



XVI Simposio de la Sociedad Española de
Investigación en Educación Matemática

DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA ESCOLAR

Encarnación Castro Martínez

Universidad de Granada



Introducción

Algunas
dificultades

Conclusión

- Pensamiento algebraico
- Tipos de dificultades
- Crisis en la enseñanza
- Caracterización del álgebra escolar
- Achacables a la aritmética
- Asociadas a la generación de patrones
- Asociadas a expresión de la generalización
- Asociadas al lenguaje
- Asociadas a la estructura de las expresiones

Orden de la presentación

Pensamiento algebraico

Aproximación a situaciones cuantitativas que enfatizan las relaciones y aspectos generales, no es necesario el uso de letras o símbolos.

El uso de letras y símbolos convencionales del álgebra conlleva pensamiento algebraico (Kieran, 1996).

Permite analizar relaciones entre cantidades, reconocer estructuras, analizar cambios, hacer generalizaciones, resolver problemas, modelizar, justificar, probar y predecir (Bell, 1995; Kieran, 2006).

Indicadores para caracterizar el pensamiento algebraico:

- entraña actos deliberados de generalización y expresión de la misma.
- conlleva razonamientos basados en formas de generalización sintácticamente estructuradas, que exigen de procesos sintácticos y semánticos (Lins y Kaput 2004).

Introducción

Pensamiento algebraico

Aproximación a situaciones cuantitativas que enfatizan las relaciones y aspectos generales, no es necesario el uso de letras o símbolos

El uso de letras y símbolos convencionales del álgebra conlleva pensamiento algebraico (Kieran, 1996)

Permite analizar relaciones entre cantidades, reconocer estructuras, analizar cambios, hacer generalizaciones, resolver problemas, modelizar, justificar, probar y predecir (Bell, 1995; Kieran, 2006)

Indicadores para caracterizar el pensamiento algebraico:

- entraña actos deliberados de generalización y expresión de la misma
- conlleva razonamientos basados en formas de generalización sintácticamente estructuradas, que exigen de procesos sintácticos y semánticos (Lins y Kaput 2004)

Introducción

El pensamiento algebraico ha de ser desarrollo por los estudiantes y esto no siempre es sencillo, a veces se les crea se les presenta dificultades y es en este punto de las dificultades donde centramos este trabajo.

Entre las nociones que producen dificultad se señalan la clausura para las expresiones algebraicas que los estudiantes sienten necesidad de hacer; el lenguaje algebraico al que no le “ven” sentido y que les lleva a asignar valores numéricos a las letras o a la sobre-generalización de ciertas propiedades; la preservación de la jerarquía de la operaciones para la que no encuentran justificación; el uso de paréntesis; la percepción del signo igual como expresión de una equivalencia, entre otras

Tipos de dificultades

**Intrínsecas al objeto
O. epistemológico**

Debidas, en gran parte, a la naturaleza del álgebra, su lenguaje, los elementos que lo componen, las reglas que lo rigen

**Inherentes al propio sujeto
O. Ontogénico**

Están relacionadas con la complejidad que supone la abstracción y la generalización

**Consecuencia de las técnicas de enseñanza
O. didáctico**

La enseñanza tradicional no ha aportado sentido al álgebra

Crisis en la enseñanza del álgebra

Cognitivo

Achacable al sujeto, la generalización y la utilización de símbolos suponen dificultad

Psicológico

Solamente oír la palabra álgebra ya asusta a los estudiantes

Social

La sociedad tiene catalogada el álgebra entre las ramas más complejas de las matemáticas

Pedagógico

Desmotivación de los estudiantes que hace la su formación más compleja

Didáctico

Métodos de enseñanza del álgebra han quedado anticuados

Caracterización del álgebra escolar

Usiskin
(1987)



Aritmética generalizada. Procedimientos para resolver problemas. Estudio de relaciones entre cantidades. Estudio de estructuras.

Kieran
(1996)



Tareas: de **generalizar**, involucran expresiones y ecuaciones; de **transformar**, factorizar, operar expresiones polinómicas, resolver ecuaciones; de **alto nivel**, resolución de problemas, modelización, reconocimiento de estructuras, generalización, justificación, prueba, y predicción.

Drijvers y
Hendrikus
(2003)
categorización
fenomenológica



Medio para resolver problemas.
Relaciones entre variables.
Generalización de relaciones y estudio de patrones y estructuras.
Álgebra como lenguaje.

Introducción

Caracterización del álgebra escolar

(Blanton y Kaput (2005) Early-Algebra
objetivo: que los estudiantes desarrollen aprendizaje del álgebra con comprensión.



Estudio de relaciones numéricas que incluye aritmética generalizada.
Estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones.
Generalización de patrones. Relaciones funcionales.
Desarrollo y manipulación del simbolismo.
Modelización como dominio de expresión y formalización de generalizaciones.

Introducción

Relación Aritmética-Álgebra escolar. Postura 1.

Estrechas conexiones entre aritmética y álgebra. Las relaciones entre los números pueden ser de tipo general o particular. “La suma de dos números pares es par” o “tres más cinco es igual a ocho” (Vallejo, 1841).

El álgebra generaliza a la aritmética, la aritmética, se apropia del lenguaje horizontal de igualdades y paréntesis; Gómez (1995).

Existe una relación dual entre ambas ramas, la aritmética proporciona al álgebra raíces y fundamentación y el álgebra proporciona a la aritmética la posibilidad de simbolizar, generalizar y razonar algebraicamente (Drijvers y Hendrikus, 2003).

Relación aritmética-álgebra

Relación Aritmética-Álgebra escolar. Postura 1.

El álgebra trata de la simbolización de las relaciones numéricas generales, de las estructuras matemáticas y de las operaciones de esas estructuras; desde esta posición se puede ver el álgebra escolar como aritmética generalizada que involucra formulación y manipulación de relaciones y propiedades numéricas (Palarea, 1998).

El álgebra no es solo generalización de la aritmética sino que proporciona una fundamentación para la misma (Subramaniam y Banerjee, 2011).

Relación aritmética-álgebra

Relación Aritmética-Álgebra escolar. Postura 2

El álgebra es, entre otras cosas, una herramienta para la comprensión, expresión y comunicación de generalizaciones, para revelar estructuras, para establecer conexiones y para formalizar argumentos matemáticos (Arcavi, 1994).

Relación aritmética-álgebra

La relación entre aritmética y álgebra lleva a que muchas de las dificultades de los estudiantes que conducen a errores al trabajar en álgebra escolar se justifiquen, bien desde la falta de conocimiento de los estudiantes sobre el mismo asunto en aritmética o bien porque el conocimiento aritmético supone un obstáculo para el algebraico.

Las convenciones del álgebra rigen también en aritmética, el fracaso de los estudiantes al aplicarlas o ignorarlas en álgebra, son achacables a su desconocimiento en aritmética. Vemos ejemplos de lo que ocurre con las convenciones, la jerarquía de las operaciones y alguna propiedad

Dificultades asociadas a la aritmética

Convenciones

Uso de paréntesis

$$\begin{array}{l} 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot (5 + 7) + (5 + 7)^2 \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ 400 - 2 \cdot 100 + 140 + 25 + 49 + 70; \\ 400 - 200 + 140 + 25 + 49 + 70; \\ 484 \end{array}$$

Estudiante de 3º de ESO

Dificultades asociadas a la aritmética

Convenciones

Jerarquía de operaciones

$$\begin{array}{l} 13^2 + 10 \cdot 17 + 17^2 = (13 + 17)^2 \\ 169 + 10 \cdot 17 + 289 = 169 + 289 \\ 179 \cdot 17 + 289 = 458 \\ 3043 + 289 = 458 \\ 3332 = 458 \end{array}$$

Estudiante de 3º de ESO

Dificultades asociadas a la aritmética

Propiedades

Noción falsa de la propiedad distributiva

$$\begin{aligned}
 (13 + 17 + 10)^2 &= (13 + 17)^2 + 2 \cdot (13 + 17) \cdot 10 + 10^2 \\
 13^2 + 17^2 + 10^2 &= 13^2 + 17^2 + 2 \cdot (13 + 17) \cdot 10 + 10^2 \\
 169 + 289 + 100 &= 169 + 289 + 26 + 34 \cdot 10 + 100 \\
 558 &= 5180 + 100 \\
 558 &= 5280
 \end{aligned}$$

Estudiante de 3º de ESO

Dificultades asociadas a la aritmética

Detectar un patrón requiere centrarse y prestar atención a un invariante o relación y abstraer una posible propiedad.

Dificultades asociadas a la generación de patrones

12 x 12	4 x 4	9 x 9
13 x 11	5 x 3	10 x 8

- 10x10, 11x11, 12x12 ... (números de igual valor con dos dígitos)
- Multiplicación de números de dos dígitos pero con diferente valor
- Multiplicación de números de un dígito con el mismo valor
- Multiplicación de números de un dígito con diferente valor
- Intercalar números de dos dígitos con otros de un dígito

12 x 12 → Dos dígitos y se multiplica por el mismo número
 13 x 11 → Inferior al 13 en 2 unidades.
 Dos dígitos, el número es superior al de arriba en una unidad y se multiplica por un número 2 unidades menor.

Estudiantes de 1º magisterio

Dificultades asociadas a la generalización de patrones

12 x 12	4 x 4	9 x 9
13 x 11	5 x 3	10 x 8

La 1ª relación sería:

$m = 12$

$m \times m$ $(m+1) \times (m-1)$	$\frac{m}{3} \times \frac{m}{3}$ $(\frac{m}{3} + 1) \times (\frac{m}{3} - 1)$	$(m-3) \times (m-3)$ $(m-2) \times (m-4)$
--------------------------------------	--	--

Dificultades asociadas a la generalización de patrones

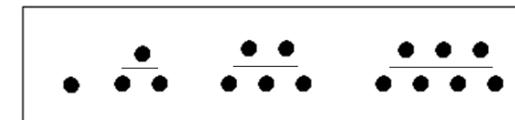
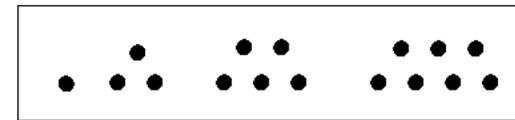
Expresión de la generalización

Dificultad para entender que la expresión del término general de una secuencia numérica no es un elemento simple

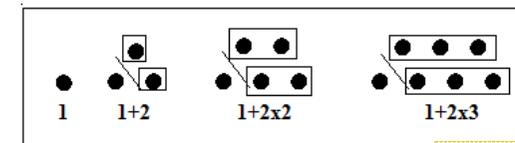
Para la sucesión 1, 3, 5, 7, ...
Pretenden notar el término general solo con una letra, argumentando que en todos los términos de la secuencia hay solo un número

Dificultades asociadas a la expresión de la generalización de patrones

1, 3, 5, 7, ...



1, 1+2, 2+3, 3+4, ... n+(n+1)



1, 1+2, 1+2x2, 1+2x3, ... 1+2xn

Estudiantes de 8º EGB

Dificultades asociadas a la generalización de patrones

Como en cualquier lenguaje, pueden surgir dificultades debidas a las características del propio lenguaje o al hacer traducciones entre lenguajes diferentes.

Dificultades asociadas al lenguaje algebraico

Traducción entre lenguajes

El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a dicho número



$$(\sqrt{x})^y$$

AH. Pongo ésta porque la raíz cuadrada de un número que vale x es igual a dicho número

MP. No, está mal... porque no dice que esté elevada a dos, dice la raíz cuadrada de un número elevada a otro número

Estudiantes de 4º curso de ESO

Dificultades asociadas al lenguaje algebraico

Uso de letras

Dificultad para dar significado a las letras, (suplencia de objetos o palabras) consecuencia del uso desigual que se hace en aritmética y en álgebra.

Pensar que diferentes letras representan diferentes valores.

No entender que una letra representa un número generalizado.

Dificultades asociadas al lenguaje algebraico

$$4^2 + 7^2 + 2 \cdot 4 \cdot 7$$
$$6^2 + 10^2 + 2 \cdot 6 \cdot 10$$
$$23^2 + 15^2 + 2 \cdot 23 \cdot 15$$

Con números $3^2 + 6^2 + 2 \cdot 3 \cdot 6$

Con símbolos algebraicos (letras): $x^2 + y^2 + n \cdot x \cdot y$

Estudiante de 3º curso de ESO

Dificultades asociadas al lenguaje algebraico

Uso de símbolos

Equivalencia del signo igual

$75 + 23 = 23 + 75$ falsa porque $75 + 23$ no es ni 75 ni 23	$7 + 15 = 8 + 15$ falsa porque $7 + 15$ no es 8 ni 15	$53 + 41 = 54 + 40$ falsa porque $53 + 41$ no es ni 54 ni 40	$16 + 14 - 14 = 36$ verdadera porque $16 + 14 - 24 = 36$
--	---	--	--

Estudiante de 3º de primaria

Dificultades asociadas al lenguaje algebraico

$$30 \cdot 20 - 20 \cdot 14 = 30 \cdot (20 - 14)$$
$$600 - 280 = 600 - 420$$
$$320 = 180$$

Es incorrecta porque _____

$$5 \cdot (26 - 22) + 5 \cdot 16 = 5 \cdot (26 - 22 - 16)$$
$$130 - 110 + 80 = 130 - 110 - 80;$$
$$0 = -60$$

Es incorrecta porque los dos números no son iguales

Estudiantes de 3º de ESO

Dificultades asociadas al lenguaje algebraico

Estructura de las expresiones algebraicas

La estructura **externa o superficial** muestra los términos que componen la expresión, los signos que los relacionan, el orden de los diferentes elementos y las relaciones que existen entre ellos, da cuenta de la forma en que una entidad se compone de partes.

La **estructura interna** describe el valor de la expresión y las relaciones entre los componentes de la expresión con el mismo, estas acciones requieren mayor implicación de conocimientos

Asociada a la estructura de las expresiones algebraicas

Sentido estructural

Se sugiere que un estudiante muestra buen sentido estructural cuando opta por un método eficaz y elegante para resolver un problema algebraico

$$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{(x-7)^2}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{1}{(x-7)}$$

Estudiante de 1° de bachillerato.

Asociada a la estructura de las expresiones algebraicas

Calcular secuencialmente es un escollo que a veces conduce a no alcanzar éxito en la tarea

$$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{x^2 - 14x + 49}{(x^2 + 2x + 1)(x-7)} = \frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^3} = \frac{x^2 + 14x + 49}{x^3(-7)^3 + 3x^2(-7) + 3x(-7)^2 + (-7)^3} = \frac{x^2 + 14x + 49}{x^3(-343) + 3x^2(-7) + 3x(49) - 343}$$

Estudiante de 1° de bachillerato.

Dificultades asociadas a la estructura

Reproducir la estructura de una expresión algebraica

$$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^2(x-7)}$$

$$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^2(x-7)} \quad \frac{a^2 - 10a + 36}{(a-8)^2(a-8)}$$

Estudiante 1

$$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^2(x-7)}$$

$$\frac{2a^2 - 28a + 98}{(2a-14)^2(2a-14)}$$

Estudiante 2

Estudiantes de 1° de bachillerato.

Dificultades asociadas a la estructura

Castro, E. (1994)
Molina, M. (2007)
Cañadas, M^a. C. (2007)
Trujillo, P. (2008)
Vega-Castro. D. (2010)
Rodríguez- Domingo, S. (2011)

Para finalizar

Un equilibrio entre las diferentes componentes del álgebra y la consideración de las variadas situaciones que las hacen significativas, puede permitir a los estudiantes comprender la pertinencia del álgebra, su estructura, el significado de los conceptos algebraicos fundamentales y el uso de razonamiento algebraico (Bednarz y Janvier, 1996)

Para finalizar

Bajo esta creencia nuestro interés actual está centrado en experimentar propuestas de enseñanza dentro del paradigma de la metodología de diseño. Dichas propuestas vienen enmarcadas por el análisis didáctico, de los conceptos involucrados en las propuestas y que dan soporte científico a los tres momentos diferentes de los experimentos de enseñanza: preparación, implementación y análisis de resultados.

Para finalizar

