Eine Veranschaulichung der Aufgabe finden Sie hier!

Die Funktion f, mit

$$f(x)=-\frac{1}{10}x^3+\frac{13}{10}x^2-3x$$

besitzt einen Hochpunkt H.

Die lineare Funktion t_H ist die Tangente am Graphen der Funktion f durch den Punkt H.

Die beiden Punkte A und B befinden sich ebenfalls auf dem Graphen von f.

Für die x-Koordinate von A gilt

$$x_A=x_H-a, a\in\mathbb{R}^+$$

Für die x-Koordinate von B gilt

$$x_B=x_H+a, a\in\mathbb{R}^+$$

Die lineare Funktion t_A ist die Tangente am Graphen der Funktion f durch den Punkt A.

Die lineare Funktion t_B ist die Tangente am Graphen der Funktion f durch den Punkt B.

a) Bestimmen Sie rechnerisch den Hochpunkt von f.
Zur Kontrolle und zum Weiterrechnen:

$$H=\left(\frac{\sqrt{79}+13}{3},\frac{79\sqrt{79}+442}{135}\right)\approx(7.296064805772, 8.475313770133)$$

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Punkte A und B durch

$$A:=\left(\frac{-3\,a+\sqrt{79}+13}{3},\frac{27\,a^3-27\,a^2\sqrt{79}+158\sqrt{79}+884}{270}\right)$$

$$B:=\left(\frac{3\,a+\sqrt{79}+13}{3},\frac{-27\,a^3-27\,a^2\sqrt{79}+158\sqrt{79}+884}{270}\right)$$

gegeben sind.

c) Bestimmen Sie rechnerisch die Funktionsgleichungen der Tangenten t_H, t_A, t_B.
Zur Kontrolle und zum Weiterrechnen:

$$t_H(x):=\frac{1}{135}\left(79\sqrt{79}+442\right)$$

$$t_A(x):=\frac{-1}{5}a^3-\frac{3}{10}a^2x-\frac{1}{10}a^2\left(-2\sqrt{79}-13\right)+\frac{1}{5}\sqrt{79}\,a\,x-\frac{1}{15}a\left(13\sqrt{79}+79\right)-\frac{1}{135}\left(-79\sqrt{79}-442\right)$$

$$t_B(x):=\frac{1}{5}a^3-\frac{3}{10}a^2x+\frac{1}{10}a^2\left(2\sqrt{79}+13\right)-\frac{1}{5}\sqrt{79}\,a\,x+\frac{1}{15}a\left(13\sqrt{79}+79\right)+\frac{1}{135}\left(79\sqrt{79}+442\right)$$

d) Bestimmen Sie rechnerisch die Schnittpunkte S_1 von t_A und t_H und S_3 von t_B und t_H.
Zur Kontrolle und zum Weiterrechnen:

$$S_1:=\left(\frac{-6\,a^2+6\,a\sqrt{79}+39\,a-26\sqrt{79}-158}{9\,a-6\sqrt{79}},\frac{79\sqrt{79}+442}{135}\right)$$

$$S_3:=\left(\frac{6\,a^2+6\,a\sqrt{79}+39\,a+26\sqrt{79}+158}{9\,a+6\sqrt{79}},\frac{79\sqrt{79}+442}{135}\right)$$

e) Auch die Tangenten t_A und t_B haben einen gemeinsamen Schnittpunkt.

(1) Bestimmen Sie rechnerisch den Schnittpunkt S_2 der beiden Tangenten t_A und t_B.

Zur Kontrolle und zum Weiterrechnen:

$$S_2 := \left(\frac{3\,a^2\,\sqrt{79}+79\,\sqrt{79}+1027}{237}, \frac{-81\,a^4\,\sqrt{79}+2133\,a^2\,\sqrt{79}+12482\,\sqrt{79}+69836}{21330}\right)$$

f) Die Punkte S_1, S_2 und S_3 bilden für bestimmte Werte von a ein Dreieck oberhalb des Graphen von t_H.

S_2 oberhalb vom Graphen von t_H liegt.

Zur Kontrolle und zum Weiterrechnen:

$$a_1 = 0, a_2 = 5{,}1316$$

Der Flächeninhalt des entstandenen Dreiecks ist eine Funktion des Parameters a.

Bestimmen Sie rechnerisch die Funktionsgleichung der Funktion A_Δ, die jedem Wert des Parameters a den Flächeninhalt des Dreiecks zuordnet.

Zur Kontrolle und zum Weiterrechnen:

$$A_\Delta(a) = \frac{-9\,a^7+474\,a^5-6241\,a^3}{45\,\sqrt{79}\,a^2-1580\,\sqrt{79}}$$

g) Bestimmen Sie rechnerisch den maximal möglichen Flächeninhalt des Dreiecks oberhalb des Graphen von t_H. Auf die Untersuchung der Randwerte darf verzichtet werden.

Zur Kontrolle und zum Weiterrechnen:

Für $a = 3.6856933601$ ist der Flächeninhalt mit $A \approx 8{,}506426608$ maximal.