Schulmathematik
Analysis

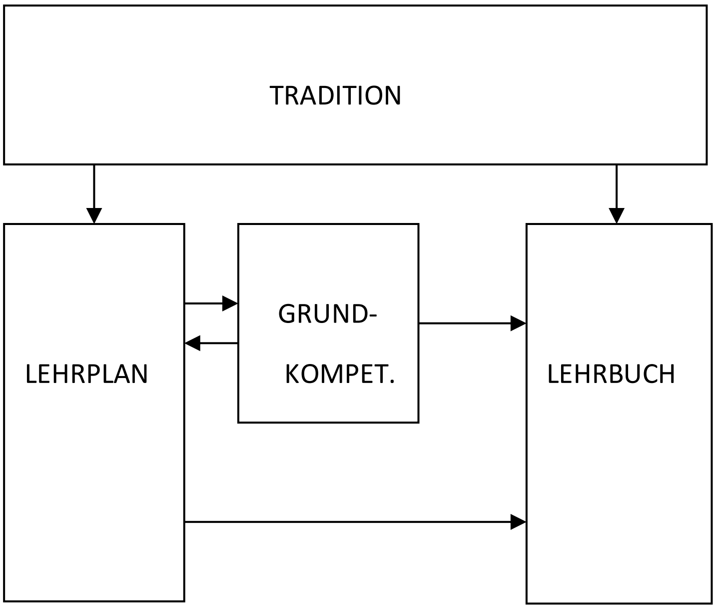
2023 S

Inhalt:

Franz Schoberleitner Andreas Lindner Edith Lindenbauer

Fachliche Orientierungen des Analysis-Unterrichts

Die Situation …



Wie damit umgehen? 3 Ratschläge/Prinzipien

(1) Algorithmische Komplexität reduzieren bzw. auf Rechner auslagern

(2) Grundvorstellungen klären und vielfältig verwenden

(3) Konzepte sinnvoll einsetzen

Kritisches Hinterfragen der bisherigen Praxis : Was ist sinnvoll?
Vorschläge: Modellierung/Anwendung; Begründung allgemeiner Aussagen; …..

Heinrich Winter:

Der Mathematikunterricht ist dadurch allgemeinbildend, dass er 3 Grunderfahrungen ermöglicht:

(1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Weise wahrzunehmen und zu verstehen

(2) Mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen

(3) In der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen („heuristische Fähigkeiten"), zu erwerben.

Lehrplan AHS (Neue Oberstufe)

6. Klasse:

Kompetenzmodul 3

Folgen

- Zahlenfolgen als auf ℕ bzw. $\mathbb{N}^*$ definierte reelle Funktionen kennen (insbesondere arithmetische Folgen als lineare Funktionen und geometrische Folgen als Exponentialfunktionen); sie durch explizite und rekursive Bildungsgesetze darstellen und in außermathematischen Bereichen anwenden können
- Eigenschaften von Folgen kennen und untersuchen können (Monotonie, Beschränktheit, Grenzwert)

Kompetenzmodul 4

Reihen

- Summen endlicher arithmetischer und geometrischer Reihen berechnen können
- Summen unendlicher Reihen definieren und für konvergente geometrische Reihen berechnen können

7. Klasse:

Kompetenzmodul 5

Grundlagen der Differentialrechnung anhand von Polynomfunktionen

- Einfache Polynomgleichungen vom Grad ≤ 4 im Bereich der reellen Zahlen lösen können (sofern sie in der Differentialrechnung verwendet werden)
- Den Differenzenquotienten (die mittlere Änderungsrate) und den Differentialquotienten (die lokale bzw. momentane Änderungsrate) definieren können
- Den Differenzen- und Differentialquotienten als Sekanten- bzw. Tangentensteigung sowie in außermathematischen Bereichen deuten können
- Den Begriff der Ableitungsfunktion kennen; höhere Ableitungen kennen
- Ableitungsregeln für Potenz- und Polynomfunktionen kennen und anwenden können
- Monotonie- und Krümmungsbereiche, Extremstellen, Wendestellen und Sattelstellen (Terrassenstellen) mit Hilfe der Ableitung beschreiben können
- Untersuchungen von Polynomfunktionen in inner- und außermathematischen Bereichen durchführen können; einfache Extremwertaufgaben lösen können (Ermittlung von Extremstellen in einem Intervall)

Kompetenzmodul 6

Erweiterungen und Exaktifizierungen der Differentialrechnung

- Ableitungsregeln für Exponential- und Logarithmusfunktionen, Sinus- und Cosinusfunktion kennen
- Weitere Ableitungsregeln (insbesondere die Kettenregel) kennen und für Funktionsuntersuchungen in verschiedenen Bereichen verwenden können
- Weitere Anwendungen der Differentialrechnung, insbesondere aus Wirtschaft und Naturwissenschaft, durchführen können
- Den Begriff Stetigkeit kennen und erläutern können
- Den Begriff Differenzierbarkeit sowie den Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit kennen

8. Klasse:

Kompetenzmodul 7

Grundlagen der Integralrechnung

- Das bestimmte Integral kennen und als Zahl „zwischen" allen Ober- und Untersummen auffassen können sowie näherungsweise als Summe von Produkten auffassen und berechnen können:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_i f(x_i) \cdot \Delta x$$

- Größen durch Integrale ausdrücken können, insbesondere als Verallgemeinerungen von Formeln mit Produkten (zB für Flächeninhalte oder zurückgelegte Wege)
- Den Begriff Stammfunktion kennen und anwenden können
- Bestimmte Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen unter Verwendung elementarer Integrationsregeln berechnen können

Anwendungen und Exaktifizierungen der Integralrechnung

- Das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können (insbesondere Flächeninhalte, Volumina, Weglängen, Geschwindigkeiten, Arbeit und Energie; allenfalls weitere physikalische Deutungen)
- Die Hauptsätze (bzw. den Hauptsatz) der Differential- und Integralrechnung kennen; den Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren erläutern können
- Das unbestimmte Integral kennen

Grundkompetenzen

Änderungsmaße

AN 1.1 absolute und relative (prozentuelle) Änderungsmaße unterscheiden und angemessen verwenden können

AN 1.2 den Zusammenhang *Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate) – Differenzialquotient („momentane" bzw. lokale Änderungsrate)* auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffs kennen und diese Konzepte (verbal sowie in formaler Schreibweise) auch kontextbezogen anwenden können

AN 1.3 den Differenzen- und Differenzialquotienten in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch den Differenzen- bzw. Differenzialquotienten beschreiben können

Anmerkungen:

Der Fokus liegt auf dem Darstellen von Änderungen durch Differenzen von Funktionswerten, durch prozentuelle Veränderungen, durch Differenzenquotienten und durch Differenzialquotienten, ganz besonders aber auch auf der Interpretation dieser Änderungsmaße im jeweiligen Kontext.

Durch den Einsatz elektronischer Hilfsmittel ist auch die Berechnung von Differenzen- und Differenzialquotienten beliebiger (differenzierbarer) Funktionen möglich.

Regeln für das Differenzieren

AN 2.1 einfache Regeln des Differenzierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, Regeln für $[k \cdot f(x)]'$ und $[f(k \cdot x)]'$ (vgl. Inhaltsbereich *Funktionale Abhängigkeiten*)

Ableitungsfunktion/Stammfunktion

AN 3.1 die Begriffe *Ableitungsfunktion* und *Stammfunktion* kennen und zur Beschreibung von Funktionen einsetzen können

AN 3.2 den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion (bzw. Funktion und Stammfunktion) in deren grafischer Darstellung (er)kennen und beschreiben können

AN 3.3 Eigenschaften von Funktionen mithilfe der Ableitung(sfunktion) beschreiben können: Monotonie, lokale Extrema, Links- und Rechtskrümmung, Wendestellen

Anmerkungen:

Der Begriff der ***Ableitung(sfunktion)*** soll verständig und zweckmäßig zur Beschreibung von Funktionen eingesetzt werden.

Durch den Einsatz elektronischer Hilfsmittel ist das Ableiten von Funktionen nicht durch die in den Grundkompetenzen angeführten Differenziationsregeln eingeschränkt.

Summation und Integral

AN 4.1 den Begriff des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten und beschreiben können

AN 4.2 einfache Regeln des Integrierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, $\int k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int f(k \cdot x)\,\mathrm{d}x$ (vgl. Inhaltsbereich *Funktionale Abhängigkeiten*), bestimmte Integrale von Polynomfunktionen ermitteln können

AN 4.3 das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können

Anmerkungen:

Analog zum Differenzialquotienten liegt der Fokus beim bestimmten Integral auf der Beschreibung entsprechender Sachverhalte durch bestimmte Integrale sowie vor allem auf der angemessenen Interpretation des bestimmten Integrals im jeweiligen Kontext.

Durch den Einsatz elektronischer Hilfsmittel ist die Berechnung von bestimmten Integralen nicht durch die in den Grundkompetenzen angeführten Integrationsregeln eingeschränkt.

Funktionen und Folgen

Funktionen (und Folgen) sind diejenigen mathematischen Objekte, die in der Analysis untersucht werden.

Der Begriff „Funktion“ kommt im Lehrplan erstmals in der 4.Klasse und dann ausführlich in der 5.Klasse vor, obwohl die Schüler das „Phänomen Funktion“ bereits vorher in verschiedenen Zusammenhängen kennenlernen:

Beim Arbeiten mit **Formeln**:
Man setzt den Wert einer Größe ein, um den zugehörigen Wert der anderen zu berechnen.
z.B: $A = r^2 \cdot \pi$ $s = \frac{g}{2} \cdot t^2$ $Z = K \cdot \frac{p}{100}$

Beim Arbeiten mit **Tabellen**:
Zu bestimmten Werten der ersten Größe kann der jeweils zugehörige Wert der anderen Größe abgelesen werden.

Beim Arbeiten mit diversen **graphischen Darstellungen**:
Zu jedem Wert auf der ersten Achse kann der zugehörige Wert auf der zweiten Achse abgelesen werden.

Definition:

Seien A, B Mengen.

Eine Funktion f von A nach B ist eine eindeutige Zuordnung. Jedem Element $x \in A$ wird dabei ein eindeutig bestimmtes Element $y \in B$ zugeordnet, das mit $f(x)$ bezeichnet wird.

Man schreibt: $f: A \to B \mid x \mapsto f(x)$

A heißt Definitionsmenge von f
B heißt Zielmenge von f
$W := \{f(x) \mid x \in A\}$ heißt Wertemenge von f $(W \subseteq B)$

$G := \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ heißt Graph von f

Falls $A \subseteq \mathbb{R}$ und $B \subseteq \mathbb{R}$, spricht man von einer reellen Funktion.
In diesem Fall ist $G \subset \mathbb{R}^2$, sodass der Graph in einem zweidimensionalen Koordinatensystem als Punktmenge dargestellt werden kann.

Bei der Festlegung der Zielmenge einer reellen Funktion hat man eine gewisse Freiheit: Es muss nur gesichert sein, dass diese „groß genug“ ist, um zu jedem Argument den zugehörigen Funktionswert zu enthalten. Häufig wählt man daher bei reellen Funktionen als Zielmenge die Menge $\mathbb{R}$, um sich keine Gedanken machen zu müssen….

Der in der Definition formulierte Funktionsbegriff ist sehr abstrakt und allgemein (und daher geeignet, sehr viele Dinge „unter einen Hut“ zu bringen).

- Die Definition fordert die Eindeutigkeit der Zuordnung, sagt aber nichts darüber aus, wodurch diese Zuordnung zustande kommt; insbesondere braucht kein Funktionsterm vorzuliegen.

- Definitionsmenge und Zielmenge können beliebige Mengen sein (also nicht nur Mengen von Zahlen, sondern z.B. auch Mengen von Wörtern, von Vektoren, von Funktionen usw.)

In der Schulmathematik wird der Funktionsbegriff aber über weite Strecken nur im Sinne von reellen Funktionen verwendet, und zwar solchen, bei denen die Zuordnung durch einen Funktionsterm gegeben ist.

Einige gebräuchliche Sprech- und Schreibweisen

- x .... Stelle, Argument
  $f(x)$ .... Funktionswert von f an der Stelle x, Wert der Funktion f an der Stelle x

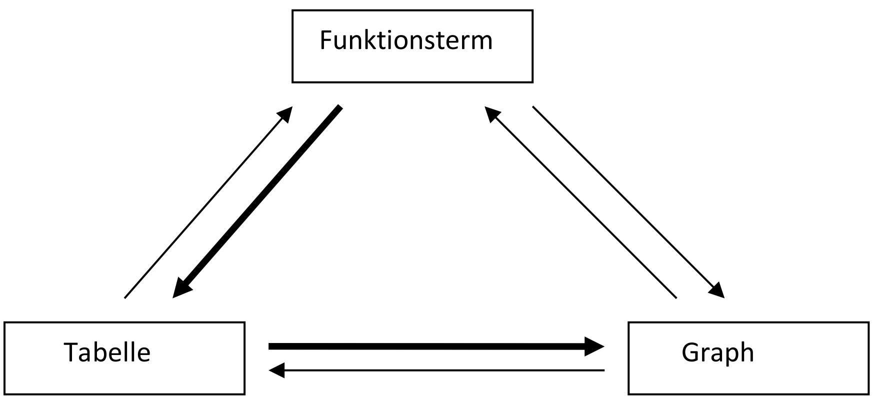
Beachte: $f(x)$ ist ein Element der Zielmenge (bei reellen Funktionen: eine Zahl)
f ist eine eindeutige Zuordnung

- Vollständige Angabe einer Funktion (Beispiel)

$$f\colon\ [-2,3] \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = 2x^2$$

Name der Funktion
Definitionsmenge
Zielmenge
Funktionsterm

Beim Arbeiten mit Funktionen stehen die Darstellungsmittel Funktionsterm, Tabelle und Graph in enger Beziehung zueinander.
Das Wechseln der Darstellungsform ist ein zentrales Thema beim Umgang mit Funktionen.



Wichtige Klassen von Funktionen („elementare Funktionen“)

Funktionen können auf verschiedene Art und Weise klassifiziert werden, z.B.:
- nach ihren Eigenschaften wie: Stetigkeit; Monotonie; Umkehrbarkeit; …..
- nach der Struktur ihres Funktionsterms.

Bezeichnung	Funktionsterm
Lineare bzw. affin-lineare Funktionen	$f(x) = k.x + d$
Stückweise lineare Funktionen	z.B.: $f(x) = \lvert x \rvert$ $\quad f(x) = int(x) = [x]$
Potenz- und Wurzelfunktionen	$f(x) = c.x^r$ $\quad f(x) = \sqrt[n]{x}$
Polynomfunktionen	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k.x^k \quad (n \in \mathbb{N})$
Rationale Funktionen	$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad p, q\ Polynomfunktionen$
Exponentialfunktionen	$f(x) = c.a^x = c.e^{k.x}$
Logarithmusfunktionen	$f(x) = \log_a x \quad f(x) = \ln(x)$
Winkelfunktionen	$f(x) = \sin(x) \quad f(x) = \cos(x) \quad f(x) = \tan(x)$ $f(x) = a.\sin(b.x + c)$

Bemerkung:
Das obige Schema ist keine Klasseneinteilung im streng mathematischen Sinn:
Die „Klassen“ sind nicht disjunkt, und viele in der Schule behandelten Funktionen fallen in keine der Klassen ….

Lernziele, die im Mathematik-Unterricht anzustreben sind:

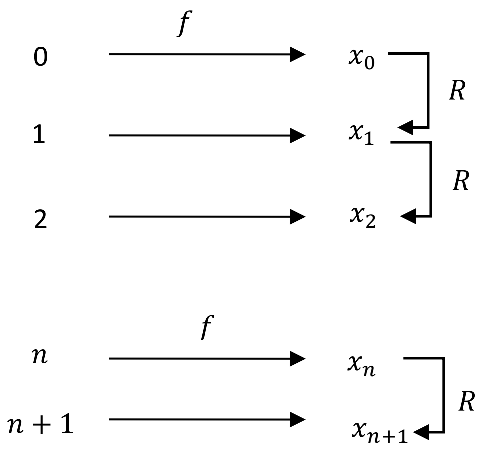
- Gegebene Funktionen aufgrund des Funktionsterms einer „Klasse“ zuordnen können
- Wichtige Eigenschaften der Funktionen-Klasse kennen, wie Funktionalgleichung, Monotonie, Symmetrie, …., eventuell in Abhängigkeit von Parametern
- Typische Graphen der Funktionen-Klasse kennen, eventuell in Abhängigkeit von Parametern
- Funktionen-Klassen als Standardmodelle für reale Situationen kennen und verwenden können

Folgen

Definition: Eine Folge ist eine Funktion mit der Definitionsmenge $\mathbb{N}$

Intuitiv stellt man sich unter einer Folge aber eher etwas anderes vor: eine „Aufzählung“ von Objekten in einer festgelegten Reihenfolge, etwa in der Form: $x_0, x_1, x_2, \dots \dots$

Der Begriff „Folge“ hat zwei Aspekte: einen <u>funktionalen</u> Aspekt
einen <u>rekursiven</u> Aspekt



Diesen beiden Aspekten entsprechen zwei Darstellungsweisen für Folgen:

(1)	Folgenterm:	$x_n = f(n)$
(2)	Rekursionsformel: mit Anfangswert	$x_{n+1} = R(x_n)$ bzw. $x_n = R(x_{n-1})$ x_0

Beachte: Das Symbol x_n bezeichnet das Folgenglied mit dem Index n
Die Folge (als Ganze) wird mit dem Symbol $\langle x_n \rangle$ bezeichnet

In der „Höheren Mathematik“ heißt die Rekursionsformel auch „Differenzengleichung“, der Folgenterm heißt „Lösung der Differenzengleichung“.

Dem entspricht das Vorgehen in der Praxis:
Diskrete Wachstumsmodelle werden zuerst rekursiv formuliert, indem durch eine Rekursionsformel modelliert wird, wie der kommende Zustand vom gegenwärtigen Zustand (und eventuell von den vorangegangenen Zuständen) abhängt.
Manchmal (in einfachen Fällen) ist es möglich, dazu einen Folgenterm anzugeben (also eine Lösung der Differenzengleichung).

Das rekursive Berechnen von Folgengliedern kann sehr effektiv und einfach mit Hilfe einer Tabellenkalkulation durchgeführt werden.

Eigenschaften von Folgen

Wichtige Begriffe zur Beschreibung des (langfristigen) Wachstumsverhaltens von Folgen:

- Monotonie
- Beschränktheit (Schranken)
- Periodizität (Periodenlänge)
- Konvergenz (Grenzwert)
- Chaos

Tätigkeiten im Mathematikunterricht:

(1) Erarbeitung exakter Begriffe
(2) Nachweis der Eigenschaften bei konkreten Folgen

Definition: Sei $\langle x_n \rangle$ eine Folge.

Die Folge heißt

• monoton wachsend,	wenn gilt:	$x_{n+1} \geq x_n$	für alle $n \in \mathbb{N}$
• streng monoton wachsend,	wenn gilt:	$x_{n+1} > x_n$	für alle $n \in \mathbb{N}$
• monoton fallend,	wenn gilt:	$x_{n+1} \leq x_n$	für alle $n \in \mathbb{N}$
• streng monoton fallend,	wenn gilt:	$x_{n+1} < x_n$	für alle $n \in \mathbb{N}$

Eine Zahl s heißt

• obere Schranke der Folge,	wenn gilt:	$x_n \leq s$	für alle $n \in \mathbb{N}$
• untere Schranke der Folge,	wenn gilt:	$x_n \geq s$	für alle $n \in \mathbb{N}$

Die Folge heißt

• nach oben beschränkt,	wenn sie eine obere Schranke besitzt
• nach unten beschränkt,	wenn sie eine untere Schranke besitzt
• nach oben (unten) unbeschränkt,	wenn sie keine obere (untere) Schranke besitzt.

Die Folge heißt periodisch,
wenn es eine Zahl $p \in \mathbb{N}$ gibt, sodass gilt: $x_{n+p} = x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
Die kleinste derartige Zahl heißt primitive Periodenlänge der Folge.

Die Begriffe Konvergenz und Grenzwert sind Thema der Analysis und werden jetzt ausführlich behandelt.
Der Begriff Chaos kann im Bereich der Schulmathematik nur in anschaulich –intuitivem Sinn verwendet werden. Seine mathematische Präzisierung übersteigt das Schulniveau bei weitem.

Grenzwert von Folgen

Der Begriff „Grenzwert" einer Folge ist ein zentraler Grundbegriff der Analysis. Er sollte zuerst <u>intuitiv</u> erarbeitet („intuitiver Grenzwertbegriff") und später <u>präzisiert</u> werden („formaler Grenzwertbegriff").

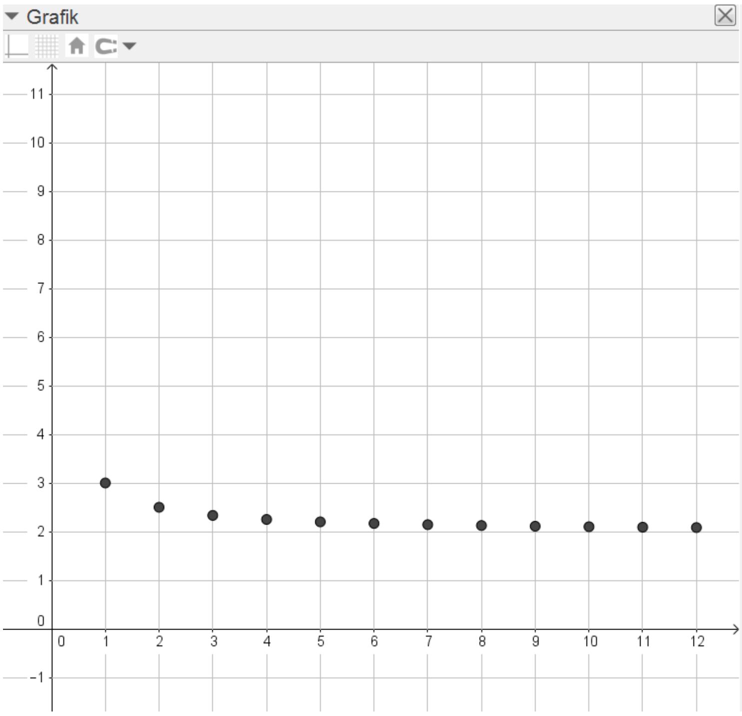
Zwei Zugänge:

1. Folge ist durch einen Folgenterm (eines bestimmten Typs) gegeben

Beispiel:

$$x_n = \frac{2n+1}{n}$$

- Berechnung vieler Folgenglieder, eventuell graphische Darstellung



Tabelle

	A	B	C	D
1				
2	1	3		
3	2	2.5		
4	3	2.3333		
5	4	2.25		
6	5	2.2		
7	6	2.1667		
8	7	2.1429		
9	8	2.125		
10	9	2.1111		
11	10	2.1		
12	11	2.0909		
13	12	2.0833		
14	13	2.0769		
15	14	2.0714		
16	15	2.0667		
17	16	2.0625		
18	17	2.0588		
19	18	2.0556		
20	19	2.0526		

- Beobachtung:

Die Glieder der Folge nähern sich immer mehr der Zahl 2 und kommen ihr beliebig nahe.

- Analyse des Folgenterms:

$$x_n = \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$$

Für „große n" ist der Wert des Terms $\frac{1}{n}$ vernachlässigbar klein, es gilt also:

$$x_n \approx 2, \text{ aber doch } x_n > 2$$

- Einführung einer Sprechweise und einer Schreibweise

  Sprechweise: „ 2 ist Grenzwert der Folge"; „Die Folge konvergiert gegen 2"

  Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \;=\; \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} \;=\; 2$

2. Folge ist durch eine Rekursionsformel gegeben

Beispiel:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$
$$x_0 = 2$$

- Berechnung einiger Folgenglieder:

Tabelle

	A	B
1	0	2
2	1	1.5
3	2	1.4166666667
4	3	1.4142156863
5	4	1.4142135624
6	5	1.4142135624
7		

- Beobachtung:

Mit weiteren Iterationsschritten ändert sich der Wert kaum mehr, d.h.: $x_{n+1} \approx x_n$
Vermutung: Die Folgenglieder nähern sich immer mehr der Zahl $\sqrt{2}$
Genauer: Man kann die Zahl $\sqrt{2}$ beliebig genau annähern, wenn man genügend viele Iterationsschritte durchführt.

- Analyse der Rekursionsformel für $x_n > 0$:

$$x_{n+1} \approx x_n \;\Leftrightarrow\; x_n \approx \frac{1}{2}\cdot\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \;\Leftrightarrow\; x_n \approx \sqrt{2}$$

  Dies bedeutet: Ist x_n nahe bei $\sqrt{2}$, dann auch x_{n+1}
  Es gilt aber eine viel stärkere Aussage (die hier nicht einfach zu begründen ist):

  Der Abstand zwischen x_n und $\sqrt{2}$ wird bei jedem Schritt zumindest halbiert.

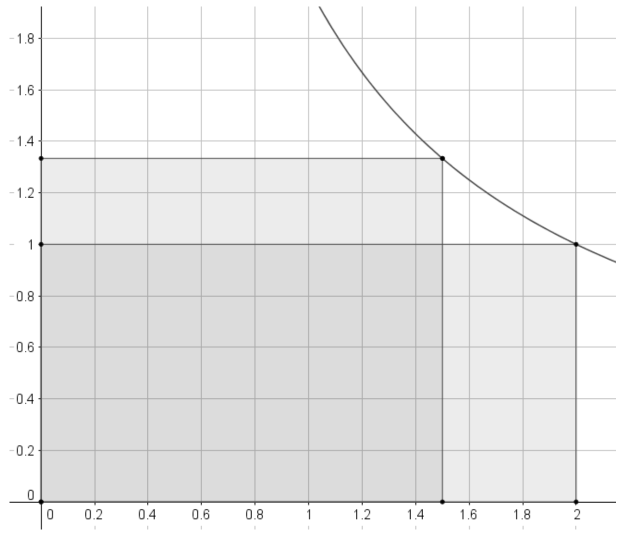
- Geometrischer Hintergrund: („Babylonisches Wurzelziehen“, „Heron´sches Wurzelziehen“)

  Gesucht: Seitenlänge a eines Quadrates, dessen Flächeninhalt A vorgegeben ist (hier: $A = 2$)

  Methode: Beginne mit einem Rechteck mit Länge x_0 und Breite y_0, dessen Flächeninhalt A ist. (also: $y_0 = \frac{A}{x_0}$)
  Falls dieses Rechteck kein Quadrat ist (d.h. falls $x_0 \neq y_0$),
  verwende den Mittelwert aus Länge und Breite als neue Länge eines Rechtecks mit Flächeninhalt A:

$$x_1 := \frac{1}{2} \cdot (x_0 + y_0) = \frac{1}{2} \cdot \left(x_0 + \frac{A}{x_0}\right) \qquad y_1 := \frac{A}{x_1}$$

  Führe diesen Schritt so oft aus, bis das erhaltene Rechteck mit hinreichender Genauigkeit als Quadrat angesehen werden kann.



- Es gilt folgender Satz:

  Sei $A > 0$, $x_0 > 0$ beliebig.
  Dann konvergiert die durch die Rekursionsformel
$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)$$
  definierte Folge gegen $\sqrt{A}$

- Diese Methode zur Berechnung von Quadratwurzeln ergibt sich auch als Spezialfall aus dem Newton´schen Näherungsverfahren zur Lösung von Gleichungen der Form $f(x) = 0$, angewendet auf die Funktion $f(x) = x^2 - A$

Exaktifizierung des Grenzwert-Begriffs:

Die Definition dient zu einer genauen Charakterisierung des Grenzwertes, aber nicht zu seiner Berechnung! Es ist daher zu klären, was man anschließend mit dieser Definition tut:

- Bei konkreten Folgen nachweisen, dass die „berechnete“ Zahl tatsächlich Grenzwert (im Sinne der Definition) ist (was nur in trivialen Beispielen möglich ist)

- allgemeine Sätze über Grenzwerte beweisen, wie z.B.:
  „Eine Folge besitzt höchstens einen Grenzwert.“

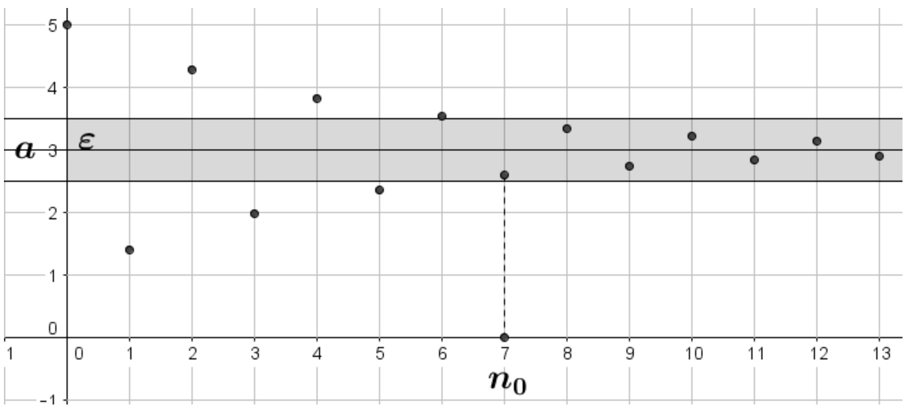
Durch die auftretenden geschachtelten Quantoren ist der Begriff logisch sehr komplex.
Zur Motivation einer Exaktifizierung können z.B. „Streitfragen“ dienen wie:

Besitzt die gegebene Folge einen Grenzwert?

(1) $x_n = 2 \cdot (-1)^n$ (2) $x_n = 2$ (konstant) (3) $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$

Definition:

Die Zahl a heißt Grenzwert der Folge $\langle x_n \rangle$, falls gilt:
Zu jedem (noch so kleinen) $\varepsilon > 0$ gibt es einen Index n_0, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|x_n - a| < \varepsilon$



Hilfsbegriffe, mit denen man die logische Komplexität der Definition zu reduzieren versucht:

- Eine Aussage gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}$, wenn sie nur für endlich viele $n \in \mathbb{N}$ nicht gilt.

- Für jedes $\varepsilon > 0$ heißt das Intervall $U_\varepsilon(a) := \,]\, a - \varepsilon,\ a + \varepsilon\, [$ epsilon-Umgebung von a.

Damit lautet die Grenzwert-Definition folgendermaßen:

Die Zahl a heißt Grenzwert der Folge $\langle x_n \rangle$, wenn in jeder ε –Umgebung von a fast alle Folgenglieder liegen.

Ausgehend von rekursiv definierten Folgen, die Näherungswerte für nicht direkt zu berechnende Zahlen liefern, kann die formale Grenzwert-Definition aus dem operativen Verfahren heraus so entwickelt werden:

Man kommt der Zahl a beliebig nahe, wenn man genügende viele Schritte durchführt.

↓

Wenn man vorher festlegt, wie groß die Abweichung höchstens sein darf, dann ist sicher:
Wenn man genügend viele Schritte durchführt, erhält man einen Näherungswert der gewünschten Genauigkeit, (und weitere Schritte liefern ebensolche)

↓

Zu jeder Fehlerschranke ε (und sei sie noch so klein) existiert eine Schrittzahl n_0 (abhängig von ε), sodass gilt: $|x_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$

In dieser Formulierung bekommen die in der Definition vorkommenden quantifizierten Variablen ε und n_0 eine konkrete inhaltliche Bedeutung.

Theoretischer Hintergrund: Konvergenz rekursiv definierter Folgen

Wir betrachten eine Folge, die definiert ist durch die Rekursionsformel $x_{n+1} = R(x_n)$
und den Anfangswert x_0

Satz:

Ist die Folge konvergent mit dem Grenzwert a und die Funktion R stetig an der Stelle a,
dann gilt: $R(a) = a,$ d.h.: a ist ein Fixpunkt von R

Wenn man den Grenzwert einer rekursiv definierten Folge sucht, bestimmt man also zuerst einmal die Fixpunkte von R. Diese sind die einzigen Zahlen, die als Grenzwert in Frage kommen.

Klassifikation von Fixpunkten:

Ein Fixpunkt $\bar{x}$ von R heißt

anziehend ⇔ es existiert eine Umgebung U von $\bar{x}$ und eine Zahl $k < 1$, sodass für alle $x \neq \bar{x}$ aus U
gilt: $|R(x) - \bar{x}| < k \cdot |x - \bar{x}|$

abstoßend ⇔ es existiert eine Umgebung U von $\bar{x}$ und eine Zahl $k > 1$, sodass für alle $x \neq \bar{x}$ aus U
gilt: $|R(x) - \bar{x}| > k \cdot |x - \bar{x}|$

Ein Fixpunkt braucht aber weder anziehend noch abstoßend zu sein!

Dass ein Fixpunkt anziehend oder abstoßend ist, lässt sich häufig mit Hilfe des folgenden Kriteriums feststellen:

Ist R stetig differenzierbar und $\bar{x}$ ein Fixpunkt von R, dann gilt:

$|R'(\bar{x})| < 1$ ⇒ $\bar{x}$ ist anziehender Fixpunkt von R

$|R'(\bar{x})| > 1$ ⇒ $\bar{x}$ ist abstoßender Fixpunkt von R

Ob eine rekursiv definierte Folge konvergiert und welcher Fixpunkt der Grenzwert ist, hängt im Allgemeinen vom Anfangswert x_0 ab.

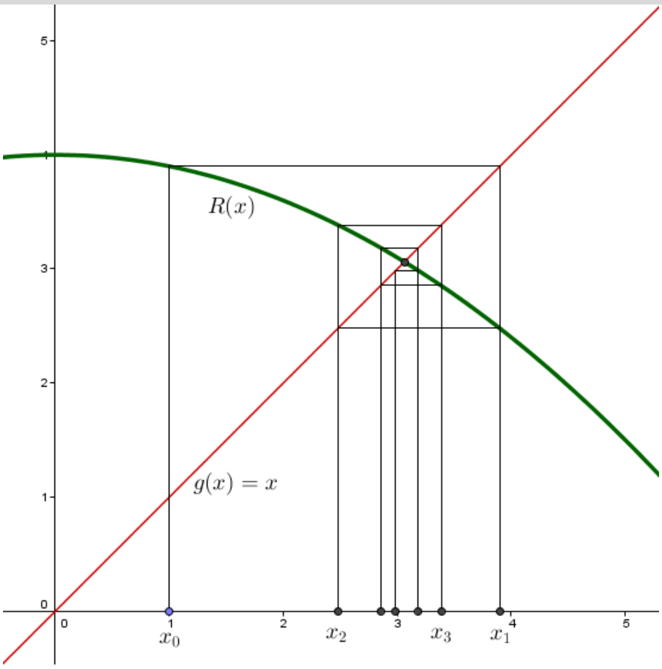
- Ein anziehender Fixpunkt hat ein bestimmtes „Einzugsgebiet"; startet die Folge in diesem, so konvergiert sie gegen diesen Fixpunkt. Allerdings können diese Einzugsgebiete sehr komplizierte Mengen sein!

- Auch abstoßende Fixpunkte können für bestimmte Anfangswerte als Grenzwerte auftreten: wenn nämlich irgendein Glied der Folge exakt gleich dem Fixpunkt ist, dann haben alle weiteren Folgenglieder denselben Wert.

Geometrische Veranschaulichung der Iteration: Spinnwebdiagramm

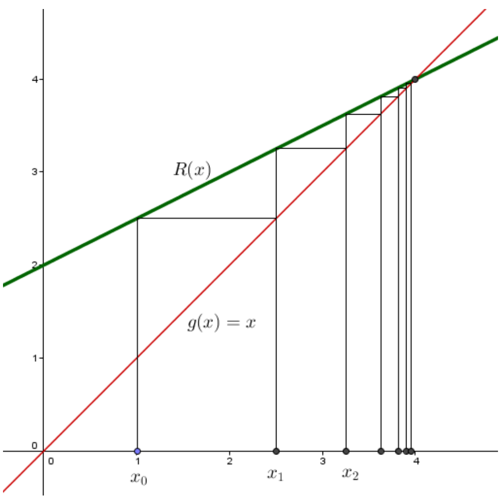
Eine rekursiv definierte Folge sei gegeben durch eine Rekursionsformel $x_{n+1} = R(x_n)$ und einen Anfangswert x_0.

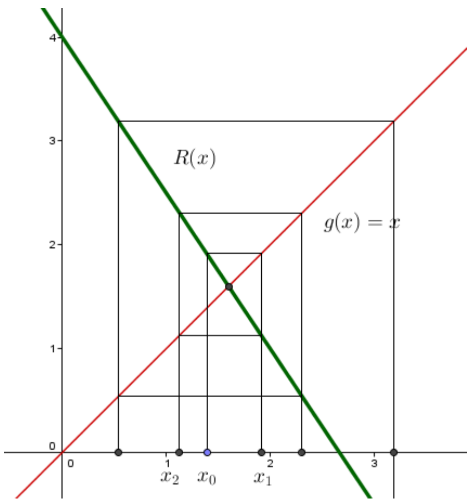
- Zeichne den Graph der Funktion R
- Zeichne die erste Mediane (Graph der identischen Funktion $g(x) = x$)
- Zeichne den Anfangswert x_0 auf der x-Achse ein
- $x_1 = R(x_0)$ ist zunächst als Funktionswert zu sehen; mit Hilfe der 1.Mediane kann dieser wiederum auf die x-Achse gespiegelt werden
- Auf diese Weise können iterativ beliebig viele Glieder der Folge konstruiert werden



Beispiele:

$R(x) = 0{,}5x + 2$





Aufgaben

1. Ermittle den Grenzwert der Folge (falls existent) und argumentiere, dass die gefundene Zahl tatsächlich Grenzwert ist!

$x_{n+1} = 0{,}5x_n + 2 \qquad x_0 = 10$

2. Berechne den Grenzwert der Folge und weise dann nach, dass die berechnete Zahl die Definition des Grenzwertes erfüllt!

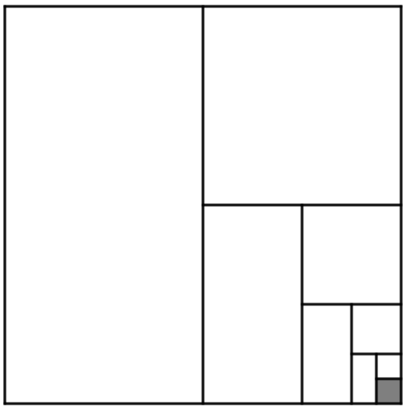
$$y_n = \frac{4n-1}{n+3}$$

3 Kreuze jede Aussage an, die wahr ist!

Die Zahl a ist Grenzwert der Folge (a_n), falls gilt		
(1)	zu einem ε gilt: $\lvert a_n - a\rvert < \varepsilon$	
(2)	zu einem ε gibt es einen Index n_0, sodass $\lvert a_n - a\rvert < \varepsilon$	
(3)	zu jedem positiven ε gibt es einen Index n_0, sodass $\lvert a_n - a\rvert < \varepsilon$ für alle $n \ge n_0$	
(4)	$\lvert a_n - a\rvert < \varepsilon$ für einen Index n_0	
(5)	es gibt ein positives ε, sodass $\lvert a_n - a\rvert < \varepsilon$	
(6)	es gibt einen Index n_0, sodass für alle positiven ε gilt: $\lvert a_n - a\rvert < \varepsilon$	
Die Folge (a_n) ist nach oben beschränkt, falls gilt:		
(1)	$a_n \le K$ für alle K	
(2)	es gibt ein K, sodass für alle $n \in N$ gilt: $a_n \le K$	
(3)	für alle $n \in N$ gibt es ein K, sodass $a_n \le K$	
(4)	$K \le a_n$ für alle $n \in N$	
Die Folge (a_n) ist monoton fallend, falls gilt:		
(1)	$a_n \le a_{n+1}$ für alle $n \in N$	
(2)	$a_n \ge a_{n+1}$ für alle $n \in N$	
(3)	es gibt natürliche Zahlen n, sodass $a_n \ge a_{n+1}$	
(4)	für alle $n \in N$ gilt: $a_n \le a_{n-1}$	

Beispiele zur Veranschaulichung und Problematisierung des Grenzwert-Begriffs

1. Veranschaulichung der geometrischen Reihe



$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\ldots\ldots$$

Jede endliche Summe ist kleiner als 1, aber die Differenz zu 1 kann beliebig klein gemacht werden, wenn man den Prozess nur lange genug fortsetzt….

Formaler Hintergrund:

Eine unendliche geometrische Reihe kann aufgefasst werden als Grenzwert von Partialsummen:

$$s_n := a + a\cdot q + a\cdot q^2 + \cdots . + a\cdot q^n = a\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

Falls $|q| < 1$, ist die Folge $\langle s_n \rangle$ konvergent, und es gilt:

$$s := \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$$

Im Beispiel gilt:

$$s_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad s = 1$$

2. Achilles und die Schildkröte

Vom griechischen Philosophen Zenon von Elea (5. Jahrhundert vor Christus) stammt die folgende Geschichte (das so genannte Zenon´sche Paradoxon):

Achilles, in der Antike als schneller Läufer bekannt, tritt zu einem Wettlauf gegen einen ganz offenbar unterlegenen Gegner an: gegen eine Schildkröte. Siegessicher gibt Achilles der Schildkröte einen großzügigen Vorsprung. Doch es stellt sich heraus: Achilles kann den Wettkampf nicht gewinnen! Denn, so argumentiert Zenon: Wenn Achilles den ursprünglichen Vorsprung der Schildkröte eingeholt hat, d.h. an ihrem Startplatz angelangt ist, ist diese schon wieder ein Stück weiter. Und bis Achilles dieses Stück durchlaufen hat, hat die Schildkröte wieder ein Stück Weg geschafft. Gelangt Achilles dort an, ist sie bereits wieder ein Stück weiter …
Achilles kann die Schildkröte auf diese Weise nie einholen!

Betrachten wir (der einfachen Zahlen halber) zwei Läufer:
Läufer A läuft mit einer Geschwindigkeit von 8 m/s, Läufer B nur mit 4 m/s. Läufer B erhält 20 m Vorsprung. Nach der Argumentation von Zenon kann Läufer A den Läufer B nicht einholen ….

Wir untersuchen zwei Folgen:

- Folge der „Aufholstrecken“: $s_1, s_2, \ldots\ldots$
- Folge der „Aufholzeiten“: $t_1, t_2, \ldots\ldots$

Es gilt:

$$s_1 = 20 \longrightarrow t_1 = 2{,}5$$
$$s_2 = 10 \longrightarrow t_2 = 1{,}25$$
$$s_2 = 5 \longrightarrow t_2 = 0{,}625$$

usw.

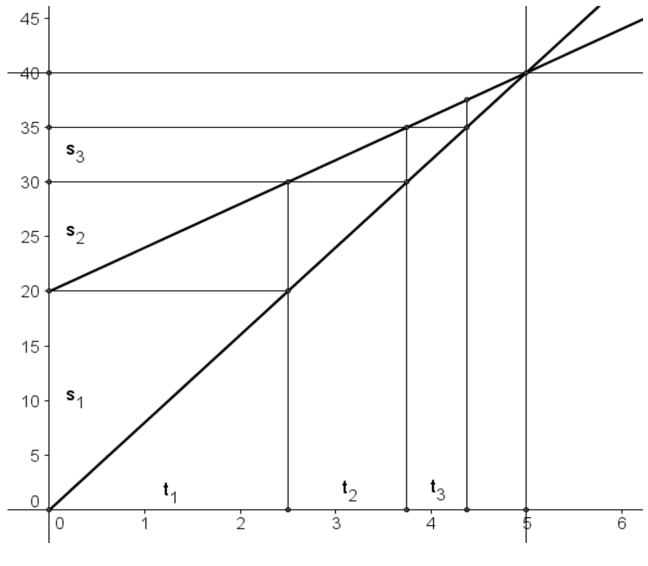
Beide Folgen sind geometrische Folgen mit $q = 0{,}5$.

Gesamtlänge aller Aufholstrecken: $s = \sum_{i=1}^{\infty} s_i = 20.\dfrac{1}{1-0{,}5} = 40$

Gesamtzeit für den Aufholvorgang: $t = \sum_{i=1}^{\infty} t_i = 2{,}5.\dfrac{1}{1-0{,}5} = 5$

Beide <u>unendlichen Reihen</u> konvergieren also gegen einen <u>endlichen Wert</u>. Zum Zeitpunkt $t = 5$ sind also die beiden Läufer gleichauf. Das Argument des Zenon gilt bis zu diesem Zeitpunkt, aber nicht darüber hinaus.

Betrachtet man die beiden Zeit-Ort-Funktionen $f_A(t) = 8 \cdot t$, $f_B(t) = 4 \cdot t + 20$



so erkennt man, dass die Graphen einander an der Stelle $t = 5$ schneiden.
In der Graphik lassen sich die Aufholstrecken und die Aufholzeiten und die Konvergenz der Summen gut veranschaulichen.