*x-10)/(x-5),x,5))
```

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-3\,x-10}{x-5}=7$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit(sqrt(x^2+x)-x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to \infty}\sqrt{x^2+x}-x=\frac{1}{2}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit(abs(x-1)/(x-1),x,1,minus))
```

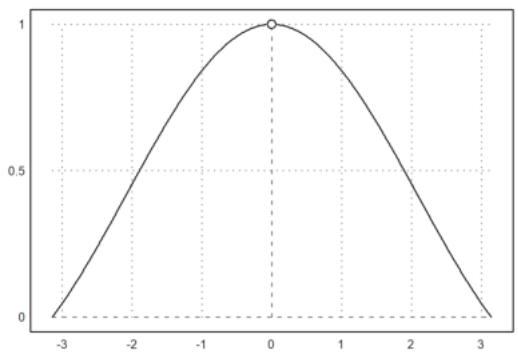
$$\lim_{x\uparrow 1}\frac{|x-1|}{x-1}=-1$$

Hitung limit di atas untuk x menuju 1 dari kanan.
Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit(sin(x)/x,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

```
>plot2d("sin(x)/x",-pi,pi); plot2d(0,1,>points,style="ow",>add):
```




```
>$showev('limit(sin(x^3)/x,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{x}=0$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit(log(x), x, minf))
```

$$\lim_{x\to -\infty}\log x=infinity$$

```
>$showev('limit((-2)^x,x, inf))
```

$$\lim_{x\to \infty}(-2)^x=infinity$$

```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,2,minus))
```

$$\lim_{t\uparrow 2}t-\sqrt{2-t}=2$$

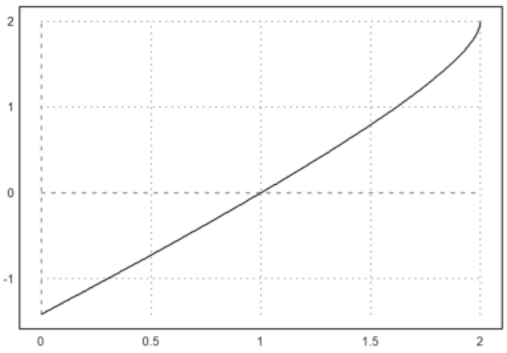
```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,2,plus))
```

$$\lim_{t\downarrow 2}t-\sqrt{2-t}=2$$

```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,5,plus)) // Perhatikan hasilnya
```

$$\lim_{t\downarrow 5}t-\sqrt{2-t}=5-\sqrt{3}\,i$$

```
>plot2d("x-sqrt(2-x)",0,2):
```




```
>$showev('limit((x^2-9)/(2*x^2-5*x-3),x,3))
```

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2\,x^2-5\,x-3}=\frac{6}{7}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit((1-cos(x))/x,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit((x^2+abs(x))/(x^2-abs(x)),x,0))
```

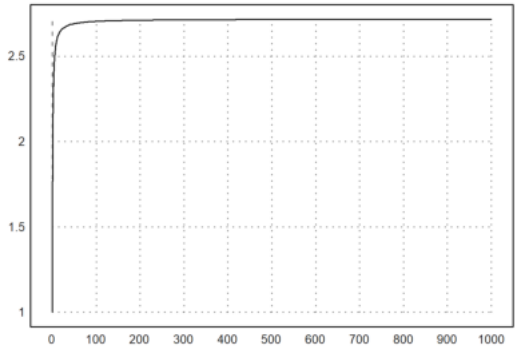
$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|+x^2}{x^2-|x|}=-1$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit((1+1/x)^x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to \infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)^x=e$$

```
>plot2d("(1+1/x)^x",0,1000):
```




```
>$showev('limit((1+k/x)^x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{k}{x}+1\right)^{x}=e^{k}$$

```
>$showev('limit((1+x)^(1/x),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}(x+1)^{\frac{1}{x}}=e$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit((x/(x+k))^x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+k}\right)^{x}=e^{-k}$$

```
>$showev('limit((E^x-E^2)/(x-2),x,2))
```

$$\lim_{x\to 2}\frac{e^{x}-e^{2}}{x-2}=e^{2}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

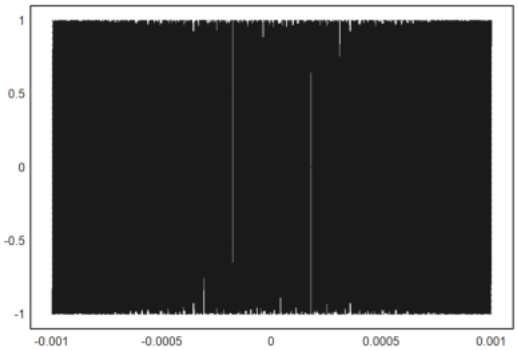
```
>$showev('limit(sin(1/x),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=ind$$

```
>$showev('limit(sin(1/x),x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

```
>plot2d("sin(1/x)",-0.001,0.001):
```



Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, hitung nilai limit fungsi tersebut di beberapa nilai dan di tak hingga. Gambar grafik fungsi tersebut untuk mengkonfirmasi nilai-nilai limit tersebut.

Turunan Fungsi

Definisi turunan:

Berikut adalah contoh-contoh menentukan turunan fungsi dengan menggunakan definisi turunan (limit).

```
>$showev('limit(((x+h)^2-x^2)/h,h,0)) // turunan x^2
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=2\,x$$

```
>p &= expand((x+h)^2-x^2)|simplify; $p //pembilang dijabarkan dan disederhanakan
```

$$2\,h\,x+h^2$$

```
>q &=ratsimp(p/h); $q // ekspresi yang akan dihitung limitnya disederhanakan
```

$$2\,x+h$$

```
>$limit(q,h,0) // nilai limit sebagai turunan
```

$$2\,x$$

```
>$showev('limit(((x+h)^n-x^n)/h,h,0)) // turunan x^n
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=n\,x^{n-1}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

Sebagai petunjuk, ekspansikan (x+h)^n dengan menggunakan teorema binomial.

```
>$showev('limit((sin(x+h)-sin(x))/h,h,0)) // turunan sin(x)
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\cos x$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

Sebagai petunjuk, ekspansikan sin(x+h) dengan menggunakan rumus jumlah dua sudut.

```
>$showev('limit((log(x+h)-log(x))/h,h,0)) // turunan log(x)
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\frac{1}{x}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

Sebagai petunjuk, gunakan sifat-sifat logaritma dan hasil limit pada bagian sebelumnya di atas.

```
>$showev('limit((1/(x+h)-1/x)/h,h,0)) // turunan 1/x
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=-\frac{1}{x^2}$$

```
>$showev('limit((E^(x+h)-E^x)/h,h,0)) // turunan f(x)=e^x
```

```
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Maxima is asking
Acceptable answers are: yes, y, Y, no, n, N, unknown, uk
Is x an integer?

Use assume!
Error in:
 $showev('limit((E^(x+h)-E^x)/h,h,0)) // turunan f(x)=e^x ...
                                  ^
```

Maxima bermasalah dengan limit:

Oleh karena itu diperlukan trik khusus agar hasilnya benar.

```
>$showev('limit((E^h-1)/h,h,0))
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

```
>$showev('factor(E^(x+h)-E^x))
```

$$factor\left(e^{x+h}-e^{x}\right)=\left(e^{h}-1\right)\,e^{x}$$

```
>$showev('limit(factor((E^(x+h)-E^x)/h),h,0)) // turunan f(x)=e^x
```

$$\left(\lim_{h\to 0}\frac{e^{h}-1}{h}\right)\,e^{x}=e^{x}$$

```
>function f(x) &= x^x
```

$$x$$
$$x$$

```
>$showev('limit(f(x),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}x^{x}=1$$

Silakan Anda gambar kurva

```
>$showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=x^x
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{x+h}-x^{x}}{h}=infinity$$

Di sini Maxima juga bermasalah terkait limit:

Dalam hal ini diperlukan asumsi nilai x.

```
>&assume(x>0); $showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=x^x
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{x+h}-x^{x}}{h}=x^{x}\,\left(\log x+1\right)$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

```
>&forget(x>0) // jangan lupa, lupakan asumsi untuk kembali ke semula
```

```
[x > 0]
```

```
>&forget(x<0)
```

```
[x < 0]
```

```
>&facts()
```

```
[]
```

```
>$showev('limit((asin(x+h)-asin(x))/h,h,0)) // turunan arcsin(x)
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\arcsin\left(x+h\right)-\arcsin x}{h}=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

```
>$showev('limit((tan(x+h)-tan(x))/h,h,0)) // turunan tan(x)
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\tan\left(x+h\right)-\tan x}{h}=\frac{1}{\cos^{2}x}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

```
>function f(x) &= sinh(x) // definisikan f(x)=sinh(x)
```

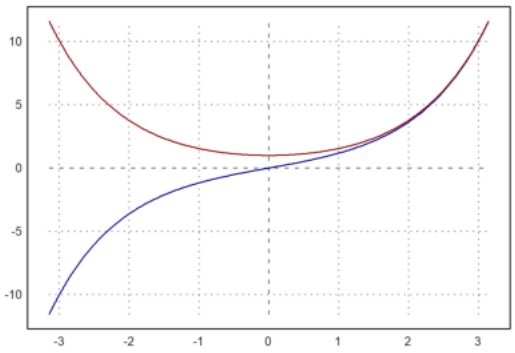
```
sinh(x)
```

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$\frac{e^{-x}\left(e^{2x}+1\right)}{2}$$

Hasilnya adalah cosh(x), karena

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-pi,pi,color=[blue,red]):
```




```
>function f(x) &= sin(3*x^5+7)^2
```

$$\sin^2\left(3x^5+7\right)$$

```
>diff(f,3), diffc(f,3)
```

```
      1198.32948904
      1198.72863721
```

Apakah perbedaan diff dan diffc?

```
>$showev('diff(f(x),x))
```

$$\frac{d}{dx}\sin^2\left(3x^5+7\right)=30x^4\cos\left(3x^5+7\right)\sin\left(3x^5+7\right)$$

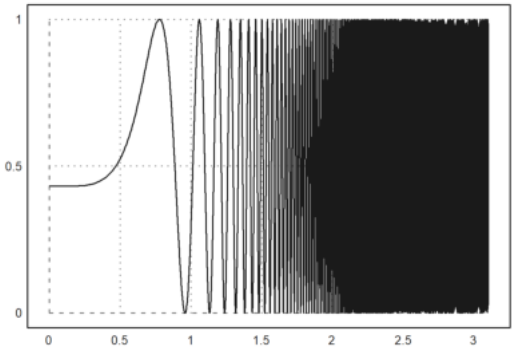
```
>$% with x=3
```

$$\%at\left(\frac{d}{dx}\sin^2\left(3x^5+7\right),x=3\right)=2430\cos 736\sin 736$$

```
>$float(%)
```

$$\%at\left(\frac{d^{1.0}}{dx^{1.0}}\sin^2\left(3.0x^5+7.0\right),x=3.0\right)=1198.728637211748$$

```
>plot2d(f,0,3.1):
```




```
>function f(x) &=5*cos(2*x)-2*x*sin(2*x) // mendifinisikan fungsi f
```

```
                                5 cos(2 x) - 2 x sin(2 x)
```

```
>function df(x) &=diff(f(x),x) // fd(x) = f'(x)
```

```
                               - 12 sin(2 x) - 4 x cos(2 x)
```

```
>$'f(1)=f(1), $float(f(1)), $'f(2)=f(2), $float(f(2)) // nilai f(1) dan f(2)
```

$$f(1) = 5\cos 2 - 2\sin 2$$

$$-3.899329036387075$$

$$f(2) = 5\cos 4 - 4\sin 4$$

$$-0.2410081230863468$$

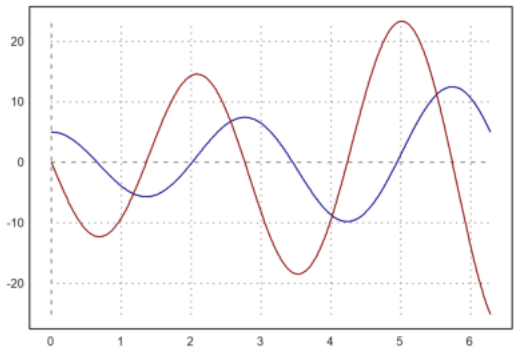
```
>xp=solve("df(x)",1,2,0) // solusi f'(x)=0 pada interval [1, 2]
```

```
      1.35822987384
```

```
>df(xp), f(xp) // cek bahwa f'(xp)=0 dan nilai ekstrim di titik tersebut
```

```
      0
      -5.67530133759
```

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],0,2*pi,color=[blue,red]): //grafik fungsi dan turunannya
```



Perhatikan titik-titik "puncak" grafik y=f(x) dan nilai turunan pada saat grafik fungsinya mencapai titik "puncak" tersebut.

Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, tentukan turunannya dengan menggunakan definisi turunan (limit), menggunakan perintah diff, dan secara manual (langkah demi langkah yang dihitung dengan Maxima) seperti contoh-contoh di atas. Gambar grafik fungsi asli dan fungsi turunannya pada sumbu koordinat yang sama.

Integral

EMT dapat digunakan untuk menghitung integral, baik integral tak tentu maupun integral tentu. Untuk integral tak tentu (simbolik) sudah tentu EMT menggunakan Maxima, sedangkan untuk perhitungan integral tentu EMT sudah menyediakan beberapa fungsi yang mengimplementasikan algoritma kuadratur (perhitungan integral tentu menggunakan metode numerik).

Pada notebook ini akan ditunjukkan perhitungan integral tentu dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus:

Fungsi untuk menentukan integral adalah integrate. Fungsi ini dapat digunakan untuk menentukan, baik integral tentu maupun tak tentu (jika fungsinya memiliki antiderivatif). Untuk perhitungan integral tentu fungsi integrate menggunakan metode numerik (kecuali fungsinya tidak integrabel, kita tidak akan menggunakan metode ini).

```
>$showev('integrate(x^n,x))
```

```
      Answering "Is n equal to -1?" with "no"
```

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

```
>$showev('integrate(1/(1+x),x))
```

$$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \log\left(x+1\right)$$

```
>$showev('integrate(1/(1+x^2),x))
```

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x$$

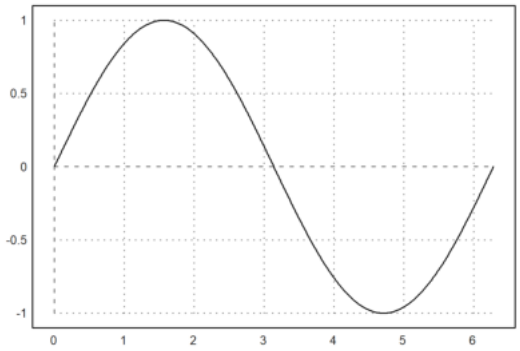
```
>$showev('integrate(1/sqrt(1-x^2),x))
```

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$$

```
>$showev('integrate(sin(x),x,0,pi))
```

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2$$

```
>plot2d("sin(x)",0,2*pi):
```




```
>$showev('integrate(sin(x),x,a,b))
```

$$\int_a^b \sin x\,dx = \cos a - \cos b$$

```
>$showev('integrate(x^n,x,a,b))
```

```
Answering "Is n positive, negative or zero?" with "positive"
```

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

```
>$showev('integrate(x^2*sqrt(2*x+1),x))
```

$$\int x^2\sqrt{2\,x+1}\,dx = \frac{(2\,x+1)^{\frac{7}{2}}}{28} - \frac{(2\,x+1)^{\frac{5}{2}}}{10} + \frac{(2\,x+1)^{\frac{3}{2}}}{12}$$

```
>$showev('integrate(x^2*sqrt(2*x+1),x,0,2))
```

$$\int_0^2 x^2\sqrt{2\,x+1}\,dx = \frac{2\,5^{\frac{5}{2}}}{21} - \frac{2}{105}$$

```
>$ratsimp(%)
```

$$\int_0^2 x^2\sqrt{2\,x+1}\,dx = \frac{2\,5^{\frac{7}{2}}-2}{105}$$

```
>$showev('integrate((sin(sqrt(x)+a)*E^sqrt(x))/sqrt(x),x,0,pi^2))
```

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\sin\left(\sqrt{x}+a\right)\,e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \left(-e^{\pi}-1\right)\,\sin a + \left(e^{\pi}+1\right)\,\cos a$$

```
>$factor(%)
```

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\sin\left(\sqrt{x}+a\right)\, e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \left(-e^{\pi}-1\right)\, (\sin a - \cos a)$$

```
>function map f(x) &= E^(-x^2)
```

$$E^{-x^2}$$

```
>$showev('integrate(f(x),x))
```

$$\int e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\,(x)}{2}$$

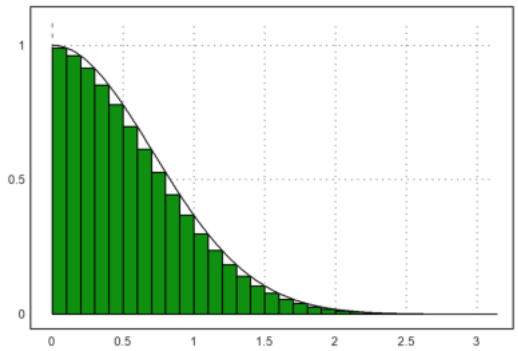
Fungsi f tidak memiliki antiturunan, integralnya masih memuat integral lain.

Kita tidak dapat menggunakan teorema Dasar kalkulus untuk menghitung integral tentu fungsi tersebut jika semua batasnya berhingga. Dalam hal ini dapat digunakan metode numerik (rumus kuadratur).

Misalkan kita akan menghitung:

maxima: 'integrate(f(x),x,0,pi)

```
>x=0:0.1:pi-0.1; plot2d(x,f(x+0.1),>bar); plot2d("f(x)",0,pi,>add):
```



Integral tentu

maxima: 'integrate(f(x),x,0,pi)

dapat dihampiri dengan jumlah luas persegi-persegi panjang di bawah kurva y=f(x) tersebut. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

```
>t &= makelist(a,a,0,pi-0.1,0.1); // t sebagai list untuk menyimpan nilai-nilai x
>fx &= makelist(f(t[i]+0.1),i,1,length(t)); // simpan nilai-nilai f(x)
>// jangan menggunakan x sebagai list, kecuali Anda pakar Maxima!
```

Hasilnya adalah:

maxima: 'integrate(f(x),x,0,pi) = 0.1*sum(fx[i],i,1,length(fx))

Jumlah tersebut diperoleh dari hasil kali lebar sub-subinterval (=0.1) dan jumlah nilai-nilai f(x) untuk x = 0.1, 0.2, 0.3, ..., 3.2.

```
>0.1*sum(f(x+0.1)) // cek langsung dengan perhitungan numerik EMT
```

```
      0.836219610253
```

Untuk mendapatkan nilai integral tentu yang mendekati nilai sebenarnya, lebar sub-intervalnya dapat diperkecil lagi, sehingga daerah di bawah kurva tertutup semuanya, misalnya dapat digunakan lebar subinterval 0.001. (Silakan dicoba!)

Meskipun Maxima tidak dapat menghitung integral tentu fungsi tersebut untuk batas-batas yang berhingga, namun integral tersebut dapat dihitung secara eksak jika batas-batasnya tak hingga. Ini adalah salah satu keajaiban di dalam matematika, yang terbatas tidak dapat dihitung secara eksak, namun yang tak hingga malah dapat dihitung secara eksak.

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,inf))
```

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Tunjukkan kebenaran hasil di atas!

Berikut adalah contoh lain fungsi yang tidak memiliki antiderivatif, sehingga integral tentunya hanya dapat dihitung dengan metode numerik.

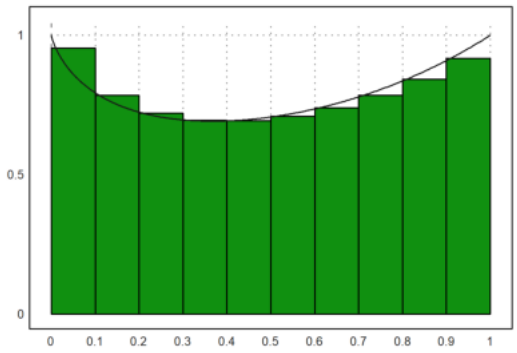
```
>function f(x) &= x^x
```

$$x \\ x$$

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,1))
```

$$\int_0^1 x^x \, dx = \int_0^1 x^x \, dx$$

```
>x=0:0.1:1-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```



Maxima gagal menghitung integral tentu tersebut secara langsung menggunakan perintah integrate. Berikut kita lakukan seperti contoh sebelumnya untuk mendapat hasil atau pendekatan nilai integral tentu tersebut.

```
>t &= makelist(a,a,0,1-0.01,0.01);
>fx &= makelist(f(t[i]+0.01),i,1,length(t));
```

maxima: 'integrate(f(x),x,0,1) = 0.01*sum(fx[i],i,1,length(fx))

Apakah hasil tersebut cukup baik? perhatikan gambarnya.

```
>function f(x) &= sin(3*x^5+7)^2
```

$$\sin\left(3\,x^5+7\right)^2$$

```
>integrate(f,0,1)
```

0.542581176074

```
>&showev('integrate(f(x),x,0,1))
```

$$\int_0^1 \sin\left(3\,x^5+7\right)^2 \, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)\sin\left(\frac{14}{5}\right)\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)}{10\,6^{1/5}}$$

$$-\left(\left(6^{4/5}\,\Gamma\left(-\frac{1}{5},6\,i\right)+6^{4/5}\,\Gamma\left(-\frac{1}{5},-6\,i\right)\right)\sin(14)+\left(6^{4/5}\,i\,\Gamma\left(-\frac{1}{5},6\,i\right)-6^{4/5}\,i\,\Gamma\left(-\frac{1}{5},-6\,i\right)\right)\cos(14)\right)\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)-60\Big)/120$$

```
>&float(%)
```

$$\int_{0.0}^{1.0} \sin\left(3.0\,x^5+7.0\right) \, dx =$$

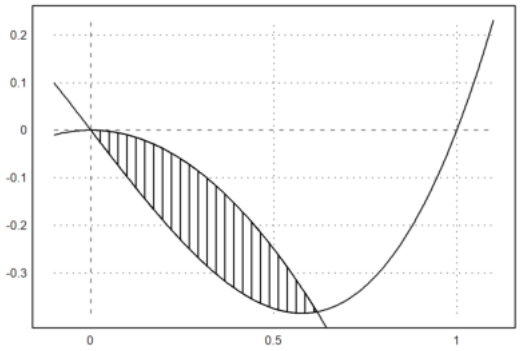
```
0.09820784258795788 - 0.008333333333333333
 (0.3090169943749474 (0.1367372182078336
 (4.192962712629476 I gamma__incomplete(0.2, 6.0 I)
 - 4.192962712629476 I gamma__incomplete(0.2, - 6.0 I))
 + 0.9906073556948704 (4.192962712629476 gamma__incomplete(0.2, 6.0 I)
 + 4.192962712629476 gamma__incomplete(0.2, - 6.0 I))) - 60.0)
```

```
>$showev('integrate(x*exp(-x),x,0,1)) // Integral tentu (eksak)
```

$$\int_0^1 x\,e^{-x}\,dx = 1 - 2\,e^{-1}$$

Aplikasi Integral Tentu

```
>plot2d("x^3-x",-0.1,1.1); plot2d("-x^2",>add);  ...
 b=solve("x^3-x+x^2",0.5); x=linspace(0,b,200); xi=flipx(x); ...
 plot2d(x|xi,x^3-x|-xi^2,>filled,style="|",fillcolor=1,>add): // Plot daerah antara 2 kurva
```




```
>a=solve("x^3-x+x^2",0), b=solve("x^3-x+x^2",1) // absis titik-titik potong kedua kurva
```

```
0
0.61803398875
```

```
>integrate("(-x^2)-(x^3-x)",a,b) // luas daerah yang diarsir
```

```
0.0758191713542
```

Hasil tersebut akan kita bandingkan dengan perhitungan secara analitik.

```
>a &= solve((-x^2)-(x^3-x),x); $a // menentukan absis titik potong kedua kurva secara eksak
```

$$\left[x = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}, x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, x = 0\right]$$

```
>$showev('integrate(-x^2-x^3+x,x,0,(sqrt(5)-1)/2)) // Nilai integral secara eksak
```

$$\int_0^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} -x^3 - x^2 + x\,dx = \frac{13 - 5^{\frac{3}{2}}}{24}$$

```
>$float(%)
```

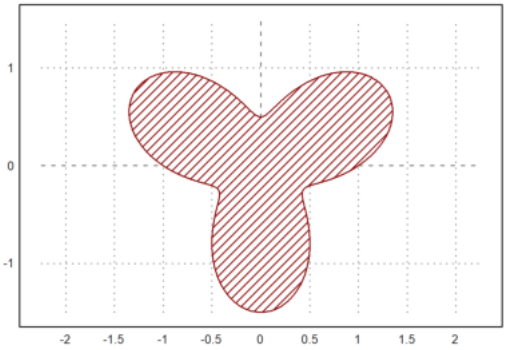
$$\int_{0.0}^{0.6180339887498949} -1.0\,x^3 - 1.0\,x^2 + x\,dx = 0.07581917135421037$$

Panjang Kurva

Hitunglah panjang kurva berikut ini dan luas daerah di dalam kurva tersebut.

dengan

```
>t=linspace(0,2pi,1000); r=1+sin(3*t)/2; x=r*cos(t); y=r*sin(t); ...
 plot2d(x,y,>filled,fillcolor=red,style="/",r=1.5): // Kita gambar kurvanya terlebih dahulu
```




```
>function r(t) &= 1+sin(3*t)/2; $'r(t)=r(t)
```

```
>function fx(t) &= r(t)*cos(t); $'fx(t)=fx(t)
```

```
>function fy(t) &= r(t)*sin(t); $'fy(t)=fy(t)
```

```
>function ds(t) &= trigreduce(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)^2+diff(fy(t),t)^2))); $'ds(t)=ds(t)
```

```
      Maxima said:
      diff: second argument must be a variable; found errexp1
       -- an error. To debug this try: debugmode(true);

      Error in:
      ... e(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)^2+diff(fy(t),t)^2))); $'ds(t)=ds(t ...
                                                             ^
```

```
>$integrate(ds(x),x,0,2*pi) //panjang (keliling) kurva
```

$$\int_0^{2\pi} ds\,(x)\;dx$$

Maxima gagal melakukan perhitungan eksak integral tersebut.

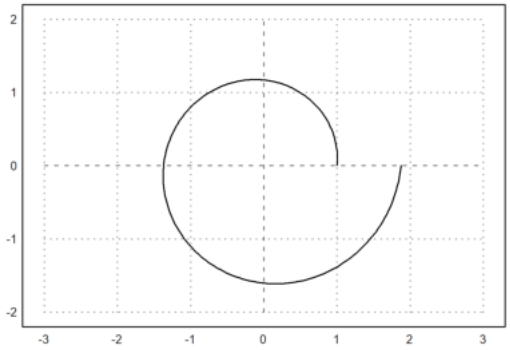
Berikut kita hitung integralnya secara umerik dengan perintah EMT.

```
>integrate("ds(x)",0,2*pi)
```

```
      Function ds not found.
      Try list ... to find functions!
      Error in expression: ds(x)
       %mapexpression1:
          return expr(x,args());
      Error in map.
       %evalexpression:
          if maps then return %mapexpression1(x,f$;args());
      gauss:
          if maps then y=%evalexpression(f$,a+h-(h*xn)',maps;args());
      adaptivegauss:
          t1=gauss(f$,c,c+h;args(),=maps);
      Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
      integrate:
          return adaptivegauss(f$,a,b,eps*1000;args(),=maps);
```

Spiral Logaritmik

```
>a=0.1; plot2d("exp(a*x)*cos(x)","exp(a*x)*sin(x)",r=2,xmin=0,xmax=2*pi):
```




```
>&kill(a) // hapus expresi a
```

done

```
>function fx(t) &= exp(a*t)*cos(t); $'fx(t)=fx(t)
```

```
>function fy(t) &= exp(a*t)*sin(t); $'fy(t)=fy(t)
```

```
>function df(t) &= trigreduce(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)^2+diff(fy(t),t)^2))); $'df(t)=df(t)
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found errexp1
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
... e(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)^2+diff(fy(t),t)^2))); $'df(t)=df(t ...
                                                      ^
```

```
>S &=integrate(df(t),t,0,2*%pi); $S // panjang kurva (spiral)
```

```
Maxima said:
defint: variable of integration cannot be a constant; found errexp1
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
S &=integrate(df(t),t,0,2*%pi); $S // panjang kurva (spiral) ...
                                ^
```

```
>S(a=0.1) // Panjang kurva untuk a=0.1
```

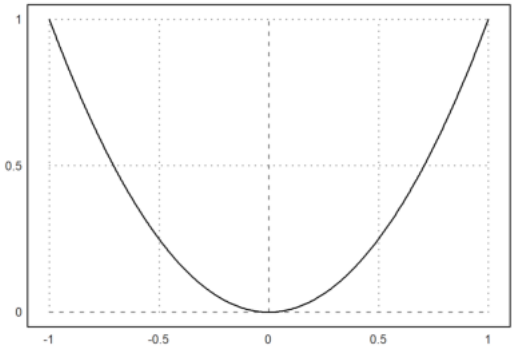
```
Function S not found.
Try list ... to find functions!
Error in:
S(a=0.1) // Panjang kurva untuk a=0.1 ...
  ^
```

Soal:

Tunjukkan bahwa keliling lingkaran dengan jari-jari r adalah K=2.pi.r.

Berikut adalah contoh menghitung panjang parabola.

```
>plot2d("x^2",xmin=-1,xmax=1):
```



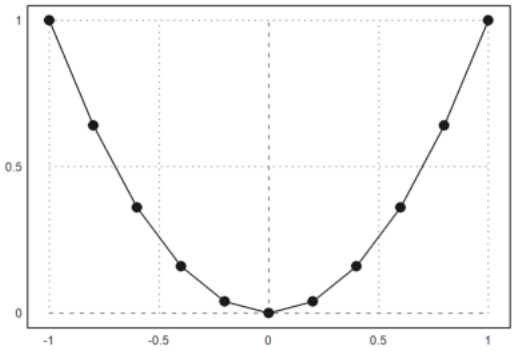

```
>$showev('integrate(sqrt(1+diff(x^2,x)^2),x,-1,1))
```

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{4\,x^2+1}\,dx = \frac{\operatorname{asinh}\,2+2\,\sqrt{5}}{2}$$

```
>$float(%)
```

$$\int_{-1.0}^{1.0} \sqrt{4.0\,x^2+1.0}\,dx = 2.957885715089195$$

```
>x=-1:0.2:1; y=x^2; plot2d(x,y);  ...
   plot2d(x,y,points=1,style="o#",add=1):
```



Panjang tersebut dapat dihampiri dengan menggunakan jumlah panjang ruas-ruas garis yang menghubungkan titik-titik pada parabola tersebut.

```
>i=1:cols(x)-1; sum(sqrt((x[i+1]-x[i])^2+(y[i+1]-y[i])^2))
```

```
      2.95191957027
```

Hasilnya mendekati panjang yang dihitung secara eksak. Untuk mendapatkan hampiran yang cukup akurat, jarak antar titik dapat diperkecil, misalnya 0.1, 0.05, 0.01, dan seterusnya. Cobalah Anda ulangi perhitungannya dengan nilai-nilai tersebut.

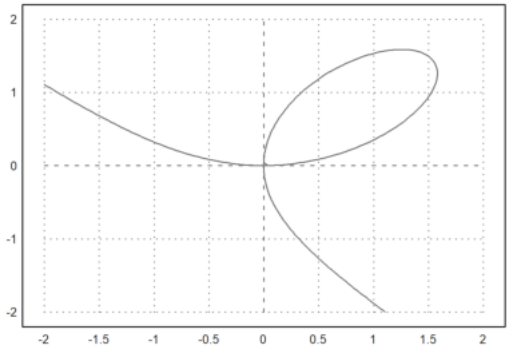
Koordinat Kartesius

Berikut diberikan contoh perhitungan panjang kurva menggunakan koordinat Kartesius. Kita akan hitung panjang kurva dengan persamaan implisit:

```
>z &= x^3+y^3-3*x*y; $z
```

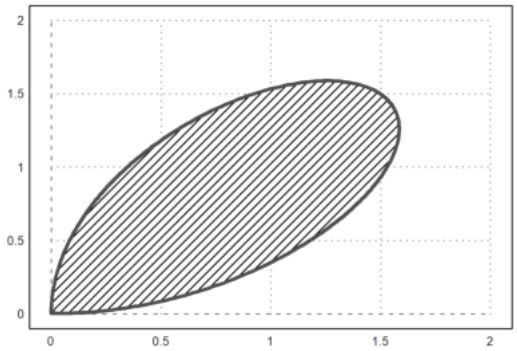
$$y^3-3\,x\,y+x^3$$

```
>plot2d(z,r=2,level=0,n=100):
```



Kita tertarik pada kurva di kuadran pertama.

```
>plot2d(z,a=0,b=2,c=0,d=2,level=[-10;0],n=100,contourwidth=3,style="/"):
```



Kita selesaikan persamaannya untuk x.

```
>$z with y=l*x, sol &= solve(%,x); $sol
```

$$l^3 x^3 + x^3 - 3 l x^2$$

$$\left[x = \frac{3 l}{l^3 + 1}, x = 0\right]$$

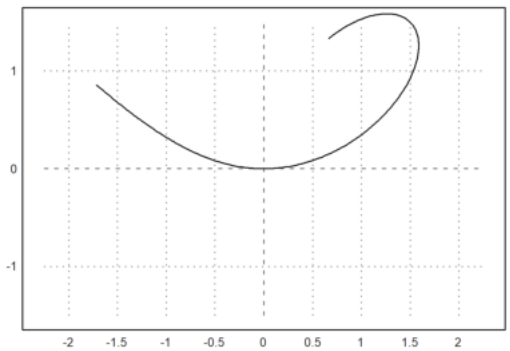
Kita gunakan solusi tersebut untuk mendefinisikan fungsi dengan Maxima.

```
>function f(l) &= rhs(sol[1]); $'f(l)=f(l)
```

$$f(l) = \frac{3 l}{l^3 + 1}$$

Fungsi tersebut juga dapat digunaka untuk menggambar kurvanya. Ingat, bahwa fungsi tersebut adalah nilai x dan nilai y=l*x, yakni x=f(l) dan y=l*f(l).

```
>plot2d(&f(x),&x*f(x),xmin=-0.5,xmax=2,a=0,b=2,c=0,d=2,r=1.5):
```



Elemen panjang kurva adalah:

```
>function ds(l) &= ratsimp(sqrt(diff(f(l),l)^2+diff(l*f(l),l)^2)); $'ds(l)=ds(l)
```

$$ds(l) = \frac{\sqrt{9 l^8 + 36 l^6 - 36 l^5 - 36 l^3 + 36 l^2 + 9}}{\sqrt{l^{12} + 4 l^9 + 6 l^6 + 4 l^3 + 1}}$$

```
>$integrate(ds(l),l,0,1)
```

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{9\,l^8+36\,l^6-36\,l^5-36\,l^3+36\,l^2+9}}{\sqrt{l^{12}+4\,l^9+6\,l^6+4\,l^3+1}}\,dl$$

Integral tersebut tidak dapat dihitung secara eksak menggunakan Maxima. Kita hitung integral etrsebut secara numerik dengan Euler. Karena kurva simetris, kita hitung untuk nilai variabel integrasi dari 0 sampai 1, kemudian hasilnya dikalikan 2.

```
>2*integrate("ds(x)",0,1)
```

```
      4.91748872168
```

```
>2*romberg(&ds(x),0,1)// perintah Euler lain untuk menghitung nilai hampiran integral yang sama
```

```
      4.91748872168
```

Perhitungan di datas dapat dilakukan untuk sebarang fungsi x dan y dengan mendefinisikan fungsi EMT, misalnya kita beri nama panjangkurva. Fungsi ini selalu memanggil Maxima untuk menurunkan fungsi yang diberikan.

```
>function panjangkurva(fx,fy,a,b) ...
 ds=mxm("sqrt(diff(@fx,x)^2+diff(@fy,x)^2)");
 return romberg(ds,a,b);
 endfunction
```

```
>panjangkurva("x","x^2",-1,1) // cek untuk menghitung panjang kurva parabola sebelumnya
```

```
      2.95788571509
```

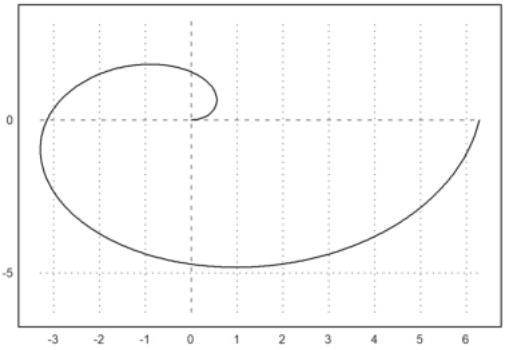
Bandingkan dengan nilai eksak di atas.

```
>2*panjangkurva(mxm("f(x)"),mxm("x*f(x)"),0,1) // cek contoh terakhir, bandingkan hasilnya!
```

```
      4.91748872168
```

Kita hitung panjang spiral Archimides berikut ini dengan fungsi tersebut.

```
>plot2d("x*cos(x)","x*sin(x)",xmin=0,xmax=2*pi,square=1):
```




```
>panjangkurva("x*cos(x)","x*sin(x)",0,2*pi)
```

```
      21.2562941482
```

Berikut kita definisikan fungsi yang sama namun dengan Maxima, untuk perhitungan eksak.

```
>&kill(ds,x,fx,fy)
```

```
                                    done
```

```
>function ds(fx,fy) &&= sqrt(diff(fx,x)^2+diff(fy,x)^2)
```

```
                          2             2
                sqrt(diff (fy, x) + diff (fx, x))
```

```
>sol &= ds(x*cos(x),x*sin(x)); $sol // Kita gunakan untuk menghitung panjang kurva terakhir di atas
```

$$\sqrt{(\cos x - x\,\sin x)^2 + (\sin x + x\,\cos x)^2}$$

```
>$sol | trigreduce | expand, $integrate(%,x,0,2*pi), %()
```

$$\sqrt{x^2+1}$$

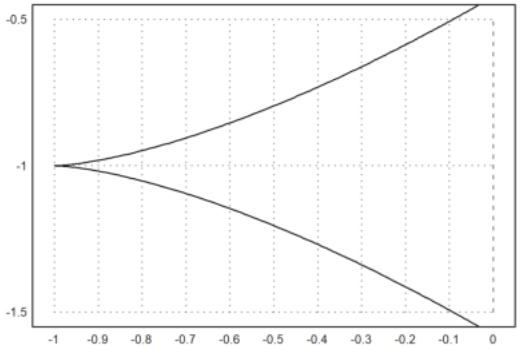
$$\frac{\operatorname{asinh}\,(2\,\pi) + 2\,\pi\,\sqrt{4\,\pi^2+1}}{2}$$

```
      21.2562941482
```

Hasilnya sama dengan perhitungan menggunakan fungsi EMT.

Berikut adalah contoh lain penggunaan fungsi Maxima tersebut.

```
>plot2d("3*x^2-1","3*x^3-1",xmin=-1/sqrt(3),xmax=1/sqrt(3),square=1):
```




```
>sol &= radcan(ds(3*x^2-1,3*x^3-1)); $sol
```

$$3\,x\,\sqrt{9\,x^2+4}$$

```
>$showev('integrate(sol,x,0,1/sqrt(3))), $2*float(%) // panjang kurva di atas
```

$$3\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} x\,\sqrt{9\,x^2+4}\,dx = 3\left(\frac{7^{\frac{3}{2}}}{27} - \frac{8}{27}\right)$$

$$6.0\int_{0.0}^{0.5773502691896258} x\,\sqrt{9.0\,x^2+4.0}\,dx = 2.337835372767141$$

Sikloid

Berikut kita akan menghitung panjang kurva lintasan (sikloid) suatu titik pada lingkaran yang berputar ke kanan pada permukaan datar. Misalkan jari-jari lingkaran tersebut adalah r. Posisi titik pusat lingkaran pada saat t adalah:

Misalkan posisi titik pada lingkaran tersebut mula-mula (0,0) dan posisinya pada saat t adalah:

Berikut kita plot lintasan tersebut dan beberapa posisi lingkaran ketika t=0, t=pi/2, t=r*pi.

```
>x &= r*(t-sin(t))
```

```
        [0, 1.66665833335744e-7 r, 1.33330666692022e-6 r,
4.499797504338432e-6 r, 1.066581336583994e-5 r,
2.083072932167196e-5 r, 3.599352055540239e-5 r,
5.71526624672386e-5 r, 8.530603082730626e-5 r,
1.214508019889565e-4 r, 1.665833531718508e-4 r,
2.216991628251896e-4 r, 2.877927110806339e-4 r,
3.658573803051457e-4 r, 4.568853557635201e-4 r,
5.618675264007778e-4 r, 6.817933857540259e-4 r,
8.176509330039827e-4 r, 9.704265741758145e-4 r,
0.001141105023499428 r, 0.001330669204938795 r,
0.001540100153900437 r, 0.001770376919130678 r,
0.002022476464811601 r, 0.002297373572865413 r,
0.002596040745477063 r, 0.002919448107844891 r,
0.003268563311168871 r, 0.003644351435886262 r,
0.004047774895164447 r, 0.004479793338660443 r, 0.0049413635565565 r,
0.005433439383882244 r, 0.005956971605131645 r,
0.006512907859185624 r, 0.007102192544548636 r,
0.007725766724910044 r, 0.00838456803503801 r,
0.009079530587017326 r, 0.009811584876838586 r, 0.0105816576913495 r,
0.01139067201557714 r, 0.01223954694042984 r, 0.01312919757078923 r,
0.01406053493400045 r, 0.01503446588876983 r, 0.01605189303448024 r,
0.01711371462093175 r, 0.01822082445851714 r, 0.01937411182884202 r,
```

```
0.02057446139579705 r, 0.02182275311709253 r, 0.02311986215626333 r,
0.02446665879515308 r, 0.02586400834688696 r, 0.02731277106934082 r,
0.02881380207911666 r, 0.03036795126603076 r, 0.03197606320812652 r,
0.0336389770872163 r, 0.03535752660496472 r, 0.03713253989951881 r,
0.03896483946269502 r, 0.0408552420577305 r, 0.04280455863760801 r,
0.04481359426396048 r, 0.04688314802656623 r, 0.04901401296344043 r,
0.05120697598153157 r, 0.05346281777803219 r, 0.05578231276230905 r,
0.05816622897846346 r, 0.06061532802852698 r, 0.0631303649963022 r,
0.06571208837185505 r, 0.06836123997666599 r, 0.07107855488944881 r,
0.07386476137264342 r, 0.07672058079958999 r, 0.07964672758239233 r,
0.08264390910047736 r, 0.0857128256298576 r, 0.08885417027310427 r,
0.09206862889003742 r, 0.09535688002914089 r, 0.0987195948597075 r,
0.1021574371047232 r, 0.1056710629744951 r, 0.1092611211010309 r,
0.1129282524731764 r, 0.1166730903725168 r, 0.1204962603100498 r,
0.1243983799636342 r, 0.1283800591162231 r, 0.1324418995948859 r,
0.1365844952106265 r, 0.140808431699002 r, 0.1451142866615502 r,
0.1495026295080298 r, 0.1539740213994798 r]
```

```
>y &= r*(1-cos(t))
```

```
        [0, 4.999958333473664e-5 r, 1.999933334222437e-4 r,
4.499662510124569e-4 r, 7.998933390220841e-4 r,
0.001249739605033717 r, 0.00179946006479581 r,
0.002448999746720415 r, 0.003198293697380561 r,
0.004047266988005727 r, 0.004995834721974179 r,
0.006043902043303184 r, 0.00719136414613375 r, 0.00843810628521191 r,
0.009784003787362772 r, 0.01122892206395776 r, 0.01277271662437307 r,
0.01441523309043924 r, 0.01615630721187855 r, 0.01799576488272969 r,
0.01993342215875837 r, 0.02196908527585173 r, 0.02410255066939448 r,
0.02633360499462523 r, 0.02866202514797045 r, 0.03108757828935527 r,
0.03361002186548678 r, 0.03622910363410947 r, 0.03894456168922911 r,
0.04175612448730281 r, 0.04466351087439402 r, 0.04766643011428662 r,
0.05076458191755917 r, 0.05395765647161381 r, 0.05724533447165381 r,
0.06062728715262111 r, 0.06410317632206519 r, 0.06767265439396564 r,
0.07133536442348987 r, 0.07509094014268702 r, 0.07893900599711501 r,
0.08287917718339499 r, 0.08691105968769186 r, 0.09103425032511492 r,
0.09524833678003664 r, 0.09955289764732322 r, 0.1039475024744748 r,
0.1084317118046711 r, 0.113005077220716 r, 0.1176671413898787 r,
0.1224174381096274 r, 0.1272554923542488 r, 0.1321808203223502 r,
0.1371929294852391 r, 0.1422913186361759 r, 0.1474754779404944 r,
0.152744888986584 r, 0.1580990248377314 r, 0.1635373500848132 r,
0.1690593208998367 r, 0.1746643850903219 r, 0.1803519821545206 r,
0.1861215433374662 r, 0.1919724916878484 r, 0.1979042421157076 r,
0.2039162014509444 r, 0.2100077685026351 r, 0.216178334119151 r,
0.2224272812490723 r, 0.2287539850028937 r, 0.2351578127155118 r,
0.2416381240094921 r, 0.2481942708591053 r, 0.2548255976551299 r,
0.2615314412704124 r, 0.2683111311261794 r, 0.2751639892590951 r,
0.2820893303890569 r, 0.2890864619877229 r, 0.2961546843477643 r,
0.3032932906528349 r, 0.3105015670482534 r, 0.3177787927123868 r,
0.3251242399287333 r, 0.3325371741586922 r, 0.3400168541150183 r,
0.3475625318359485 r, 0.3551734527599992 r, 0.3628488558014202 r,
0.3705879734263036 r, 0.3783900317293359 r, 0.3862542505111889 r,
0.3941798433565377 r, 0.4021660177127022 r, 0.4102119749689023 r,
0.418316910536117 r, 0.4264800139275439 r, 0.4347004688396462 r,
0.4429774532337832 r, 0.451310139418413 r]
```

Berikut kita gambar sikloid untuk r=1.

```
>ex &= x-sin(x); ey &= 1-cos(x); aspect(1);
>plot2d(ex,ey,xmin=0,xmax=4pi,square=1); ...
   plot2d("2+cos(x)","1+sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add,color=blue); ...
   plot2d([2,ex(2)],[1,ey(2)],color=red,>add); ...
   plot2d(ex(2),ey(2),>points,>add,color=red); ...
   plot2d("2pi+cos(x)","1+sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add,color=blue); ...
   plot2d([2pi,ex(2pi)],[1,ey(2pi)],color=red,>add);  ...
   plot2d(ex(2pi),ey(2pi),>points,>add,color=red):
```

```
Error : [0,1.66665833335744e-7*r-sin(1.66665833335744e-7*r),1.33330666692022e-6*r-sin(1.33330666692022e-6*r),4.4997

Error generated by error() command

adaptiveeval:
    error(f$|" does not produce a real or column vector");
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
plot2d:
    dw/n,dw/n^2,dw/n;args());
```

Berikut dihitung panjang lintasan untuk 1 putaran penuh. (Jangan salah menduga bahwa panjang lintasan 1 putaran penuh sama dengan keliling lingkaran!)

```
>ds &= radcan(sqrt(diff(ex,x)^2+diff(ey,x)^2)); $ds=trigsimp(ds) // elemen panjang kurva sikloid
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found errexp1
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
```

```
      ds &= radcan(sqrt(diff(ex,x)^2+diff(ey,x)^2)); $ds=trigsimp(ds ...
                                                    ^
```

```
>ds &= trigsimp(ds); $ds
```

$$ds$$

```
>$showev('integrate(ds,x,0,2*pi)) // hitung panjang sikloid satu putaran penuh
```

$$2\,\pi\,ds = 2\,\pi\,ds$$

```
>integrate(mxm("ds"),0,2*pi) // hitung secara numerik
```

```
      Illegal function result in map.
       %evalexpression:
          if maps then return %mapexpression1(x,f$;args());
      gauss:
          if maps then y=%evalexpression(f$,a+h-(h*xn)',maps;args());
      adaptivegauss:
          t1=gauss(f$,c,c+h;args(),=maps);
      Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
      integrate:
          return adaptivegauss(f$,a,b,eps*1000;args(),=maps);
```

```
>romberg(mxm("ds"),0,2*pi) // cara lain hitung secara numerik
```

```
      Wrong argument!

      Cannot combine a symbolic expression here.
      Did you want to create a symbolic expression?
      Then start with &.

      Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
      romberg:
          if cols(y)==1 then return y*(b-a); endif;
      Error in:
      romberg(mxm("ds"),0,2*pi) // cara lain hitung secara numerik ...
                               ^
```

Perhatikan, seperti terlihat pada gambar, panjang sikloid lebih besar daripada keliling lingkarannya, yakni:

Kurvatur (Kelengkungan) Kurva

image: Osculating.png

Aslinya, kelengkungan kurva diferensiabel (yakni, kurva mulus yang tidak lancip) di titik P didefinisikan melalui lingkaran oskulasi (yaitu, lingkaran yang melalui titik P dan terbaik memperkirakan, paling banyak menyinggung kurva di sekitar P). Pusat dan radius kelengkungan kurva di P adalah pusat dan radius lingkaran oskulasi. Kelengkungan adalah kebalikan dari radius kelengkungan:

dengan R adalah radius kelengkungan. (Setiap lingkaran memiliki kelengkungan ini pada setiap titiknya, dapat diartikan, setiap lingkaran berputar 2pi sejauh 2piR.)
Definisi ini sulit dimanipulasi dan dinyatakan ke dalam rumus untuk kurva umum. Oleh karena itu digunakan definisi lain yang ekivalen.

Definisi Kurvatur dengan Fungsi Parametrik Panjang Kurva

Setiap kurva diferensiabel dapat dinyatakan dengan persamaan parametrik terhadap panjang kurva s:

dengan x dan y adalah fungsi riil yang diferensiabel, yang memenuhi:

Ini berarti bahwa vektor singgung

memiliki norm 1 dan merupakan vektor singgung satuan.

Apabila kurvanya memiliki turunan kedua, artinya turunan kedua x dan y ada, maka T'(s) ada. Vektor ini merupakan normal kurva yang arahnya menuju pusat kurvatur, norm-nya merupakan nilai kurvatur (kelengkungan):

Nilai

disebut jari-jari (radius) kelengkungan kurva.

Bilangan riil

disebut nilai kelengkungan bertanda.

Contoh:
Akan ditentukan kurvatur lingkaran

```
>fx &= r*cos(t); fy &=r*sin(t);
>&assume(t>0,r>0); s &=integrate(sqrt(diff(fx,t)^2+diff(fy,t)^2),t,0,t); s // elemen panjang kurva, panjang busur lingkar
```

r t

```
>&kill(s); fx &= r*cos(s/r); fy &=r*sin(s/r); // definisi ulang persamaan parametrik terhadap s dengan substitusi t=s/r
>k &= trigsimp(sqrt(diff(fx,s,2)^2+diff(fy,s,2)^2)); $k // nilai kurvatur lingkaran dengan menggunakan definisi di atas
```

$$\frac{1}{r}$$

Untuk representasi parametrik umum, misalkan

merupakan persamaan parametrik untuk kurva bidang yang terdiferensialkan dua kali. Kurvatur untuk kurva tersebut didefinisikan sebagai

Selanjutnya, pembilang pada persamaan di atas dapat dicari sebagai berikut.

Jadi, rumus kurvatur untuk kurva parametrik

adalah

Jika kurvanya dinyatakan dengan persamaan parametrik pada koordinat kutub

maka rumus kurvaturnya adalah

(Silakan Anda turunkan rumus tersebut!)

Contoh:
Lingkaran dengan pusat (0,0) dan jari-jari r dapat dinyatakan dengan persamaan parametrik

Nilai kelengkungan lingkaran tersebut adalah

Hasil cocok dengan definisi kurvatur suatu kelengkungan.

Kurva

dapat dinyatakan ke dalam persamaan parametrik

sehingga kurvaturnya adalah

Contoh:
Akan ditentukan kurvatur parabola

```
>function f(x) &= a*x^2+b*x+c; $y=f(x)
```

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

```
>function k(x) &= (diff(f(x),x,2))/(1+diff(f(x),x)^2)^(3/2); $'k(x)=k(x) // kelengkungan parabola
```

$$k\left(x\right) = \frac{2\,a}{\left(\left(2\,a\,x + b\right)^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

```
>function f(x) &= x^2+x+1; $y=f(x) // akan kita plot kelengkungan parabola untuk a=b=c=1
```

$$y = x^2 + x + 1$$

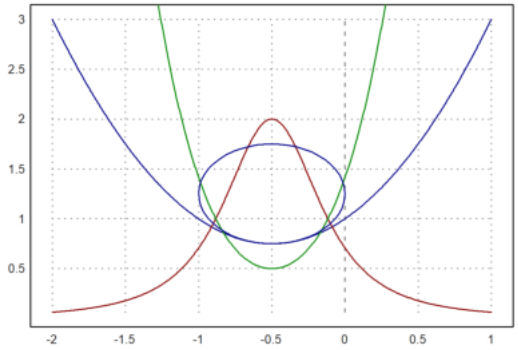
```
>function k(x) &= (diff(f(x),x,2))/(1+diff(f(x),x)^2)^(3/2); $'k(x)=k(x) // kelengkungan parabola
```

$$k\left(x\right) = \frac{2}{\left(\left(2\,x + 1\right)^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Berikut kita gambar parabola tersebut beserta kurva kelengkungan, kurva jari-jari kelengkungan dan salah satu lingkaran oskulasi di titik puncak parabola. Perhatikan, puncak parabola dan jari-jari lingkaran oskulasi di puncak parabola adalah

sehingga pusat lingkaran oskulasi adalah (-1/2, 5/4).

```
>plot2d(["f(x)", "k(x)"],-2,1, color=[blue,red]); plot2d("1/k(x)",-1.5,1,color=green,>add); ...
 plot2d("-1/2+1/k(-1/2)*cos(x)","5/4+1/k(-1/2)*sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add,color=blue):
```



Untuk kurva yang dinyatakan dengan fungsi implisit

dengan turunan-turunan parsial

berlaku

sehingga kurvaturnya adalah

(Silakan Anda turunkan sendiri!)

Contoh 1:
Parabola

dapat dinyatakan ke dalam persamaan implisit

```
>function F(x,y) &=a*x^2+b*x+c-y; $F(x,y)
```

$$-y+a\,x^2+b\,x+c$$

```
>Fx &= diff(F(x,y),x), Fxx &=diff(F(x,y),x,2), Fy &=diff(F(x,y),y), Fxy &=diff(diff(F(x,y),x),y), Fyy &=diff(F(x,y),y,2)
```

$$\begin{matrix}2\ a\ x+b\\ 2\ a\\ -1\\ 0\\ 0\end{matrix}$$

```
>function k(x) &= (Fy^2*Fxx-2*Fx*Fy*Fxy+Fx^2*Fyy)/(Fx^2+Fy^2)^(3/2); $'k(x)=k(x) // kurvatur parabola tersebut
```

$$k\left(x\right)=\frac{2\,a}{\left(\left(2\,a\,x+b\right)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Hasilnya sama dengan sebelumnya yang menggunakan persamaan parabola biasa.

Latihan

- Bukalah buku Kalkulus.
- Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi).
- Untuk setiap fungsi, tentukan anti turunannya (jika ada), hitunglah integral tentu dengan batas-batas yang menarik (Anda tentukan sendiri), seperti contoh-contoh tersebut.
- Lakukan hal yang sama untuk fungsi-fungsi yang tidak dapat diintegralkan (cari sedikitnya 3 fungsi).
- Gambar grafik fungsi dan daerah integrasinya pada sumbu koordinat yang sama.
- Gunakan integral tentu untuk mencari luas daerah yang dibatasi oleh dua kurva yang berpotongan di dua titik. (Cari dan gambar kedua kurva dan arsir (warnai) daerah yang dibatasi oleh keduanya.)
- Gunakan integral tentu untuk menghitung volume benda putar kurva y= f(x) yang diputar mengelilingi sumbu x dari x=a sampai x=b, yakni

(Pilih fungsinya dan gambar kurva dan benda putar yang dihasilkan. Anda dapat mencari contoh-contoh bagaimana cara menggambar benda hasil perputaran suatu kurva.)
- Gunakan integral tentu untuk menghitung panjang kurva y=f(x) dari x=a sampai x=b dengan menggunakan rumus:

(Pilih fungsi dan gambar kurvanya.)
- Apabila fungsi dinyatakan dalam koordinat kutub x=f(r,t), y=g(r,t), r=h(t), x=a bersesuaian dengan t=t0 dan x=b bersesuian dengan t=t1, maka rumus di atas akan menjadi:

- Pilih beberapa kurva menarik (selain lingkaran dan parabola) dari buku kalkulus. Nyatakan setiap kurva tersebut dalam bentuk: a. koordinat Kartesius (persamaan y=f(x)) b. koordinat kutub (r=r(theta)) c. persamaan parametrik x=x(t), y=y(t) d. persamaan implit F(x,y)=0
- Tentukan kurvatur masing-masing kurva dengan menggunakan keempat representasi tersebut (hasilnya harus sama).
- Gambarlah kurva asli, kurva kurvatur, kurva jari-jari lingkaran oskulasi, dan salah satu lingkaran oskulasinya.

Barisan dan Deret

(Catatan: bagian ini belum lengkap. Anda dapat membaca contoh-contoh pengguanaan EMT dan Maxima untuk menghitung limit barisan, rumus jumlah parsial suatu deret, jumlah tak hingga suatu deret konvergen, dan sebagainya. Anda dapat mengeksplor contoh-contoh di EMT atau perbagai panduan penggunaan Maxima di software Maxima atau dari Internet.)

Barisan dapat didefinisikan dengan beberapa cara di dalam EMT, di antaranya:

- dengan cara yang sama seperti mendefinisikan vektor dengan elemen-elemen beraturan (menggunakan titik dua ":");
- menggunakan perintah "sequence" dan rumus barisan (suku ke -n);
- menggunakan perintah "iterate" atau "niterate";
- menggunakan fungsi Maxima "create_list" atau "makelist" untuk menghasilkan barisan simbolik;
- menggunakan fungsi biasa yang inputnya vektor atau barisan;
- menggunakan fungsi rekursif.

EMT menyediakan beberapa perintah (fungsi) terkait barisan, yakni:

- sum: menghitung jumlah semua elemen suatu barisan
- cumsum: jumlah kumulatif suatu barisan
- differences: selisih antar elemen-elemen berturutan

EMT juga dapat digunakan untuk menghitung jumlah deret berhingga maupun deret tak hingga, dengan menggunakan perintah (fungsi) "sum". Perhitungan dapat dilakukan secara numerik maupun simbolik dan eksak.

Berikut adalah beberapa contoh perhitungan barisan dan deret menggunakan EMT.

```
>1:10 // barisan sederhana
```

```
[1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9,  10]
```

```
>1:2:30
```

```
[1,  3,  5,  7,  9,  11,  13,  15,  17,  19,  21,  23,  25,  27,  29]
```

Iterasi dan Barisan

EMT menyediakan fungsi iterate("g(x)", x0, n) untuk melakukan iterasi

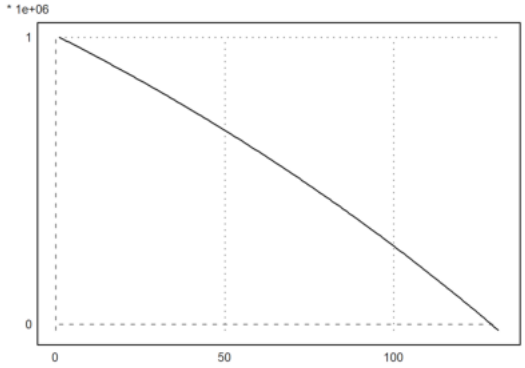
Berikut ini disajikan contoh-contoh penggunaan iterasi dan rekursi dengan EMT. Contoh pertama menunjukkan pertumbuhan dari nilai awal 1000 dengan laju pertambahan 5%, selama 10 periode.

```
>q=1.05; iterate("x*q",1000,n=10)'
```

```
             1000
             1050
           1102.5
          1157.63
          1215.51
          1276.28
           1340.1
           1407.1
          1477.46
          1551.33
          1628.89
```

Contoh berikutnya memperlihatkan bahaya menabung di bank pada masa sekarang! Dengan bunga tabungan sebesar 6% per tahun atau 0.5% per bulan dipotong pajak 20%, dan biaya administrasi 10000 per bulan, tabungan sebesar 1 juta tanpa diambil selama sekitar 10 tahunan akan habis diambil oleh bank!

```
>r=0.005; plot2d(iterate("(1+0.8*r)*x-10000",1000000,n=130)):
```



Silakan Anda coba-coba, dengan tabungan minimal berapa agar tidak akan habis diambil oleh bank dengan ketentuan bunga dan biaya administrasi seperti di atas.

Berikut adalah perhitungan minimal tabungan agar aman di bank dengan bunga sebesar r dan biaya administrasi a, pajak bunga 20%.

```
>$solve(0.8*r*A-a,A), $% with [r=0.005, a=10]
```

$$\left[A=\frac{5\,a}{4\,r}\right]$$

$$[A=2500.0]$$

Berikut didefinisikan fungsi untuk menghitung saldo tabungan, kemudian dilakukan iterasi.

```
>function saldo(x,r,a) := round((1+0.8*r)*x-a,2);
>iterate({{"saldo",0.005,10}},1000,n=6)
```

```
      [1000,  994,  987.98,  981.93,  975.86,  969.76,  963.64]
```

```
>iterate({{"saldo",0.005,10}},2000,n=6)
```

```
      [2000,  1998,  1995.99,  1993.97,  1991.95,  1989.92,  1987.88]
```

```
>iterate({{"saldo",0.005,10}},2500,n=6)
```

```
      [2500,  2500,  2500,  2500,  2500,  2500,  2500]
```

Tabungan senilai 2,5 juta akan aman dan tidak akan berubah nilai (jika tidak ada penarikan), sedangkan jika tabungan awal kurang dari 2,5 juta, lama kelamaan akan berkurang meskipun tidak pernah dilakukan penarikan uang tabungan.

```
>iterate({{"saldo",0.005,10}},3000,n=6)
```

```
      [3000,  3002,  3004.01,  3006.03,  3008.05,  3010.08,  3012.12]
```

Tabungan yang lebih dari 2,5 juta baru akan bertambah jika tidak ada penarikan.

Untuk barisan yang lebih kompleks dapat digunakan fungsi "sequence()". Fungsi ini menghitung nilai-nilai x[n] dari semua nilai sebelumnya, x[1],...,x[n-1] yang diketahui.
Berikut adalah contoh barisan Fibonacci.

```
>sequence("x[n-1]+x[n-2]",[1,1],15)
```

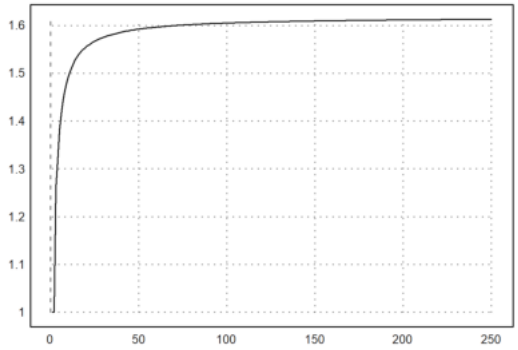
```
      [1,  1,  2,  3,  5,  8,  13,  21,  34,  55,  89,  144,  233,  377,  610]
```

Barisan Fibonacci memiliki banyak sifat menarik, salah satunya adalah akar pangkat ke-n suku ke-n akan konvergen ke pecahan emas:

```
>$'(1+sqrt(5))/2=float((1+sqrt(5))/2)
```

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1.618033988749895$$

```
>plot2d(sequence("x[n-1]+x[n-2]",[1,1],250)^(1/(1:250))):
```



Barisan yang sama juga dapat dihasilkan dengan menggunakan loop.

```
>x=ones(500); for k=3 to 500; x[k]=x[k-1]+x[k-2]; end;
```

Rekursi dapat dilakukan dengan menggunakan rumus yang tergantung pada semua elemen sebelumnya. Pada contoh berikut, elemen ke-n merupakan jumlah (n-1) elemen sebelumnya, dimulai dengan 1 (elemen ke-1). Jelas, nilai elemen ke-n adalah 2^(n-2), untuk n=2, 4, 5, ...

```
>sequence("sum(x)",1,10)
```

```
      [1,  1,  2,  4,  8,  16,  32,  64,  128,  256]
```

Selain menggunakan ekspresi dalam x dan n, kita juga dapat menggunakan fungsi.

Pada contoh berikut, digunakan iterasi

dengan A suatu matriks 2x2, dan setiap x[n] merupakan matriks/vektor 2x1.

```
>A=[1,1;1,2]; function suku(x,n) := A.x[,n-1]
>sequence("suku",[1;1],6)
```

```
      Real 2 x 6 matrix
                1             2             5            13      ...
                1             3             8            21      ...
```

Hasil yang sama juga dapat diperoleh dengan menggunakan fungsi perpangkatan matriks "matrixpower()". Cara ini lebih cepat, karena hanya menggunakan perkalian matriks sebanyak log_2(n).

```
>sequence("matrixpower(A,n).[1;1]",1,6)
```

```
      Real 2 x 6 matrix
                1             5            13            34      ...
                1             8            21            55      ...
```

Spiral Theodorus

image: Spiral_of_Theodorus.png
Spiral Theodorus (spiral segitiga siku-siku) dapat digambar secara rekursif. Rumus rekursifnya adalah:

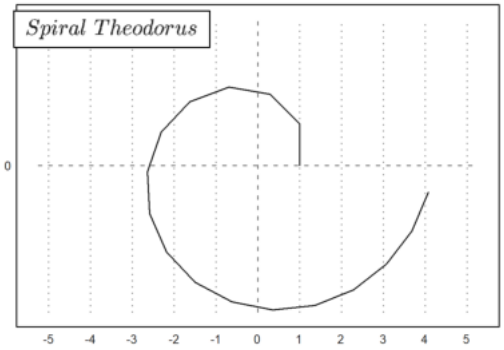
$$x_n = \left(1 + \frac{i}{\sqrt{n-1}}\right) x_{n-1}, \quad x_1 = 1,$$

yang menghasilkan barisan bilangan kompleks.

```
>function g(n) := 1+I/sqrt(n)
```

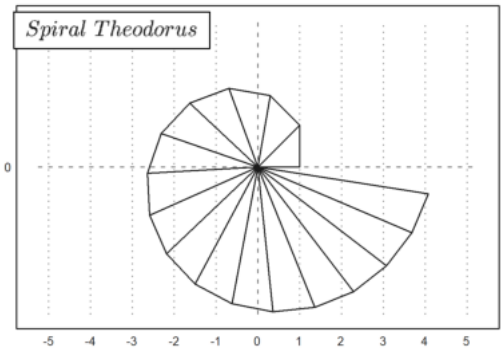
Rekursinya dapat dijalankan sebanyak 17 untuk menghasilkan barisan 17 bilangan kompleks, kemudian digambar bilangan-bilangan kompleksnya.

```
>x=sequence("g(n-1)*x[n-1]",1,17); plot2d(x,r=3.5); textbox(latex("Spiral\ Theodorus"),0.4):
```



Selanjutnya dihubungan titik 0 dengan titik-titik kompleks tersebut menggunakan loop.

```
>for i=1:cols(x); plot2d([0,x[i]],>add); end:
```



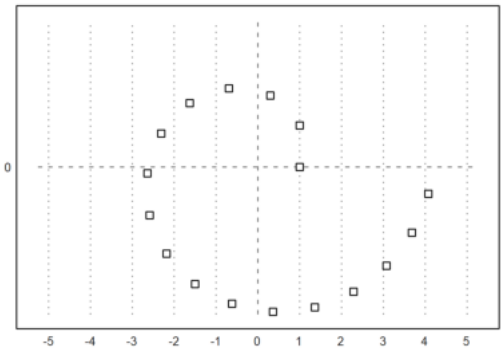

```
>
```

Spiral tersebut juga dapat didefinisikan menggunakan fungsi rekursif, yang tidak memmerlukan indeks dan bilangan kompleks. Dalam hal ini diigunakan vektor kolom pada bidang.

```
>function gstep (v) ...
 w=[-v[2];v[1]];
 return v+w/norm(w);
 endfunction
```

Jika dilakukan iterasi 16 kali dimulai dari [1;0] akan didapatkan matriks yang memuat vektor-vektor dari setiap iterasi.

```
>x=iterate("gstep",[1;0],16); plot2d(x[1],x[2],r=3.5,>points):
```



Kekonvergenan

Terkadang kita ingin melakukan iterasi sampai konvergen. Apabila iterasinya tidak konvergen setelah ditunggu lama, Anda dapat menghentikannya dengan menekan tombol [ESC].

```
>iterate("cos(x)",1) // iterasi x(n+1)=cos(x(n)), dengan x(0)=1.
```

```
      0.739085133216
```

Iterasi tersebut konvergen ke penyelesaian persamaan

$$x = \cos(x).$$

Iterasi ini juga dapat dilakukan pada interval, hasilnya adalah barisan interval yang memuat akar tersebut.

```
>hasil := iterate("cos(x)",~1,2~) //iterasi x(n+1)=cos(x(n)), dengan interval awal (1, 2)
```

```
      ~0.739085133211,0.7390851332133~
```

Jika interval hasil tersebut sedikit diperlebar, akan terlihat bahwa interval tersebut memuat akar persamaan x=cos(x).

```
>h=expand(hasil,100), cos(h) << h
```

```
      ~0.73908513309,0.73908513333~
      1
```

Iterasi juga dapat digunakan pada fungsi yang didefinisikan.

```
>function f(x) := (x+2/x)/2
```

Iterasi x(n+1)=f(x(n)) akan konvergen ke akar kuadrat 2.

```
>iterate("f",2), sqrt(2)
```

```
      1.41421356237
      1.41421356237
```

Jika pada perintah iterate diberikan tambahan parameter n, maka hasil iterasinya akan ditampilkan mulai dari iterasi pertama sampai ke-n.

```
>iterate("f",2,5)
```

```
      [2,  1.5,  1.41667,  1.41422,  1.41421,  1.41421]
```

Untuk iterasi ini tidak dapat dilakukan terhadap interval.

```
>niterate("f",~1,2~,5)
```

```
      [ ~1,2~,  ~1,2~,  ~1,2~,  ~1,2~,  ~1,2~,  ~1,2~ ]
```

Perhatikan, hasil iterasinya sama dengan interval awal. Alasannya adalah perhitungan dengan interval bersifat terlalu longgar. Untuk meingkatkan perhitungan pada ekspresi dapat digunakan pembagian intervalnya, menggunakan fungsi ieval().

```
>function s(x) := ieval("(x+2/x)/2",x,10)
```

Selanjutnya dapat dilakukan iterasi hingga diperoleh hasil optimal, dan intervalnya tidak semakin mengecil. Hasilnya berupa interval yang memuat akar persamaan:

Satu-satunya solusi adalah

```
>iterate("s",~1,2~)
```

```
      ~1.41421356236,1.41421356239~
```

Fungsi "iterate()" juga dapat bekerja pada vektor. Berikut adalah contoh fungsi vektor, yang menghasilkan rata-rata aritmetika dan rata-rata geometri.

Iterasi ke-n disimpan pada vektor kolom x[n].

```
>function g(x) := [(x[1]+x[2])/2;sqrt(x[1]*x[2])]
```

Iterasi dengan menggunakan fungsi tersebut akan konvergen ke rata-rata aritmetika dan geometri dari nilai-nilai awal.

```
>iterate("g",[1;5])
```

```
            2.60401
            2.60401
```

Hasil tersebut konvergen agak cepat, seperti kita cek sebagai berikut.

```
>iterate("g",[1;5],4)
```

```
                1             3       2.61803       2.60403       2.60401
                5       2.23607       2.59002       2.60399       2.60401
```

Iterasi pada interval dapat dilakukan dan stabil, namun tidak menunjukkan bahwa limitnya pada batas-batas yang dihitung.

```
>iterate("g",[~1~;~5~],4)
```

```
      Interval 2 x 5 matrix

      ~0.99999999999999778,1.00000000000000022~     ...
      ~4.99999999999999911,5.00000000000000089~     ...
```

Iterasi berikut konvergen sangat lambat.

```
>iterate("sqrt(x)",2,10)
```

```
      [2,  1.41421,  1.18921,  1.09051,  1.04427,  1.0219,  1.01089,
      1.00543,  1.00271,  1.00135,  1.00068]
```

Kekonvergenan iterasi tersebut dapat dipercepatdengan percepatan Steffenson:

```
>steffenson("sqrt(x)",2,10)
```

```
      [1.04888,  1.00028,  1,  1]
```

Iterasi menggunakan Loop yang ditulis Langsung

Berikut adalah beberapa contoh penggunaan loop untuk melakukan iterasi yang ditulis langsung pada baris perintah.

```
>x=2; repeat x=(x+2/x)/2; until x^2~=2; end; x,
```

```
      1.41421356237
```

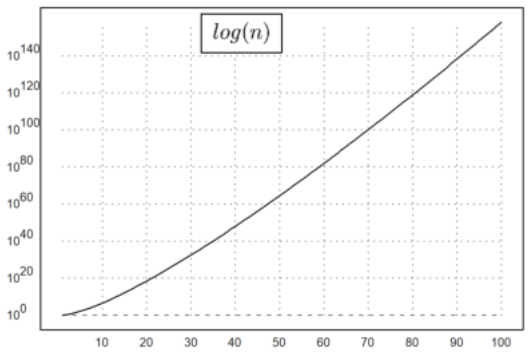
Penggabungan matriks menggunakan tanda "|" dapat digunakan untuk menyimpan semua hasil iterasi.

```
>v=[1]; for i=2 to 8; v=v|(v[i-1]*i); end; v,
```

```
      [1,  2,  6,  24,  120,  720,  5040,  40320]
```

hasil iterasi juga dapat disimpan pada vektor yang sudah ada.

```
>v=ones(1,100); for i=2 to cols(v); v[i]=v[i-1]*i; end; ...
 plot2d(v,logplot=1); textbox(latex(&log(n)),x=0.5):
```




```
>A =[0.5,0.2;0.7,0.1]; b=[2;2]; ...
 x=[1;1]; repeat xnew=A.x-b; until all(xnew~=x); x=xnew; end; ...
 x,
```

```
          -7.09677
          -7.74194
```

Iterasi di dalam Fungsi

Fungsi atau program juga dapat menggunakan iterasi dan dapat digunakan untuk melakukan iterasi. Berikut adalah beberapa contoh iterasi di dalam fungsi.

Contoh berikut adalah suatu fungsi untuk menghitung berapa lama suatu iterasi konvergen. Nilai fungsi tersebut adalah hasil akhir iterasi dan banyak iterasi sampai konvergen.

```
>function map hiter(f$,x0) ...
 x=x0;
 maxiter=0;
 repeat
   xnew=f$(x);
   maxiter=maxiter+1;
   until xnew~=x;
   x=xnew;
 end;
 return maxiter;
 endfunction
```

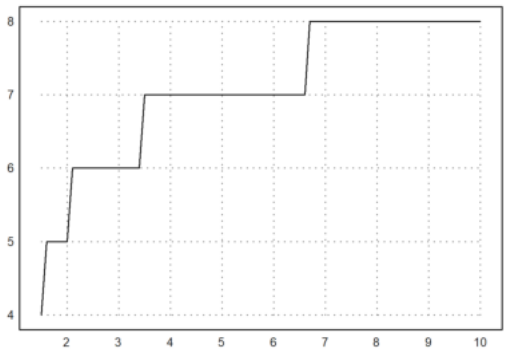
Misalnya, berikut adalah iterasi untuk mendapatkan hampiran akar kuadrat 2, cukup cepat, konvergen pada iterasi ke-5, jika dimulai dari hampiran awal 2.

```
>hiter("(x+2/x)/2",2)
```

```
      5
```

Karena fungsinya didefinisikan menggunakan "map". maka nilai awalnya dapat berupa vektor.

```
>x=1.5:0.1:10; hasil=hiter("(x+2/x)/2",x); ...
   plot2d(x,hasil):
```



Dari gambar di atas terlihat bahwa kekonvergenan iterasinya semakin lambat, untuk nilai awal semakin besar, namun penambahnnya tidak kontinu. Kita dapat menemukan kapan maksimum iterasinya bertambah.

```
>hasil[1:10]
```

```
      [4,  5,  5,  5,  5,  5,  6,  6,  6,  6]
```

```
>x[nonzeros(differences(hasil))]
```

```
      [1.5,  2,  3.4,  6.6]
```

maksimum iterasi sampai konvergen meningkat pada saat nilai awalnya 1.5, 2, 3.4, dan 6.6.

Contoh berikutnya adalah metode Newton pada polinomial kompleks berderajat 3.

```
>p &= x^3-1; newton &= x-p/diff(p,x); $newton
```

$$x-\frac{x^3-1}{3x^2}$$

Selanjutnya didefinisikan fungsi untuk melakukan iterasi (aslinya 10 kali).

```
>function iterasi(f$,x,n=10) ...
 loop 1 to n; x=f$(x); end;
 return x;
 endfunction
```

Kita mulai dengan menentukan titik-titik grid pada bidang kompleksnya.

```
>r=1.5; x=linspace(-r,r,501); Z=x+I*x'; W=iterasi(newton,Z);
```

Berikut adalah akar-akar polinomial di atas.

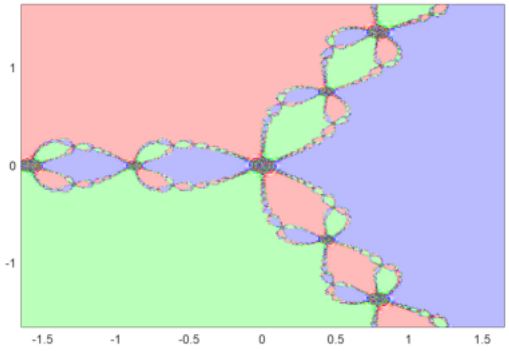
```
>z=&solve(p)()
```

```
      [ -0.5+0.866025i,  -0.5-0.866025i,  1+0i  ]
```

Untuk menggambar hasil iterasinya, dihitung jarak dari hasil iterasi ke-10 ke masing-masing akar, kemudian digunakan untuk menghitung warna yang akan digambar, yang menunjukkan limit untuk masing-masing nilai awal.

Fungsi plotrgb() menggunakan jendela gambar terkini untuk menggambar warna RGB sebagai matriks.

```
>C=rgb(max(abs(W-z[1]),1),max(abs(W-z[2]),1),max(abs(W-z[3]),1)); ...
   plot2d(none,-r,r,-r,r); plotrgb(C):
```



Iterasi Simbolik

Seperti sudah dibahas sebelumnya, untuk menghasilkan barisan ekspresi simbolik dengan Maxima dapat digunakan fungsi makelist().

```
>&powerdisp:true // untuk menampilkan deret pangkat mulai dari suku berpangkat terkecil
```

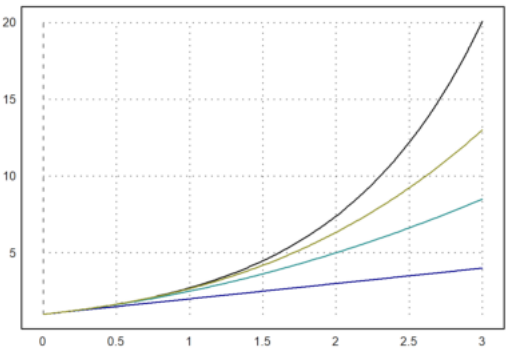
true

```
>deret &= makelist(taylor(exp(x),x,0,k),k,1,3); $deret // barisan deret Taylor untuk e^x
```

$$\left[1+x,1+x+\frac{x^2}{2},1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right]$$

Untuk mengubah barisan deret tersebut menjadi vektor string di EMT digunakan fungsi mxm2str(). Selanjutnya, vektor string/ekspresi hasilnya dapat digambar seperti menggambar vektor eskpresi pada EMT.

```
>plot2d("exp(x)",0,3); // plot fungsi aslinya, e^x
>plot2d(mxm2str("deret"),>add,color=4:6): // plot ketiga deret taylor hampiran fungsi tersebut
```

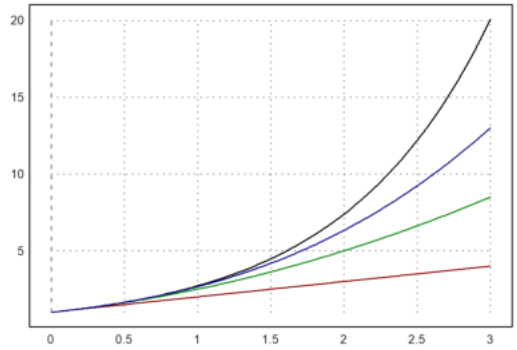


Selain cara di atas dapat juga dengan cara menggunakan indeks pada vektor/list yang dihasilkan.

```
>$deret[3]
```

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$$

```
>plot2d(["exp(x)",&deret[1],&deret[2],&deret[3]],0,3,color=1:4):
```

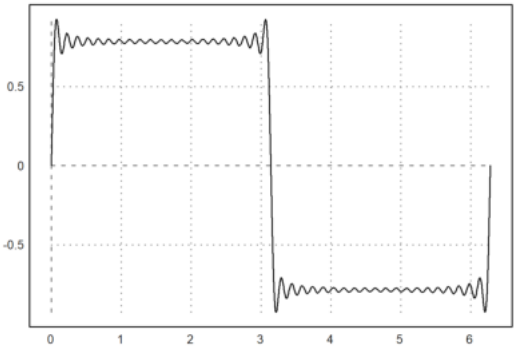



```
>$sum(sin(k*x)/k,k,1,5)
```

$$\sin x+\frac{\sin(2x)}{2}+\frac{\sin(3x)}{3}+\frac{\sin(4x)}{4}+\frac{\sin(5x)}{5}$$

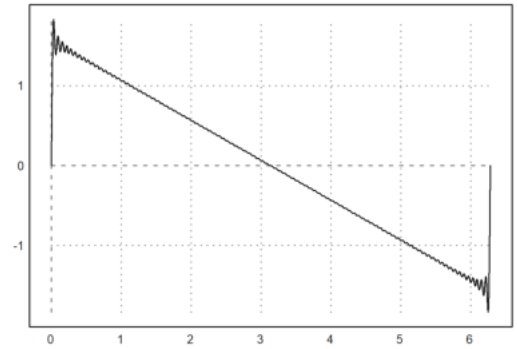
Berikut adalah cara menggambar kurva

```
>plot2d(&sum(sin((2*k+1)*x)/(2*k+1),k,0,20),0,2pi):
```



Hal serupa juga dapat dilakukan dengan menggunakan matriks, misalkan kita akan menggambar kurva

```
>x=linspace(0,2pi,1000); k=1:100; y=sum(sin(k*x')/k)'; plot2d(x,y):
```



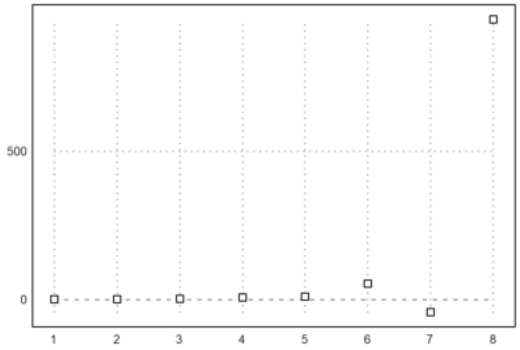
Tabel Fungsi

Terdapat cara menarik untuk menghasilkan barisan dengan ekspresi Maxima. Perintah mxmtable() berguna untuk menampilkan dan menggambar barisan dan menghasilkan barisan sebagai vektor kolom.

Sebagai contoh berikut adalah barisan turunan ke-n x^x di x=1.

```
>mxmtable("diffat(x^x,x=1,n)","n",1,8,frac=1);
```

1	1
2	2
3	3
4	8
5	10
6	54
7	-42
8	944




```
>$'sum(k, k, 1, n) = factor(ev(sum(k, k, 1, n),simpsum=true)) // simpsum:menghitung deret secara simbolik
```

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(1+n)}{2}$$

```
>$'sum(1/(3^k+k), k, 0, inf) = factor(ev(sum(1/(3^k+k), k, 0, inf),simpsum=true))
```

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+3^k}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung.

```
>$'sum(1/x^2, x, 1, inf)= ev(sum(1/x^2, x, 1, inf),simpsum=true) // ev: menghitung nilai ekspresi
```

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

```
>$'sum((-1)^(k-1)/k, k, 1, inf) = factor(ev(sum((-1)^(x-1)/x, x, 1, inf),simpsum=true))
```

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{-1+k}}{k} = -\sum_{x=1}^{\infty} \frac{(-1)^x}{x}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung.

```
>$'sum((-1)^k/(2*k-1), k, 1, inf) = factor(ev(sum((-1)^k/(2*k-1), k, 1, inf),simpsum=true))
```

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{-1+2\,k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{-1+2\,k}$$

```
>$ev(sum(1/n!, n, 0, inf),simpsum=true)
```

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung, harusnya hasilnya e.

```
>&assume(abs(x)<1); $'sum(a*x^k, k, 0, inf)=ev(sum(a*x^k, k, 0, inf),simpsum=true), &forget(abs(x)<1);
```

$$a\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{a}{1-x}$$

Deret geometri tak hingga, dengan asumsi rasional antara -1 dan 1.

```
>$'sum(x^k/k!,k,0,inf)=ev(sum(x^k/k!,k,0,inf),simpsum=true)
```

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

```
>$limit(sum(x^k/k!,k,0,n),n,inf)
```

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

```
>function d(n) &= sum(1/(k^2-k),k,2,n); $'d(n)=d(n)
```

$$d\,(n) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{-k+k^2}$$

```
>$d(10)=ev(d(10),simpsum=true)
```

$$\sum_{k=2}^{10} \frac{1}{-k+k^2} = \frac{9}{10}$$

```
>$d(100)=ev(d(100),simpsum=true)
```

$$\sum_{k=2}^{100} \frac{1}{-k+k^2} = \frac{99}{100}$$

Deret Taylor

Deret Taylor suatu fungsi f yang diferensiabel sampai tak hingga di sekitar x=a adalah:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^k f^{(k)}(a)}{k!}.$$

```
>$'e^x =taylor(exp(x),x,0,10) // deret Taylor e^x di sekitar x=0, sampai suku ke-11
```

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^8}{40320} + \frac{x^9}{362880} + \frac{x^{10}}{3628800}$$

```
>$'log(x)=taylor(log(x),x,1,10)// deret log(x) di sekitar x=1
```

$$\log x = -1 - \frac{(-1+x)^2}{2} + \frac{(-1+x)^3}{3} - \frac{(-1+x)^4}{4} + \frac{(-1+x)^5}{5} - \frac{(-1+x)^6}{6} + \frac{(-1+x)^7}{7} - \frac{(-1+x)^8}{8} + \frac{(-1+x)^9}{9} - \frac{(-1+x)^{10}}{10} + x$$

Materi Tambahan

Fungsi

Fungsi adalah relasi yang memasangkan setiap anggota himpunan domain dengan satu anggota di himpunan kodomain.

Fungsi berkaitan erat dengan 3 hal, yaitu:
- Domain : himpunan nilai x yang boleh dimasukkan ke dalam fungsi.
- Kodomain : himpunan kemungkinan hasil fungsi.
- Range : himpunan hasil yang muncul dari domain

Misalkan kita memiliki

$$f(x) = x^2$$

Maka,
Domain :

$$\mathbb{R}$$

Kodomain :

$$\mathbb{R}$$

Range :

$$y \geq 0$$

Fungsi Aljabar

A. Definisi
Fungsi Aljabar adalah fungsi dalam matematika yang terdiri dari operasi-operasi aljabar, seperti: penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, pemangkatan, dan akar.

B. Sifat-sifat Fungsi Aljabar
1. Domain
Untuk fungsi polinomial: seluruh bilangan real,
Untuk fungsi rasional: seluruh bilangan real, kecuali yang membuat penyebutnya 0
Untuk fungsi irasional: semua bilangan real, kecuali yang membuat hasil operasi di bawah akar bilangan negatif (akar genap)

2. Kontinuitas
Untuk fungsi polinomial: kontinu di semua domain
Untuk fungsi rasional: tidak kontinu pada asimtot vertikal
Untuk fungsi irasional: kontinu di semua domain

3. Simetri
Untuk fungsi polinomial: dapat berfungsi genap

atau berfungsi ganjil

Untuk fungsi rasional: tergantung pada fungsi polinomial pembilang dan penyebutnya
Untuk fungsi irasional: tergantung pada indeks akar dan operasi di dalam akar

C.Macam-macam Fungsi Aljabar
Fungsi aljabar memiliki beberapa jenis berdasarkan bentuk aljabarnya, yaitu:

1. Fungsi Polinomial
Fungsi polinomial merupakan fungsi matematika yang melibatkan operasi penjumlahan, pengurangan, dan perkalian variabel dengan pangkat bilangan bulat non negatif.

a. Fungsi Linear

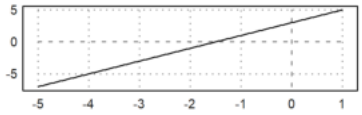
```
>$f(x)=2*x+3
```

$$1+x+x^2=3+2\,x$$

```
>function f(x):=2*x+3
>f(1), f(3), f(-5)
```

```
      5
      9
      -7
```

```
>aspect(4); plot2d("f(x)",-5,1)
>insimg
```



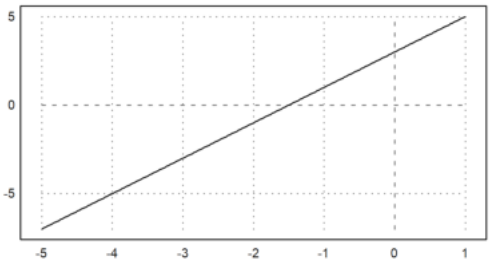

```
>function f(x)&=2*x+3
```

$$3 + 2\ x$$

```
>f(1), f(3), f(-5)
```

```
      5
      9
      -7
```

```
>aspect(2); plot2d("f(x)",-5,1)
>insimg
```




```
>function f(x)&&= 2*x + 3
```

$$3 + 2\ x$$

```
>f(1),f(3),f(-5)
```

```
      Function f not found.
      Try list ... to find functions!
      Error in:
      f(1),f(3),f(-5) ...
           ^
```

```
>plot2d("f(x)",-5,3)
```

```
Function f not found.
Try list ... to find functions!
Error in expression: f(x)
 %ploteval:
    y0=f$(x[1],args());
adaptiveevalone:
    s=%ploteval(g$,t;args());
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
plot2d:
    dw/n,dw/n^2,dw/n,auto;args());
```

b. Fungsi Kuadrat

```
>$h(x)=x^2+4*x-21
```

$$2\,e^{1+3\,x} = -21 + 4\,x + x^2$$

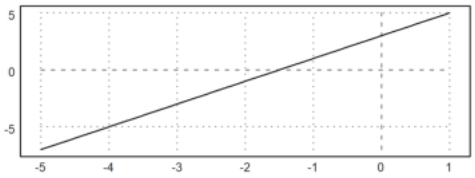
```
>function h(x) := x^2+4*x-21
>h(0:5)
```

```
[-21,  -16,  -9,  0,  11,  24]
```

```
>aspect(3); plot2d("g(x)",0,5)
```

```
Row index 2 out of bounds!
g:
    useglobal; return [(x[1]+x[2])/2;sqrt(x[1]*x[2])]
Error in expression: g(x)
 %ploteval:
    y0=f$(x[1],args());
adaptiveevalone:
    s=%ploteval(g$,t;args());
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
plot2d:
    dw/n,dw/n^2,dw/n,auto;args());
```

```
>insimg
```



c. Fungsi kubik

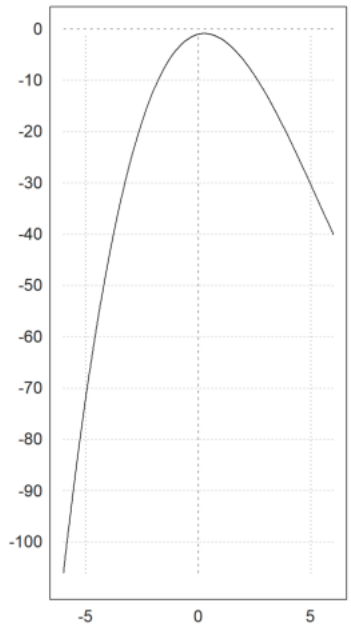
```
>$h(x)=((1/2)*x)^3-2*x^2+x-1
```

$$2\,e^{1+3\,x} = -1 + x - 2\,x^2 + \frac{x^3}{8}$$

```
>function h(x):=((1/2)*x)^3-2*x^2+x-1
>h(-6:6)
```

```
[-106,  -71.625,  -45,  -25.375,  -12,  -4.125,  -1,  -1.875,  -6,
-12.625,  -21,  -30.375,  -40]
```

```
>aspect(1/2); plot2d("h",-6,6)
>insimg
```



2. Fungsi Rasional

Fungsi rasional adalah fungsi matematika yang berbentuk perbandingan antara 2 fungsi polinomial. Berikut bentuk umum dari fungsi rasional:

```
>$k(x)=(x^2+1)/(x-3)
```

$$\frac{2\,a}{\left(1+(b+2\,a\,x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1+x^2}{-3+x}$$

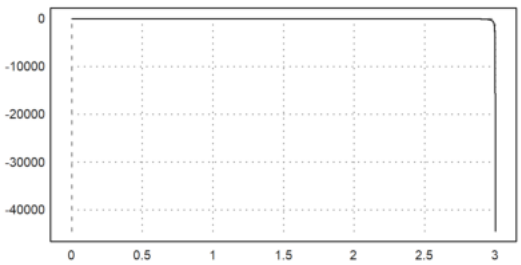
```
>function k(x):=(x^2+1)/(x-3)
>k(30)
```

```
      33.3703703704
```

```
>k(0:3)//Apabila Q(x) bernilai 0 akan muncul
```

```
      Floating point error!
      Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
      k:
          useglobal; return (x^2+1)/(x-3)
      Error in:
      k(0:3)//Apabila Q(x) bernilai 0 akan muncul ...
            ^
```

```
>aspect(2); plot2d("k(x)",0,3)
>insimg
```



3. Fungsi Irasional

Fungsi irasional merupakan fungsi matematika yang memiliki variabel di dalam akar.

Contoh:

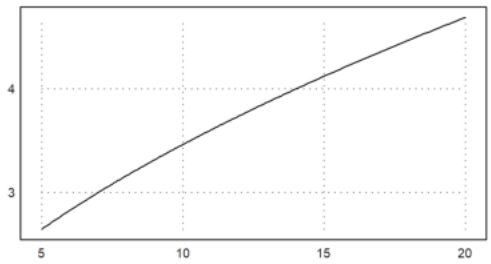
```
>$l(x)=sqrt(x+2)
```

$$l(x) = \sqrt{2+x}$$

```
>function l(x):=sqrt(x+2)
>l(5:20)
```

```
[2.64575,  2.82843,  3,  3.16228,  3.31662,  3.4641,  3.60555,
3.74166,  3.87298,  4,  4.12311,  4.24264,  4.3589,  4.47214,
4.58258,  4.69042]
```

```
>aspect(2); plot2d("l(x)",5,20)
>insimg
```



Fungsi Trigonometri

A. Definisi
Fungsi trigonometri adalah fungsi matematika yang mengandung sudut dan panjang sisi-sisi segitiga siku-siku.

B. Sifat-sifat
1. Periode

2. Domain

Memiliki nilai maksimum dan minimum

Memiliki nilai maksimum dan minimum

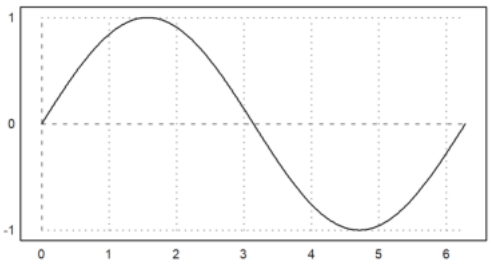
Tidak terbatas
C. Kurva Fungsi Trigonometri

dengan grafik

```
>function m(x) &= sin(x)
```

$$\sin(x)$$

```
>aspect(2); plot2d("m",0,2*pi)
>insimg
```




```
>$m(pi)
```

$$0$$

```
>$float(%)
```

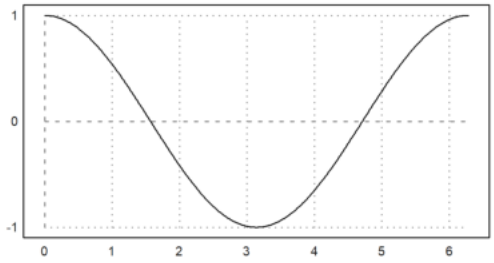
$$0.0$$

```
>function f(x):=cos(x)
>f(0), f(2*pi)
```

```
      1
      1
```

```
>plot2d("f",0,2*pi)
```

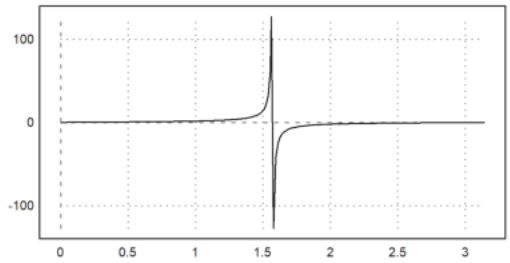
```
>insimg
```




```
>function f(x):=tan(x)
>tan(0), tan(pi)
```

```
      0
      0
```

```
>plot2d("f",0,pi)
>insimg
```



Fungsi Eksponensial

A. Definisi

Fungsi eksponensial adalah fungsi matematika yang variabelnya berada di pangkat. Bentuk umum dari fungsi eksponensial adalah:

dengan

B. Sifat-sifat

1. Domain

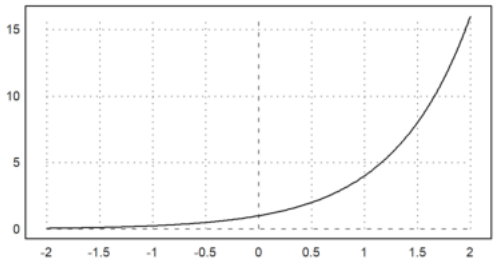
2. Asimtot
Memiliki asimtot horizontal

C. Kurva Fungsi Eksponensial

1. Jika a > 1 maka grafik naik dari kiri ke kanan
Contoh:

g(x) = 4^x

```
>function g(x):=4^x
>plot2d("g", -2, 2)
>insimg
```



2. Jika 0 < a < 1 maka grafik akan turun dari kiri ke kanan
Contoh:

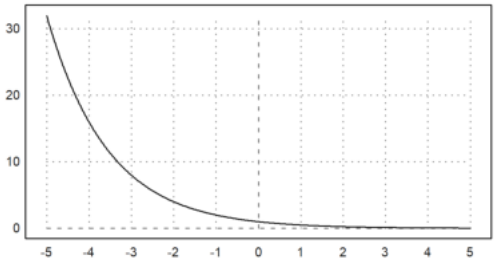
```
>function h(x):=(1/2)^x
>h(9)
```

```
      0.001953125
```

```
>hmap(1:3)
```

```
      [0.5,  0.25,  0.125]
```

```
>plot2d("h",-5, 5)
>insimg
```



Fungsi Logaritma

A. Definisi
Fungsi logaritma merupakan fungsi yang berkebalikan dengan fungsi eksponensial. Jika terdapat fungsi eksponensial

maka
bentuk umum dari fungsi logaritma adalah

dengan

B. Sifat-sifat

1. Domain

2. Asimtot
Memiliki asimtot vertikal

C. Kurva Fungsi Logaritma
1. Jika

maka grafik naik dari kiri ke kanan

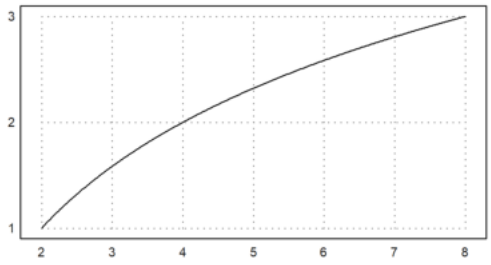
```
>$f(x)=log(x)/log(2)
```

$$3+2\,x=\frac{\log x}{\log 2}$$

```
>function f(x):= log(x)/log(2)
>fmap(2:8)
```

```
      [1,  1.58496,  2,  2.32193,  2.58496,  2.80735,  3]
```

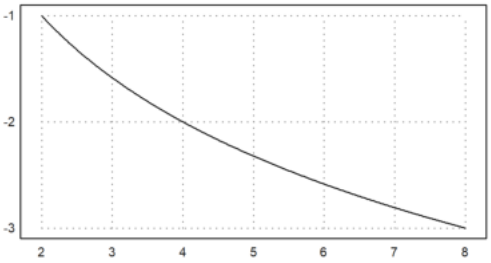
```
>plot2d("f",2,8)
>insimg
```



2. Jika

maka grafik turun dari kiri ke kanan

```
>function g(x):= log(x)/log(1/2)
>plot2d("g",2,8)
>insimg
```



Komposisi Fungsi

A. Definisi
Komposisi fungsi adalah menggabungkan dua fungsi menjadi fungsi baru.
Jika ada 2 fungsi f(x) dan g(x) maka komposisi fungsi adalah

B. Sifat-sifat

1. Tidak komutatif

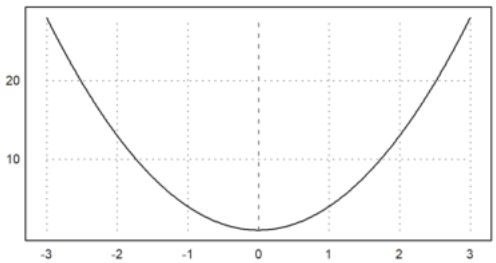
2. Asosiatif

3. Invers

C. Contoh
Diketahui

maka

```
>function f(x):=3*x+1
>function g(x):=x^2
>function h(x):=f(g(x))
>plot2d("h",-3,3)
>insimg
```



Contoh:

```
>function g(x)&=x^2*cos(x)
```

$$x^2 \cos(x)$$

```
>function h(x)&=2*x
```

```
                                    2 x
```

```
>function k(x)&=g(h(x))
```

```
                                  2
                            4 x  cos(2 x)
```

```
>$k(pi)
```

$$4\pi^2$$

```
>$float(%)
```

$$39.47841760435743$$

```
>function l(x)&= f(g(h(x)))
```

```
                                  2
                          3 + 8 x  cos(2 x)
```

```
>$l(pi)
```

$$3+8\pi^2$$

```
>$float(%)
```

$$81.95683520871486$$

DEFINISI LIMIT

Limit adalah nilai yang didekati oleh suatu fungsi

$f(x)$ ketika variabel x mendekati suatu bilangan tertentu

(atau menuju tak hingga).

Dapat ditulis:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Artinya nilai $f(x)$ dapat dibuat sedekat mungkin dengan L

jika x cukup dekat dengan a (tetapi $x \neq a$).

Limit Kiri

Limit kiri suatu fungsi di titik a (ditulis $\lim_{x\to a^-} f(x)$) adalah nilai yang

didekati oleh $f(x)$ ketika x mendekati a dari sebelah kiri (dengan $x < a$).

Intinya: kita melihat perilaku fungsi saat x mendekati a dari nilai yang lebih kecil dari a

Limit Kanan

Limit kanan suatu fungsi di titik a (ditulis $\lim_{x\to a^+} f(x)$) adalah nilai yang

didekati oleh $f(x)$ ketika x mendekati a dari sebelah kanan (dengan $x > a$).

Intinya: kita melihat perilaku fungsi saat x mendekati a dari nilai yang lebih besar dari a

Jika $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$,

maka $\lim_{x\to a} f(x) = L$

Jika $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$,

maka $\lim_{x\to a} f(x)$ tidak ada

CONTOH SEDERHANA

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ jika } x < 0 \\ 2 \text{ jika } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$$

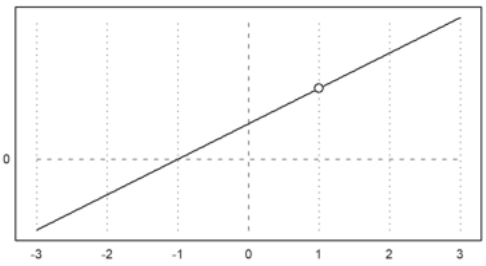
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) \text{ tidak ada}$$

Sebagai contoh, lihatlah grafik dari fungsi berikut

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

```
>plot2d("(x^2-1)/(x-1)",-3,3); plot2d(1,2,>points,style="ow",>add):
```



Penyelesaian Limit

1. Substitusi

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Contoh:

$$\lim_{x\to 2} x + 2 = 2 + 2 = 4$$

2. Faktorisasi
Yaitu dengan menyederhanakan bentuk f(x) terlebih dahulu, contoh:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x + 1 = 1 + 1 = 2$$

3. L'Hopital

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Contoh:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2x}{1} = 2 \cdot 1 = 2$$

Limit di EMT

Perhitungan limit pada EMT dapat dilakukan dengan menggunakan fungsi Maxima, yakni "limit".

Fungsi "limit" dapat digunakan untuk menghitung limit fungsi dalam bentuk ekspresi maupun fungsi yang sudah didefinisikan sebelumnya. Nilai limit dapat dihitung pada sebarang nilai atau pada tak hingga (-inf, minf, dan inf). Limit kiri dan limit kanan juga dapat dihitung, dengan cara memberi opsi "plus" atau "minus". Hasil limit dapat berupa nilai, "und" (tak definisi), "ind" (tak tentu namun terbatas), "infinity" (kompleks tak hingga).

Perhatikan beberapa contoh berikut. Perhatikan cara menampilkan perhitungan secara lengkap, tidak hanya menampilkan hasilnya saja.

syntax: $showev('limit(f(x),x,a)):
menampilkan nilai limit f(x) untuk x mendekati a

```
>$showev('limit(sqrt(x^2-3*x)/(x+1),x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{-3x+x^2}}{1+x} = 1$$

Untuk limit kanan atau kiri, syntax nya adalah:
$showev('limit(f(x),x,a,plus atau minus))

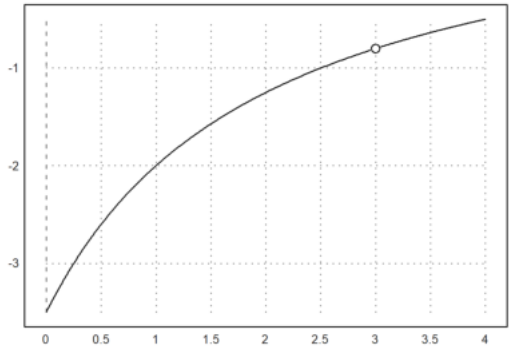
```
>$showev('limit((x^3-13*x^2+51*x-63)/(x^3-4*x^2-3*x+18),x,3,minus))
```

$$\lim_{x\uparrow 3} \frac{-63+51x-13x^2+x^3}{18-3x-4x^2+x^3} = -\frac{4}{5}$$

maxima: 'limit((x^3-13*x^2+51*x-63)/(x^3-4*x^2-3*x+18),x,3)=limit((x^3-13*x^2+51*x-63)/(x^3-4*x^2-3*x+18),x,3)

Fungsi tersebut diskontinu di titik x=3. Berikut adalah grafik fungsinya.

```
>aspect(1.5); plot2d("(x^3-13*x^2+51*x-63)/(x^3-4*x^2-3*x+18)",0,4); plot2d(3,-4/5,>points,style="ow",>add):
```



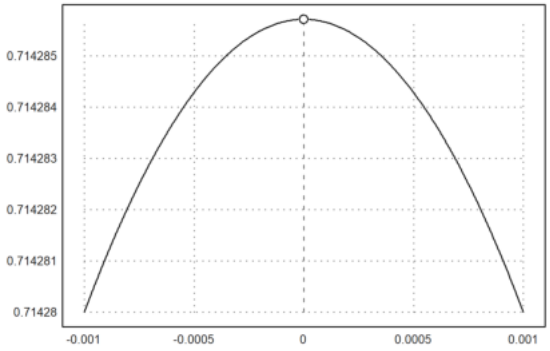

```
>$limit(2*x*sin(x)/(1-cos(x)),x,0)
```

$$4$$

maxima: 'limit(2*x*sin(x)/(1-cos(x)),x,0)=limit(2*x*sin(x)/(1-cos(x)),x,0)

Fungsi tersebut diskontinu di titik x=0. Berikut adalah grafik fungsinya.

```
>plot2d("cot(7*x)/cot(5*x)",-0.001,0.001); plot2d(0,5/7,>points,style="ow",>add):
```




```
>$showev('limit(((x/8)^(1/3)-1)/(x-8),x,8))
```

$$\lim_{x\to 8}\frac{-1+\frac{x^{\frac{1}{3}}}{2}}{-8+x}=\frac{1}{24}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit(1/(2*x-1),x,0))
```

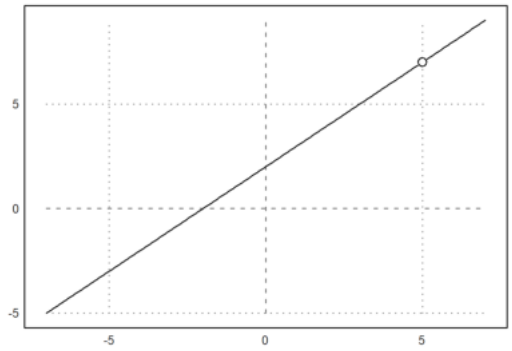
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{-1+2\,x}=-1$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit((x^2-3*x-10)/(x-5),x,5))
```

$$\lim_{x\to 5}\frac{-10-3\,x+x^2}{-5+x}=7$$

```
>plot2d("(x^2-3*x-10)/(x-5)",-7,7); plot2d(5,7,>points,style="ow",>add):
```

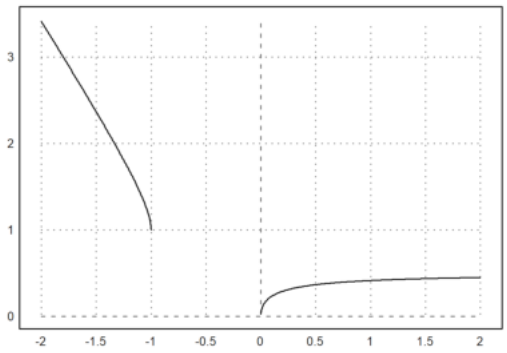


Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit(sqrt(x^2+x)-x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty} -x+\sqrt{x+x^2}=\frac{1}{2}$$

```
>plot2d("sqrt(x^2+x)-x"):
```




```
>$showev('limit(abs(x-1)/(x-1),x,1,minus))
```

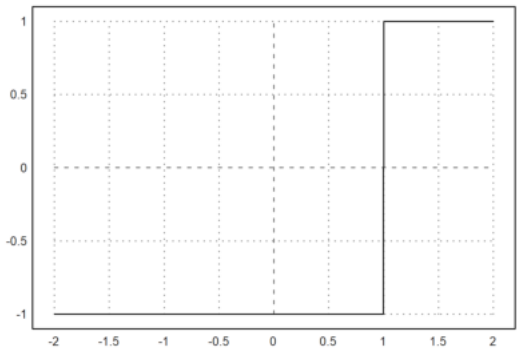
$$\lim_{x\uparrow 1} \frac{|-1+x|}{-1+x}=-1$$

```
>$showev('limit(abs(x-1)/(x-1),x,1))
```

$$\lim_{x\to 1} \frac{|-1+x|}{-1+x}=und$$

Hitung limit di atas untuk x menuju 1 dari kanan.
Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

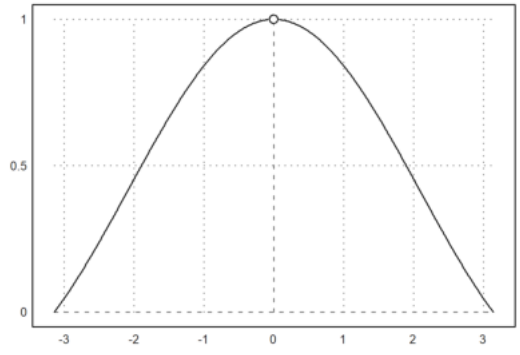
```
>plot2d("abs(x-1)/(x-1)"):
```




```
>$showev('limit(sin(x)/x,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}=1$$

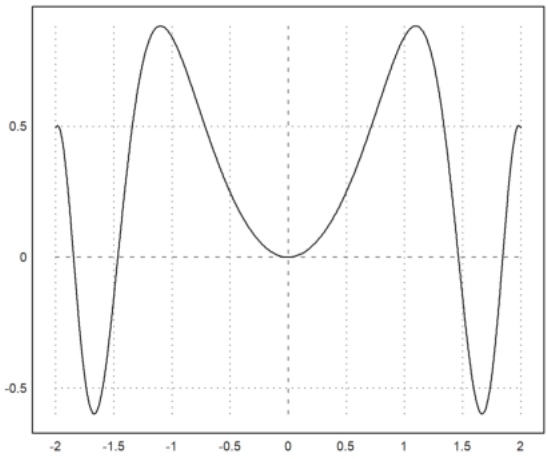
```
>plot2d("sin(x)/x",-pi,pi); plot2d(0,1,>points,style="ow",>add):
```



```
>$showev('limit(sin(x^3)/x,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^3}{x} = 0$$

```
>aspect(1.2); plot2d("sin(x^3)/x"):
```




```
>$showev('limit(e^x/x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x}$$

```
>$showev('limit(log(x), x, minf))
```

$$\lim_{x\to-\infty} \log x = infinity$$

```
>$showev('limit((-2)^x,x, inf))
```

$$\lim_{x\to\infty} (-2)^x = infinity$$

```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,2,minus))
```

$$\lim_{t\uparrow 2} -\sqrt{2-t}+t = 2$$

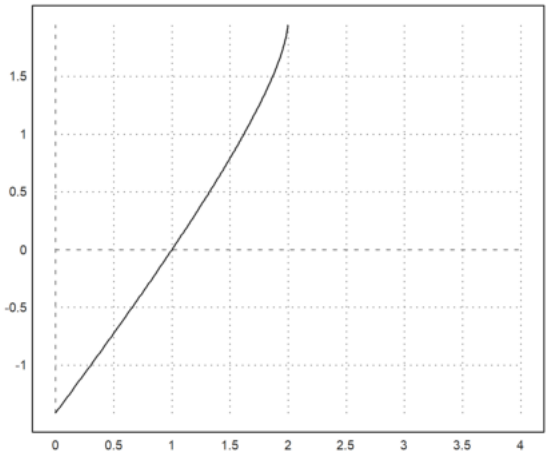
```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,2,plus))
```

$$\lim_{t\downarrow 2} -\sqrt{2-t}+t = 2$$

```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,5,plus)) // Perhatikan hasilnya
```

$$\lim_{t\downarrow 5} -\sqrt{2-t}+t = 5-\sqrt{3}\,i$$

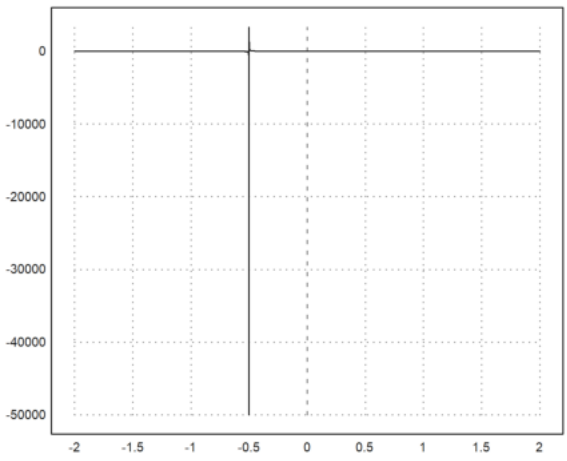
```
>plot2d("x-sqrt(2-x)",0,4):
```



```
>$showev('limit((x^2-9)/(2*x^2-5*x-3),x,3))
```

$$\lim_{x\to 3}\frac{-9+x^2}{-3-5\,x+2\,x^2}=\frac{6}{7}$$

```
>plot2d("(x^2-9)/(2*x^2-5*x-3)"):
```




```
>$showev('limit((1-cos(x))/x,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

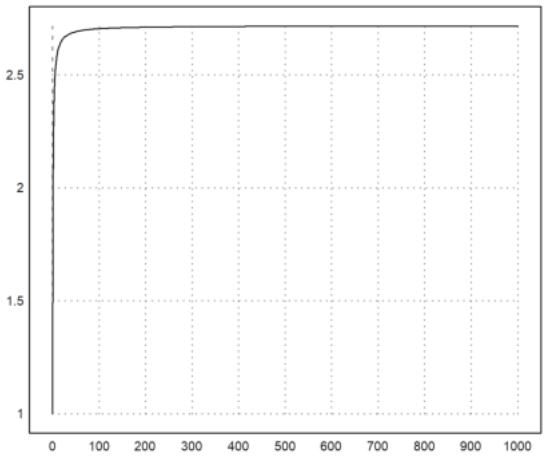
```
>$showev('limit((x^2+abs(x))/(x^2-abs(x)),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+|x|}{x^2-|x|}=-1$$

```
>$showev('limit((1+1/x)^x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

```
>plot2d("(1+1/x)^x",0,1000):
```




```
>$showev('limit((1+k/x)^x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{r\,x}\right)^{x}=e^{\frac{1}{r}}$$

```
>$showev('limit((1+x)^(1/x),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

```
>$showev('limit((x/(x+k))^x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\frac{1}{r}+x}\right)^{x}=e^{-\frac{1}{r}}$$

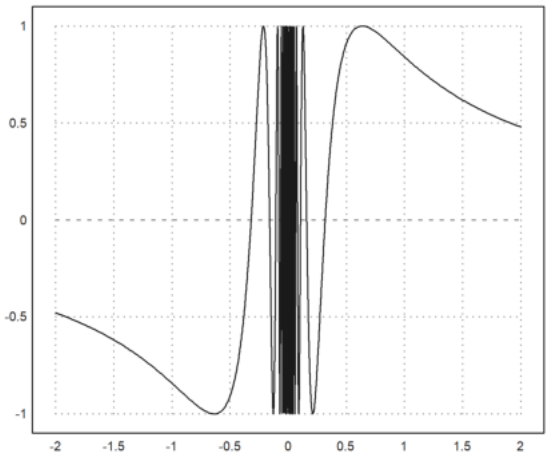
```
>$showev('limit((E^x-E^2)/(x-2),x,2))
```

$$\lim_{x\to 2}\frac{-e^2+e^x}{-2+x}=e^2$$

```
>$showev('limit((1/x),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=infinity$$

```
>plot2d("sin(1/x)"):
```




```
>$showev('limit(sin(1/x),x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

Latihan

1. Tentukan nilai dari

$$\lim_{x\to 2}x-5$$

$$\lim_{x\to\infty}x-5$$

```
>$showev('limit(x-5,x,2))
```

$$\lim_{x\to 2}-5+x=-3$$

```
>$showev('limit(x-5,x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}-5+x=\infty$$

2. Tentukan nilai dari:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x)}{2x}$$

```
>$showev('limit(sin(x)/(2*x),x,0))
```

$$\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}{2}=\frac{1}{2}$$

```
>$showev('limit(sin(x)/(2*x),x,inf))
```

$$\frac{\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}}{2}=0$$

3. Tentukan nilai dari

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{(x-\pi/4)^2}{(\tan(x)-1)^2}$$

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{(x-\pi/4)^2}{(\tan(x)-1)^2}$$

```
>$showev('limit(((x-pi/4)^2/(tan(x)-1)^2),x,pi/4))
```

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\left(-\frac{\pi}{4}+x\right)^2}{\left(-1+\tan x\right)^2}=\frac{1}{4}$$

```
>$showev('limit(((x-pi/4)^2/(tan(x)-1)^2),x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(-\frac{\pi}{4}+x\right)^2}{\left(-1+\tan x\right)^2}=und$$

4. Tentukan nilai dari

$$\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\sin(2x)}{\sin(x^2)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\sin(2x)}{\sin(x^2)}$$

```
>$showev('limit(x*sin(2*x)/sin(x^2),x,0))
```

$$\lim_{x\to0}\frac{x\,\sin\left(2\,x\right)}{\sin x^2}=2$$

```
>$showev('limit(x*sin(2*x)/sin(x^2),x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\,\sin\left(2\,x\right)}{\sin x^2}=und$$

5. Tentukan nilai dari

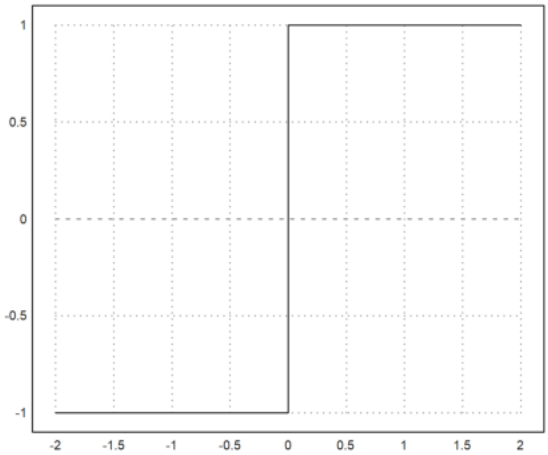
$$\lim_{x\to0}\frac{|x|}{x}$$

atau tunjukkan bahwa limit tersebut tidak ada

```
>$showev('limit(abs(x)/x,x,0))
```

$$\lim_{x\to0}\frac{|x|}{x}=und$$

```
>plot2d("abs(x)/x"):
```



Turunan Fungsi

Turunan fungsi mengukur seberapa cepat nilai suatu fungsi berubah terhadap variabelnya. Secara geometris, turunan pada titik tertentu adalah kemiringan garis singgung pada kurva di titik tersebut

Definisi turunan:
Turunan dari sebuah fungsi y=f(x) terhadap x didefinisikan menggunakan limit sebagai berikut:

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Notasi
Notasi umum untuk turunan adalah

$$f'(x)$$

(notasi Lagrange) atau

$$\frac{dy}{dx}$$

(notasi Leibniz).

Diferensiasi
Proses mencari turunan suatu fungsi disebut diferensiasi.

Sifat-Sifat Turunan

Turunan memiliki beberapa sifat dasar yang mempermudah perhitungannya:

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

Sehingga turunan dari fungsi tersebut

$$f'(x) = 0$$

$$f(x) = x.$$

Sehingga turunan dari fungsi tersebut

$$f'(x) = 1$$

Penjumlahan dan Pengurangan

$$\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = f'(x) \pm g'(x)$$

Perkalian

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Pembagian

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Turunan Berbagai Jenis Fungsi

Turunan Fungsi Aljabar

Fungsi aljabar adalah fungsi yang melibatkan operasi dasar aljabar. Turunan fungsi aljabar Menggunakan aturan pangkat, aturan konstanta, aturan jumlah/selisih, aturan perkalian, dan aturan pembagian.

Rumus Umum
Jika

$$f(x) = ax^n$$

maka

$$f'(x) = an \cdot x^{n-1}$$

contoh

$$f(x) = 2x^2$$

Maka, turunan fungsinya

$$f'(x) = 2.2 \cdot x^{2-1} = (4x)$$

```
>$diff(2*x^2,x)
```

$$4\,x$$

```
>$diff((x^2 + 3*x)/(x - 1), x)
```

$$\frac{3+2\,x}{-1+x} - \frac{3\,x+x^2}{(-1+x)^2}$$

```
>$diff((3*x^2 + 5)*(2*x - 1), x)
```

$$6\,x\,(-1+2\,x)+2\,\left(5+3\,x^2\right)$$

Turunan Fungsi Trigonometri

Aturan turunan berlaku untuk fungsi trigonometri seperti sinus, kosinus, dan tangen.

Rumus dasar:

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x"$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

```
>function f(x) &= sin(3*x)
```

$$\sin(3\ x)$$

```
>$showev('diff(f(x),x)) // turunan f(x)=sin(3x
```

$$\frac{d}{d\,x}\,\sin\left(3\,x\right)=3\,\cos\left(3\,x\right)$$

```
>function g(x) &= cos(2*x^2)
```

$$\cos(2\ x^2)$$

```
>$showev('diff(g(x),x)) // turunan g(x)=cos(2x^2)
```

$$\frac{d}{d\,x}\,\cos\left(2\,x^2\right)=-4\,x\,\sin\left(2\,x^2\right)$$

```
>function h(x) &= tan(x^3)
```

$$\tan(x^3)$$

```
>$showev('diff(h(x),x)) // turunan h(x)=tan(x^3)
```

$$\frac{d}{d\,x}\,\tan x^3=3\,x^2\,\sec^2 x^3$$

Turunan Fungsi Eksponensial

Fungsi eksponensial memiliki bentuk

$$f(x) = a^x$$

atau

$$e^x$$

dimana e adalah konstanta Euler

Turunan fungsi eksponensial adalah perkalian konstanta dengan dirinya sendiri.

Rumus Dasar

$$\frac{d}{dx}\,(e^x) = e^{x"}$$

$$\frac{d}{dx}\,(a^x) = a^x \ln a$$

contoh 1

$$f(x) = e^{2x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2e^{2x}$$

```
>$diff(f(x), x) = 2*exp(2*x)
```

$$3\cos(3x) = 2e^{2x}$$

contoh 2

$$\frac{d}{dx}(5e^{2x}) = 10e^{2x}$$

```
>$diff(5*exp(2*x), x)
```

$$10e^{2x}$$

contoh 3

$$\frac{d}{dx}((3x^2+2)e^{x}) = e^{x}(3x^2+6x+2)$$

```
>$diff((3*x^2 + 2)*exp(x), x)
```

$$6xe^{x} + \left(2+3x^{2}\right)e^{x}$$

Turunan Fungsi Logaritma

Fungsi logaritma adalah invers dari fungsi eksponensial.

Rumus Dasar

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

contoh satu

$$\frac{d}{dx}(2\ln(x^2+1))$$

```
>$diff(2*log(x^2 + 1), x)
```

$$\frac{4x}{1+x^2}$$

contoh 2

$$\frac{d}{dx}\ln(\sqrt{x})$$

```
>$diff(log(sqrt(x)), x)
```

$$\frac{1}{2x}$$

contoh 3

$$\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

```
>$diff(log((x+1)/(x-1)), x)
```

Turunan Fungsi Komposisi (Aturan Rantai)

Komposisi fungsi adalah penggabungan dua fungsi atau lebih.
Aturan rantai digunakan untuk mencari turunan dari fungsi komposisi.

Rumus Dasar

$$Jika\ y = f(g(x)),\ maka\ \frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f(x) = sin(2x+1)$$

```
>$diff(sin(2*x + 1), x)
```

$$2\cos(1+2x)$$

```
>$diff(cos(x^3 - 4*x), x)
```

$$\left(4-3x^{2}\right)\sin\left(-4x+x^{3}\right)$$

```
>$diff(log(5*x^2 + 1), x)
```

$$\frac{10\,x}{1+5\,x^2}$$

```
>
```

Berikut adalah contoh-contoh menentukkan turunan fungsi menggunakan definisi turunan (limit)

```
>$showev('limit(((t+k)^3-t^3)/k,k,0)) // turunan t^3
```

```
      Maxima said:
      limit: variable must be a symbol or subscripted symbol; found: 1/r
      #0: showev(f='limit(r*(-t^3+(1/r+t)^3),1/r,0))
       -- an error. To debug this try: debugmode(true);

      Error in:
       $showev('limit(((t+k)^3-t^3)/k,k,0)) // turunan t^3 ...
                                            ^
```

```
>r &= expand((t+k)^3-t^3)|simplify; $r //pembilang dijabarkan dan disederhanakan
```

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{r^3}+\frac{3t}{r^2}+\frac{3t^2}{r}\right)^3}+\frac{3t}{\left(\frac{1}{r^3}+\frac{3t}{r^2}+\frac{3t^2}{r}\right)^2}+\frac{3t^2}{\frac{1}{r^3}+\frac{3t}{r^2}+\frac{3t^2}{r}}$$

```
>s &= ratsimp(r/k); $s // ekspresi yang akan dihitung limitnya disederhanakan
```

$$\frac{1+3t\left(\frac{1}{r^3}+\frac{3t}{r^2}+\frac{3t^2}{r}\right)+3t^2\left(\frac{1}{r^3}+\frac{3t}{r^2}+\frac{3t^2}{r}\right)^2}{\left(\frac{1}{r^3}+\frac{3t}{r^2}+\frac{3t^2}{r}\right)^2}$$

```
>$limit(s,k,0) // nilai limit sebagai turunan
```

$$s$$

INTEGRAL TAK TENTU

A. DEFINISI
Fungsi untuk menentukan integral adalah integrate. Fungsi ini dapat
digunakan untuk menentukan, baik integral tentu maupun tak tentu(jika
fungsinya memiliki antiderivatif).Integral tak tentu (indefinite integral) atau anti-turunan dari suatu
fungsi f(x) adalah suatu fungsi F(x) sedemikian sehingga turunan dari
F(x) sama dengan f(x). Dengan kata lain:

$$\mathrm{F}'(x) = f(x).$$

atau

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

di mana C adalah konstanta integrasi (karena turunan dari konstanta
adalah nol, maka ada banyak fungsi F yang berbeda hanya selisih
konstanta menghasilkan turunan sama).

Integral Tak Tentu tidak menghasilkan nilai(angka)tunggal, melainkan
menghasilkan suatu fungsi

B. Sifat-Sifat Integral Tak Tentu

1. Integral dari Fungsi Pangkat

```
>$showev('integrate(x^n,x))
```

```
      Answering "Is n equal to -1?" with "no"
```

```
>$showev('integrate(x^2,x))
>$showev('integrate(x^3,x))
```

2. Sifat Linearitas

Artinya: Integral dari penjumlahan/pengurangan fungsi adalah jumlah/pengurangan integral masing-masing fungsi.

```
>$showev('integrate(3*x^5 + x^3,x))
>$showev('integrate(6*x^3-2*x^2,x))
>$showev('integrate(7*y^2-6*y,y))
>$showev('integrate(3*x^2 + 6*x,x))
```

3. Integral dari Konstanta

Artinya: Integral dari bilangan tetap adalah bilangan tersebut dikalikan dengan variabel.

Contoh:

```
>$showev('integrate(9*x^2, x))
>$showev('integrate(1/2*x^4, x))
```

```
>$showev('integrate(-4*x^5,x))
```

4. Integral Fungsi Trigonometri

Integral fungsi trigonometri adalah integral yang melibatkan fungsi sinus, cosinus, tangen, dan fungsi trigonometri lainnya.
Tujuannya sama seperti integral biasa: mencari fungsi asal (antiturunan) dari fungsi trigonometri tersebut.

```
>$showev('integrate(sin(x), x))
>$showev('integrate(cos(x), x))
>$showev('integrate(1/cos(x)^2, x))
>$showev('integrate(1/sin(x)^2, x))
>$showev('integrate(sin(x) + cos(x), x))
>$showev('integrate(sin(x)*cos(x), x))
>$showev('integrate(sin(x)^2, x))
>$showev('integrate(sin(x) + 2*cos(2*x), x))
```

C. Kurva Fungsi Antiderivatif

Kurva integral tak tentu adalah grafik fungsi hasil antiturunan(antiderivatif) dari suatu fungsi f(x).

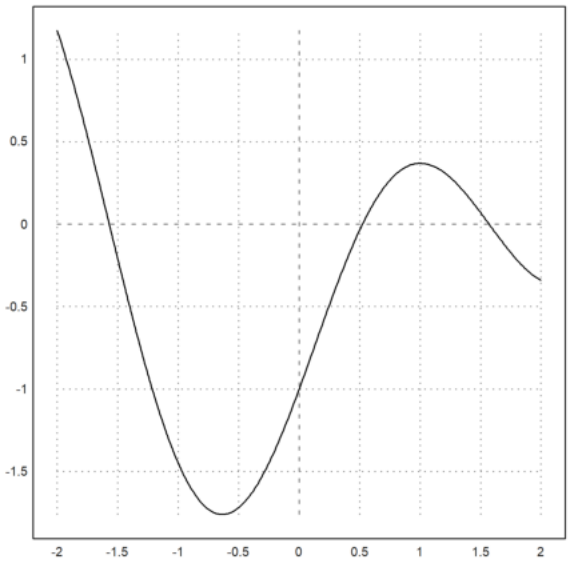
Jika

Maka

Kurva yang digambar adalah grafik y = F(x)+C,sebagai konstanta.

Hubungan dengan Fungsi Asalnya:
1. Jika f(x) positif, maka grafik F(x) meningkat (naik).
2. Jika f(x) negatif, maka grafik F(x) menurun (turun).

```
>$showev('integrate(3*x^2 + 6*x,x))
>plot2d("x^3 + 3*x^2"):
>$showev('integrate(sin(x) + 2*cos(2*x), x))
>plot2d("sin(2x) - cos (x)"):
```




```
>$showev('integrate(-3*x^2 - 6*x,x))
>plot2d("-x^3 - 3*x^2"):
>$showev('integrate(-9*x^3 - 2*x^2,x))
>plot2d("-9*x^4/4 - 2*x^3/3"):
>$showev('integrate(-4*x^3,x))
>plot2d("-x^4"):
```

INTEGRAL TENTU

DEFINISI INTEGRAL TENTU

Integral tentu mengukur luas daerah di bawah kurva fungsi antara dua titik pada sumbu-x, yaitu batas bawah dan batas atas. Integral ini sangat penting dalam berbagai bidang seperti fisika, teknik, dan matematika.

Definisi Formal
integral tentu dari fungsi f(x) pada interval [a, b] didefinisikan sebagai:

di mana:

Integral tentu dapat divisualisasikan sebagai luas di bawah fungsi f(x)dan di atas sumbu-x, dari x=a sampai x=b.

SIFAT SIFAT INTEGRAL TENTU

1. BATAS SAMA

2. PEMBALIKAN BATAS

3. PENJUMLAHAN INTERVAL

4. LINERITAS INTEGRAL

dan

5. PERBANDINGAN FUNGSI
Jika $f(x) \le g(x)$ untuk setiap x di $[a,b]$, maka

6. NILAI MUTLAK INTEGRAL

7. FUNGSI KONSTAN

INTEGRAL TENTU DI BERBAGAI FUNGSI

1. FUNGSI ALJABAR

menghitung integral tentu

```
>function f(x) := x^2
>integrate("f(x)", 1, 3)
```

```
      8.66666666667
```

secara manual, anti turunan dari x^2 adalah x^3/3.

“Nah, EMT memberikan hasil yang sama dengan perhitungan manual, yaitu sekitar 8.67. Jadi kita bisa percaya bahwa integrate() di EMT benar-benar menghitung luas di bawah kurva."

```
>plot2d("f", 0, 3) :
```

“Integral tentu itu menghitung luas daerah di bawah kurva fungsi – misalnya F(x)=x^2 – antara dua titik pada sumbu X"

“Kurva ini berbentuk parabola. Integral dari 1 sampai 3 berarti kita mencari luas di bawah kurva ini antara x=1 dan x=3."

Perhatikan batang-batang persegi ini. Setiap batang merepresentasikan luas kecil f(x)·?x. Kalau kita jumlahkan semua batang, kita dapat perkiraan luas di bawah kurva. Nah, integral tentu menghitung hasil akhirnya tanpa perkiraan lagi – hasil limitnya sempurna

2. FUNGSI TRIGONOMETRI

```
>function f(x) := sin(x)
```

kita akan menghitung luas di bawah kurva sinus dari 0 sampai \pi

```
>integrate("sin(x)", 0, %pi)
```

```
      2
```

“Hasil 2 ini berarti luas di bawah kurva sin(x) dari 0 sampai p adalah 2 satuan luas.”

```
>function f(x) := sin(x);
>plot2d("f(x)", 0, pi) :
```

integral tentu fungsi trigonometri menggambarkan keseimbangan antara daerah positif dan negatif dari gelombang trigonometri – bukan sekadar angka, tapi representasi luas pada sumbu x.
Jika daerahnya di atas, hasilnya positif; jika di bawah, negatif.

3. FUNGSI EKSPONEN

Artinya, nilai integral tentu fungsi eksponen diperoleh dari selisih nilai e^x di batas atas dan batas bawah

```
>&integrate(e^x, x)
```

$$\frac{e^x}{\log(e)}$$

```
>function f(x) &= exp(x)
```

$$E^x$$

Jika kita masukkan nilai e=2.718, hasilnya sekitar 7.389 - 2.718 = 4.671. jadi, luas daerah di bawah kurva dari x = 1 sampai x = 2 adalah sekitar 4,67 satuan luas.

```
>integrate(f, 0, 1)
```

```
      1.71828182846
```

fungsi y = e^x meningkatkan eksponsial- naik saat mendeeksi x = 1

```
>x := linspace(0, 1, 100);
>plot2d(x, exp(x)):
```

Luas di bawah kurva dari ke 1 menunjukkan jumlah total pertumbuhan eksponensial dalam interval itu.

Daerah yang diarsir ini menunjukkan luas yang dihitung oleh integral tentu. Karena fungsi selalu positif dan meningkat, seluruh daerah berada di atas sumbu x, jadi hasil integralnya juga positif

Semakin lebar selang (a ke b), semakin besar pula nilai integralnya, karena kurva eksponen naik dengan cepat.
ntegral tentu pada fungsi eksponen menggambarkan pertumbuhan kumulatif yang terus meningkat."

4. FUNGSI LOGARITMA

Fungsi logaritma sedikit berbeda. Hasil integralnya bukan logaritma lagi, tapi berubah menjadi bentuk perkalian xln x dikurangi x"

Untuk integral tentu, kita cukup substitusikan batas atas dan batas bawah ke dalam rumus ini.
ilai hasilnya menggambarkan luas bersih di bawah kurva logaritma antara x = a dan x = b

akan menghitung integral tentu dari 1 sampai e

```
>function f(x):= log(x); & log = ln
>integrate("f(x)", 1, exp(1))
```

```
      1
```

Jadi luas daerah di bawah kurva logaritma dari 1 sampai e adalah 1 satuan luas.

```
>plot2d("f(x)", 1, exp(1)):
```

Kurvanya naik perlahan dan memotong sumbu x di titik (1,0).
agian di bawah sumbu x menunjukkan nilai integral negatif, sedangkan di atas sumbu x positif

Integral tentu fungsi logaritma menunjukkan perubahan yang lambat dan stabil.semakin besar nilai x, pertumbuhannya makin kecil – tapi luas di bawah kurvanya tetap bisa dihitung sebagai selisih dari xlnx-x di dua batas

5. KOMPOSISI FUNGSI

Jika h(x)=f(g(x)) dan g dapat diintegralkan pada interval [a,b], maka integral tentu h(x) adalah:

Fungsi komposisi berarti fungsi yang di dalamnya terdapat fungsi lain

Kita akan mencari integral tentu dengan mengganti bagian dalam fungsi
g(x) menjadi variabel baru, misalnya u=g(x).

misalkan

bisa dihitung sebagai selisih dari xlnx-x di dua batas

```
>function f(x) := sin(2*x)
>integrate("f(x)",0,pi/2)
```

```
      1
```

```
>plot2d("f(x)", 0, pi/2,):
```

APLIKASI INTEGRAL TENTU

Integral tentu tidak hanya digunakan untuk menghitung luas di bawah kurva, tetapi juga memiliki banyak penerapan dalam berbagai bidang ilmu, seperti fisika, teknik, ekonomi, dan biologi. Berikut beberapa contoh penerapan pentingnya:

1.MENGHITUNG LUAS DIBAWAH KURVA

jika latex: f(x)>= 0 pada interval [a,b]:
maka luas dibawah kurva fungsi f(x) dari x=a sampai x=b adalah

contohnya:

```
>function f(x) := 4-x^2;
>integrate("f", 0, 2)
```

```
      5.33333333333
```

luas ini menggambarkan daerah antara kurva

```
>plot2d("f", 0, 2):
```

2. MENGHITUNG LUAS ANTARA DUA KURVA

Jika terdapat dua fungsi f(x) dan g(x), dengan f(x)=g(x) pada interval [a,b], maka luas daerah di antara keduanya adalah:

contoh

```
>function f(x) := x^2
>function g(x) := x^3
>plot2d("f", 0, 1):
>plot2d("g", 0, 1):
```

Artinya, luas daerah antara kurva y=x^2 dan y=x^3 dari 0 sampai 1 adalah
0,08333satuan luas.

3. MENGHITUNG VOLUME BENDA PUTAR

Jika daerah di bawah kurva y=f(x) dari x=a sampai x=b diputar terhadap sumbu-x, maka volume benda putar yang terbentuk adalah:

contohnya:
Volume benda putar dari kurva y=x antara 0 dan 2 terhadap sumbu-x adalah

```
>function f(x) := x
>integrate("f(x)^2", 0, 2)
```

```
      2.66666666667
```

```
>V = %pi * 2.66666666667
```

```
      8.37758040958
```

```
>plot3d("sqrt(x^2+y^2)", 0, 2, -2, 2, title="Benda Putar y = x terhadap Sumbu-X", color=green, contour=false):
```

Baris dan Deret

Baris dan deret merupakan dua konsep dasar dalam analisis matematika, terutama pada topik kalkulus dan aljabar.
keduanya digunakan untuk menggambarkan pola keteraturan bilangan dan penjumlahan bertahap dari pola tersebut.

Dalam penerapan teknik, baris sering digunakan untuk memodelkan data yang berubah secara teratur (misalnya suhu harian, kecepatan, atau sinyal diskrit), sedangkan deret digunakan untuk menghitung nilai total atau akumulasi
dari data tersebut.
Deret (series) adalah penjumlahan dari suku-suku dalam suatu baris,

Definisi

Baris atau sekuens adalah daftar bilangan yang tersusun menurut aturan atau pola tertentu, di mana setiap bilangan dalam daftar tersebut disebut suku ("n" indeks).

- Menggunakan vektor dengan elemen beraturan (:) Perintah tanda titik dua : digunakan untuk membuat vektor beraturan dengan jarak antar elemen yang tetap.

format umumnya:
start:step:end

```
>a=1:20
```

```
      [1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9,  10,  11,  12,  13,  14,  15,  16,
      17,  18,  19,  20]
```

```
>2:2:14 // untuk menghasilkan bilangan bulat positif
```

```
[2,  4,  6,  8,  10,  12,  14]
```

```
>1:2:14 // untuk menghasilkan bilangan ganjil positif
```

```
[1,  3,  5,  7,  9,  11,  13]
```

Metode ini cocok untuk barisan aritmetika yang memiliki beda tetap antar suku, karena sintaksnya sederhana dan langsung menampilkan semua elemen barisan.

- Menggunakan perintah sequence Perintah sequence(step, star, end) juga digunakan untuk membuat barisan beraturan seperti tanda :, tetapi lebih fleksibel dan eksplisit. intaks: sequence(step, star, end)

```
>// membuat barisan a_n 1/n untuk n =1,2,...,20
>a=sequence("1/n",1,20)
```

```
[1,  0.5,  0.333333,  0.25,  0.2,  0.166667,  0.142857,  0.125,
0.111111,  0.1,  0.0909091,  0.0833333,  0.0769231,  0.0714286,
0.0666667,  0.0625,  0.0588235,  0.0555556,  0.0526316,  0.05]
```

Kelebihan sequence adalah dapat digunakan dalam fungsi atau ekspresi rumus, sehingga cocok untuk barisan yang akan diproses lebih lanjut (misalnya untuk menghitung jumlah, limit, atau plot)

- Menggunakan perintah iterate atau niterate Perintah iterate dan niterate digunakan untuk membentuk barisan secara rekursif, yaitu setiap suku ditentukan dari suku sebelumnya sesuai rumus tertentu.

sintaks umumnya:
iterate(fungsi, nilai_awal, banyak_suku)
atau
niterate(fungsi, nilai_awal, banyak_suku)

```
>function f(x) := (x+2/x)/2
>niterate("(x+2/x)/2",1,20)
```

```
[1,  1.5,  1.41667,  1.41422,  1.41421,  1.41421,  1.41421,  1.41421,
1.41421,  1.41421,  1.41421,  1.41421,  1.41421,  1.41421,  1.41421,
1.41421,  1.41421,  1.41421,  1.41421,  1.41421]
```

```
>iterate("(x+3/x)/2", 1, 20)
```

```
[1,  2,  1.75,  1.73214,  1.73205,  1.73205,  1.73205,  1.73205,
1.73205,  1.73205,  1.73205,  1.73205,  1.73205,  1.73205,  1.73205,
1.73205,  1.73205,  1.73205,  1.73205,  1.73205]
```

- Menggunakan Fungsi Maxima create_list atau makelist

fungsi Maxima bisa dipanggil langsung (karena EMT terhubung dengan Maxima CAS).
ntuk membuat barisan,
digunakan perintah:
create_list(expr, var, awal, akhir)
atau sama artinya dengan makelist(expr, var, awal, akhir)

```
>$create_list(1/n,n,1,14)
>$makelist(1/n,n,1,14)
```

- Menggunakan fungsi biasa (yang banyak digunakan) barisan juga dapat didefinisikan dengan fungsi eksplisit, yaitu fungsi yang langsung menyatakan hubungan antara suku ke-n dengan nilai n-nya. format umum penulisannya adalah: fungsi f digunakan untuk menghasilkan setiap elemen barisan sesuai rumus yang diberikan, lalu hasilnya disimpan dalam vektor a suku sebelumnya sesuai rumus tertentu.

sintaks umumnya:
iterate(fungsi, nilai_awal, banyak_suku)
atau
niterate(fungsi, nilai_awal, banyak_suku)

```
>function f(n):=1/n
>a=f(1:14)
```

```
[1,  0.5,  0.333333,  0.25,  0.2,  0.166667,  0.142857,  0.125,
0.111111,  0.1,  0.0909091,  0.0833333,  0.0769231,  0.0714286]
```

```
>function f(n) := (1+1/n)^n
>a = f(1:20)
```

```
[2,  2.25,  2.37037,  2.44141,  2.48832,  2.52163,  2.5465,  2.56578,
2.58117,  2.59374,  2.6042,  2.61304,  2.6206,  2.62715,  2.63288,
2.63793,  2.64241,  2.64643,  2.65003,  2.6533]
```

Perintah sum, cumsum, dan differences dalam EMT

```
>v=1:2:40
```

```
[1,  3,  5,  7,  9,  11,  13,  15,  17,  19,  21,  23,  25,  27,  29,
31,  33,  35,  37,  39]
```

```
>sum (v)
```

```
400
```

- sum Digunakan untuk menjumlahkan seluruh elemen suatu vektor atau barisan dan menghasilkan satu nilai total.

```
>cumsum(v)
```

```
[1,  4,  9,  16,  25,  36,  49,  64,  81,  100,  121,  144,  169,  196,
225,  256,  289,  324,  361,  400]
```

-cumsum
Digunakan untuk menghitung jumlah parsial (akumulasi bertahap) dari elemen-elemen vektor sehingga membentuk deret jumlah kumulatif.

```
>differences(v)
```

```
[2,  2,  2,  2,  2,  2,  2,  2,  2,  2,  2,  2,  2,  2,  2,  2,  2,  2,
2]
```

- differences Digunakan untuk mencari selisih antara elemen-elemen berurutan dalam suatu vektor guna melihat pola perubahan atau beda tetap suatu barisan.

Kekonvergenan dan kedivergenan baris

- Konvergen Barisan dikatakan konvergen jika suku-sukunya mendekati suatu nilai tertentu (n) ketika bertambah besar tanpa batas. Definisi barisan konvergen a_n=1/n

```
>n=1:100;
>nkonvergen=1/n;
```

Definisi barisan divergen b_n=(-1)^n

```
>n=1:100;
>bdivergen=(-1)^n;
>akonvergen=1/n
```

```
[1,  0.5,  0.333333,  0.25,  0.2,  0.166667,  0.142857,  0.125,
0.111111,  0.1,  0.0909091,  0.0833333,  0.0769231,  0.0714286,
0.0666667,  0.0625,  0.0588235,  0.0555556,  0.0526316,  0.05,
0.047619,  0.0454545,  0.0434783,  0.0416667,  0.04,  0.0384615,
0.037037,  0.0357143,  0.0344828,  0.0333333,  0.0322581,  0.03125,
0.030303,  0.0294118,  0.0285714,  0.0277778,  0.027027,  0.0263158,
0.025641,  0.025,  0.0243902,  0.0238095,  0.0232558,  0.0227273,
0.0222222,  0.0217391,  0.0212766,  0.0208333,  0.0204082,  0.02,
0.0196078,  0.0192308,  0.0188679,  0.0185185,  0.0181818,  0.0178571,
0.0175439,  0.0172414,  0.0169492,  0.0166667,  0.0163934,  0.016129,
0.015873,  0.015625,  0.0153846,  0.0151515,  0.0149254,  0.0147059,
0.0144928,  0.0142857,  0.0140845,  0.0138889,  0.0136986,  0.0135135,
0.0133333,  0.0131579,  0.012987,  0.0128205,  0.0126582,  0.0125,
0.0123457,  0.0121951,  0.0120482,  0.0119048,  0.0117647,  0.0116279,
0.0114943,  0.0113636,  0.011236,  0.0111111,  0.010989,  0.0108696,
0.0107527,  0.0106383,  0.0105263,  0.0104167,  0.0103093,  0.0102041,
0.010101,  0.01]
```

- Divergen Barisan disebut divergen jika tidak memiliki limit yang hingga, artinya: Nilainya bertambah besar tanpa batas ,

Berkurang tanpa batas, a
au
berosilasi (naik turun tanpa mendekati nilai tetap).

```
>bdivergen=(-1)^n
```

```
[-1,  1,  -1,  1,  -1,  1,  -1,  1,  -1,  1,  -1,  1,  -1,  1,  -1,  1,
-1,  1,  -1,  1,  -1,  1,  -1,  1,  -1,  1,  -1,  1,  -1,  1,  -1,  1,
-1,  1,  -1,  1,  -1,  1,  -1,  1,  -1,  1,  -1,  1,  -1,  1,  -1,  1,
-1,  1,  -1,  1,  -1,  1,  -1,  1,  -1,  1,  -1,  1,  -1,  1,  -1,  1,
-1,  1,  -1,  1,  -1,  1,  -1,  1,  -1,  1,  -1,  1,  -1,  1,  -1,  1,
-1,  1,  -1,  1,  -1,  1,  -1,  1,  -1,  1,  -1,  1,  -1,  1,  -1,  1,
-1,  1,  -1,  1]
```

Limit Barisan

Barisan konvergen adalah barisan bilangan yang suku-sukunya semakin mendekati suatu nilai tertentu (tetap) ketika indeks n) makin besar tanpa batas.
Artinya, makin jauh kita mengambil suku ke-n
, nilainya semakin dekat dengan suatu bilangan tetap

- Barisan konvergen ke 0

```
>$showev('limit(1/n,n,inf))
```

Semakin besar n, maka nilai a_n semakin kecil dan akan mendekati 0

- Barisan konvergen ke 1

```
>$showev('limit((2*n+1)/(2*n-1),n,inf))
```

jika n besar, bagian pembilang (+1) dan (-1) penyebut menjadi kecil dibanding 2n, jadi nilai akan mendekati 1

- Barisan divergen tak terhingga

```
>$showev('limit(n^2,n,inf))
```

- Barisan dengan nilai negatif

```
>$showev('limit((-1)^n,n,inf))
```

- Barisan dengan akar

```
>$showev('limit(sqrt(n^2+3*n)-n,n,inf))
```

Visualisasi kekonvergenan dan divergenan barisan

-Konvergen

```
>sequence("1/n",1,10)
```

```
[1,  0.5,  0.333333,  0.25,  0.2,  0.166667,  0.142857,  0.125,
0.111111,  0.1]
```

```
>$limit(1/n,n,inf)
>plot2d("1/x",1,20,points=1)
>insimg
>sequence("(-1)/n",1,10)
```

```
[1,  -0.5,  -0.333333,  -0.25,  -0.2,  -0.166667,  -0.142857,  -0.125,
-0.111111,  -0.1]
```

```
>$limit((-1)^n/n,n,inf)
>plot2d("(-1)/x",1,20,points=1)
>insimg
```

- Divergen

```
>sequence("n/5",1,20)
```

```
[1,  0.4,  0.6,  0.8,  1,  1.2,  1.4,  1.6,  1.8,  2,  2.2,  2.4,  2.6,
2.8,  3,  3.2,  3.4,  3.6,  3.8,  4]
```

```
>plot2d("x/5",1,20,points=1)
>insimg
>sequence("-n/5",1,20)
```

```
[1,  -0.4,  -0.6,  -0.8,  -1,  -1.2,  -1.4,  -1.6,  -1.8,  -2,  -2.2,
-2.4,  -2.6,  -2.8,  -3,  -3.2,  -3.4,  -3.6,  -3.8,  -4]
```

```
>plot2d("-x/5",1,20,points=1)
>insimg
```

Deret berhingga dan takhingga

- Berhingga

```
>sequence("n",1,79)
```

```
[1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9,  10,  11,  12,  13,  14,  15,  16,
17,  18,  19,  20,  21,  22,  23,  24,  25,  26,  27,  28,  29,  30,
31,  32,  33,  34,  35,  36,  37,  38,  39,  40,  41,  42,  43,  44,
45,  46,  47,  48,  49,  50,  51,  52,  53,  54,  55,  56,  57,  58,
59,  60,  61,  62,  63,  64,  65,  66,  67,  68,  69,  70,  71,  72,
73,  74,  75,  76,  77,  78,  79]
```

```
>$S=(n/2)*(a1+an)
>$sum(n,n,1,79)
```

- Takhingga

Fungsi multivariabel

A. Defenisi
Fungsi multivariabel adalah fungsi yang melibatkan lebih dari satu variabel bebas.misalnya,f(x,y) memiliki dua variabel bebas x dan y.
Nilai fungsi ini tergantung pada kombinasi kedua variabel tersebut.

contoh sederhana :

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

adalah fungsi dua variabel yang menghasilkan permukaan paraboloid.

```
>plot2d("x^2 + y^2", -1, 1, -1, 1, contour=1, grid=40)
>plot3d("x^2 + y^2", -1, 1, -1, 1, grid=40, frame=1, contour=1)
>insimg
```

B. Turunan parsial
Turunan parsial digunakan untuk mengetahui laju perubahan fungsi terhadap salah satu variabel, dengan variabel lain dianggap konstan.
Bentuk umum :

contoh :
Menentukan turunan parsial dari :

```
>$diff(x^2*y+3*y,x)
>$diff(x^2*y+3*y,y)
```

jadi hasilnya =

C. integral ganda
Integral ganda adalah bentuk perluasan dari integral satu variabel yang digunakan untuk menghitung volume di bawah permukaan(x,y)pada suatu daerah R di bidang xy.

Bentuk umum :

//f(x,y) : fungsi dua vaiabel
//R:daerah integrasu pada bidang xy
//dxdy:integrasi dilakukan dua kali tehadap x da y

contoh soal :
Misalkan fungsi

dengan batas daerah :

tentukan :

```
>function f(x,y):= x^2+y^2
>$integrate(integrate(x^2 + y^2, x, -1, 1), y, -1, 1)
```

artinya

Grafik2d integral ganda

```
>function F(x, y) := x^3*y^2/6 + 3*x*y^2/2
>plot2d("x^3*y^2/6 + 3*x*y^2/2", -2, 2, -2, 2, contour=1, grid=40, title="Kontur F(x,y)"):
>plot3d("x^3*y^2/6 + 3*x*y^2/2", -2, 2, -2, 2, title="Grafik F(x,y) = (x³y²)/6 + (3xy²)/2"):
```

D. Aplikasi fungsi multivariabel

aplikasi multivariabel sering digunakan di berbagai bidang
//Bidang fisika (distribusi massa/tekanan)

Menyatakan fungsi kepadatan (density function) yang bergantung pada dua variabel
x dan y.
contohnya dalam fisika atau statistik:

artinya nilai kepadatan berubah sesuai posisi titik (x,y)

//Bidang Ekonomi (produksi tergantung modal dan tenaga kerja)

Ini adalah fungsi produksi Cobb-Douglas dalam ekonomi, di mana:
Q=ouput (hasil prouksi)
K=modal (capital)
L=tenaga kerja (labor)

//Bidang teknik (distibusi suhu pada bidang)

Menyatakan fungsi suhu (temperature function), di mana suhu pada suatu titik tergantung pada posisi x dan y.
contoh :

Latex: T(x,y)=20-2x^2-y^2
artinya suhu berkurang saat menjauhi titik pusat.

contoh aplikasi :
Fungsi produksi Cobb-Douglas:

Turunan parsial terhadap K: