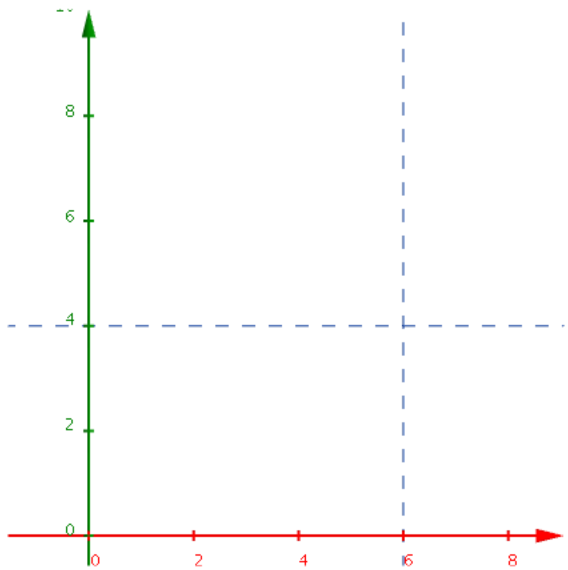
Clase 16. Lunes, 9 de julio de 2018.

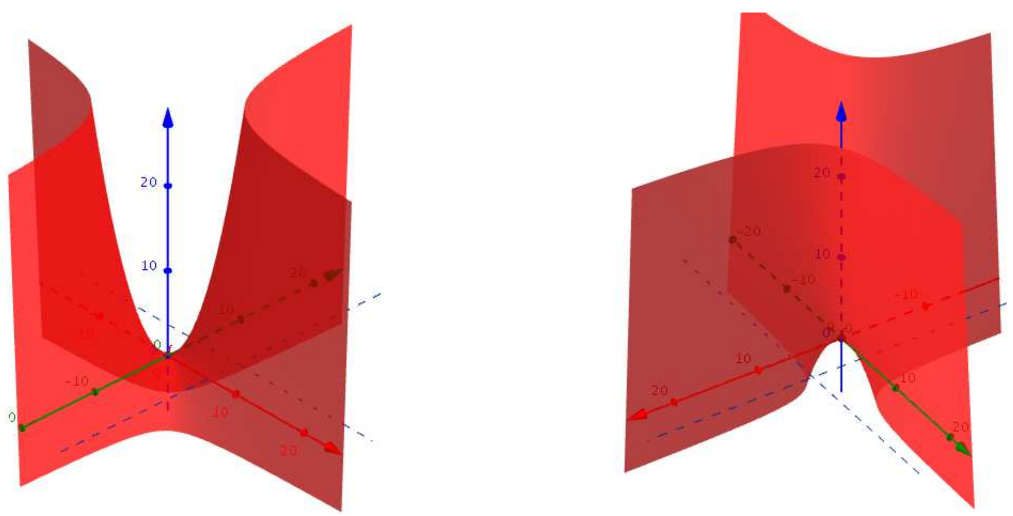
Resuelve las siguientes integrales

Estime el volumen del sólido que yace debajo de la superficie $z = xy$ y arriba del rectángulo $R = \{(x, y)|0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 4\}$

La región de integración se muestra a continuación



Sobre ésta, se encuentra la superficie $z = xy$ cuya gráfica es la siguiente



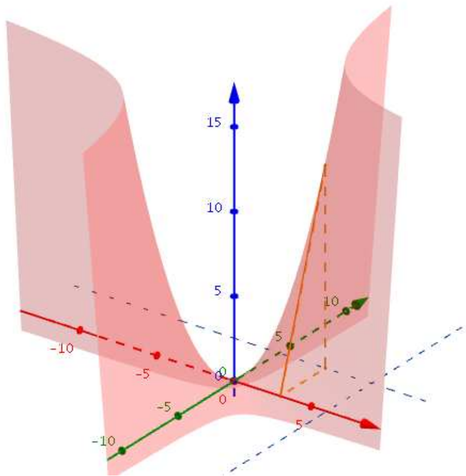
El volumen comprendido sobre la región rectangular y la superficie está dado por la integral

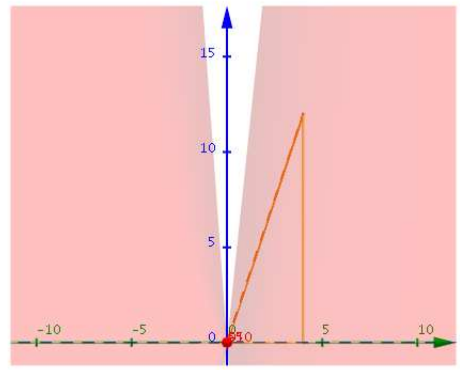
$$\int_0^6 \int_0^4 xydydx = \int_0^4 \int_0^6 xydxdy$$

Esta igualdad se cumple precisamente porque la región es rectangular. Tomemos entonces la integral múltiple del lado izquierdo. Integraremos con respecto a y en primer lugar. La integral

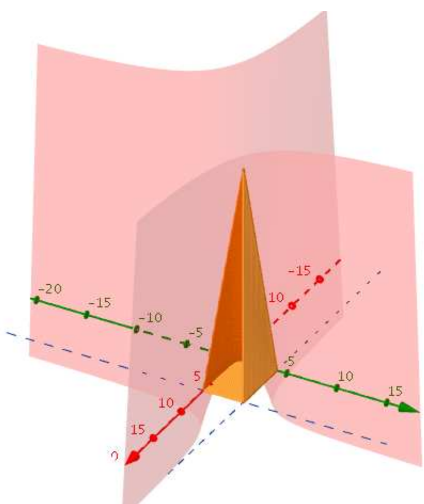
$$\int_0^4 xydy = x \int_0^4 ydy = \left| x\frac{y^2}{2} \right|_0^4 = 8x$$

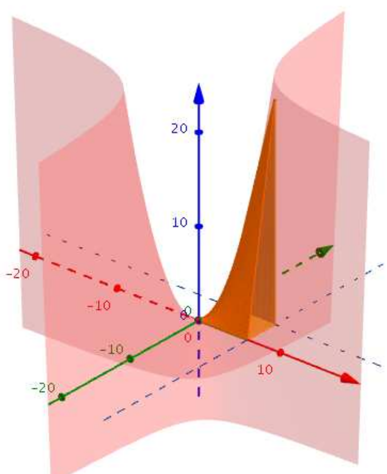
Esta integral representa el área de las secciones que se extienden a lo largo del eje y, como la que se muestra a continuación





La expresión $8x$ tiene todo sentido, ya que el área de los triángulos naranjas de la figura anterior dependerá de su posición sobre el eje x. Ahora, al sumar las áreas de cada uno de esos triángulos, se obtiene el volumen buscado. Tal hecho se muestra en la figura siguiente. Observa que efectivamente parece que hay un sólido, siendo éste el resultado de superponer los triángulos a lo largo del eje x, en el intervalo $[0, 6]$.

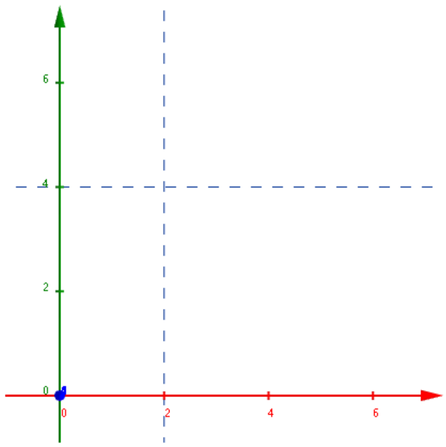


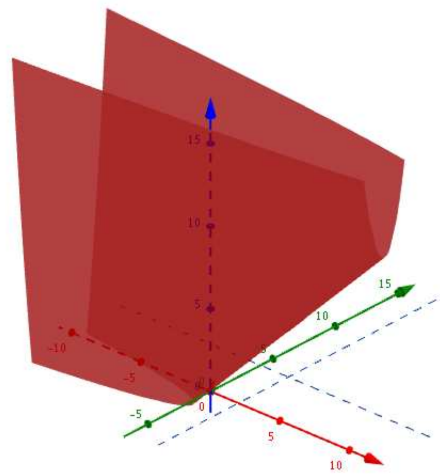


Este volumen está dado por

$$\int_0^6 8x dx = 4x^2\Big|_0^6 = 144u^3 ☻$$

Calcule el volumen del sólido que yace debajo de la superficie $z = x + 2y^2$ y arriba del rectángulo $R = [0, 2] \times [0, 4]$
La región de integración se muestra en la figura siguiente





y sobre ésta se eleva la superficie $x + 2y^2$. Como la región es rectangular, el volumen puede representarse por cualquiera de las dos integrales dobles siguientes:

$$\int_0^2 \int_0^4 x + 2y^2 dydx = \int_0^4 \int_0^2 x + 2y^2 dxdy$$

Tomemos el lado izquierdo

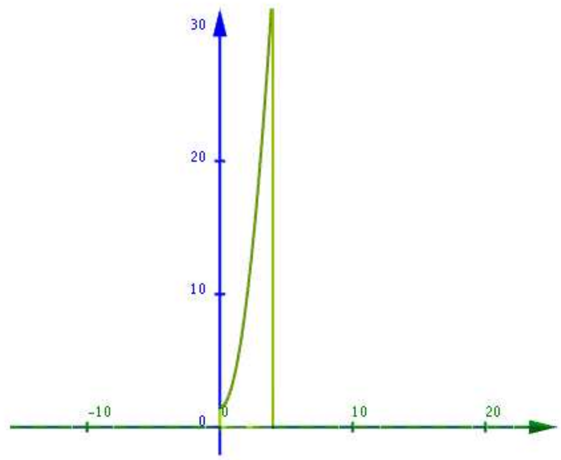
$$\int_0^2 \int_0^4 x + 2y^2 dydx$$

Primero se hace la integral con respecto a y

$$\int_0^4 x + 2y^2 dy = x \int_0^4 dy + \int_0^4 2y^2 dy = xy|_0^4 + \left.\frac{2}{3}y^3\right|_0^4$$

$$= 4x + \frac{128}{3}$$

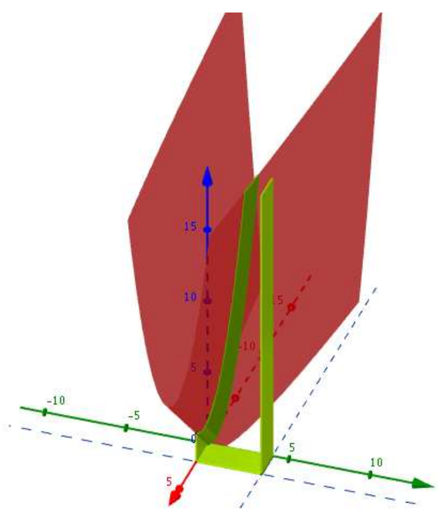
que representa el área de cada figura como las que se muestran a continuación

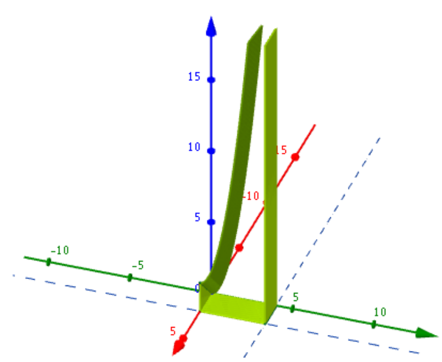


Ahora, integramos con respecto a x haciendo

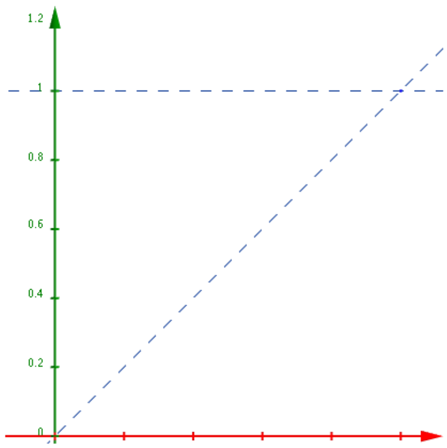
$$\int_0^2 4x + \frac{128}{3}dx = 2x^2\big|_0^2 + \frac{128}{3}x\bigg|_0^2 = 8 + \frac{256}{3} = \frac{280}{3}u^3$$

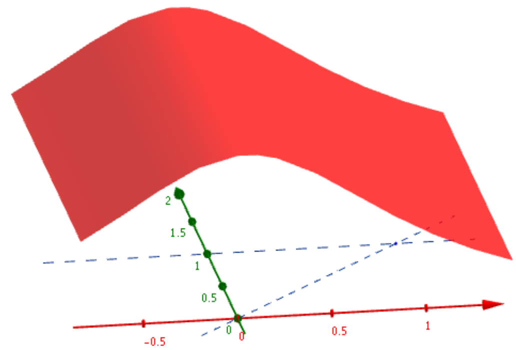
Por lo que el volumen comprendido bajo la superficie $x + 2y^2$ es de aproximadamente $93.33u^3$





Estime el volumen del sólido que yace debajo de la superficie $z = \frac{1}{1+x^2}$ y arriba de la región triangular con vértices en $(0,0), (1,1)$ y $(0,1)$





Solución. La integral es

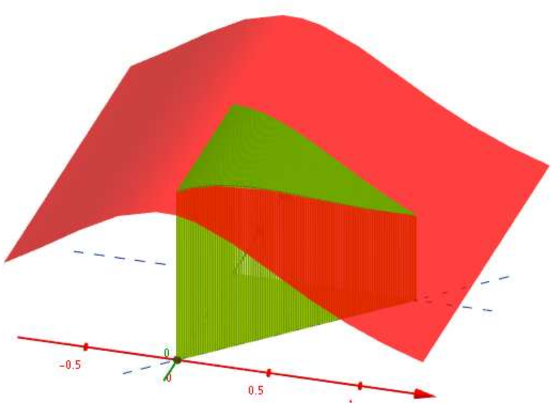
$$\int_0^1 \int_x^1 \left(\frac{1}{1+x^2} \right) dydx$$

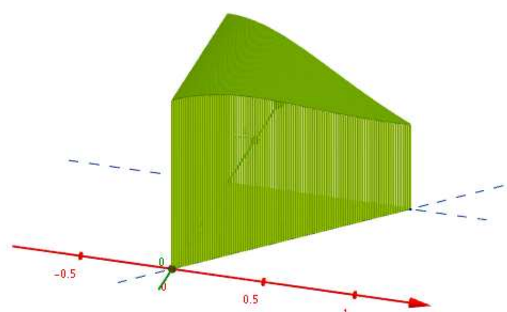
La primer integral es

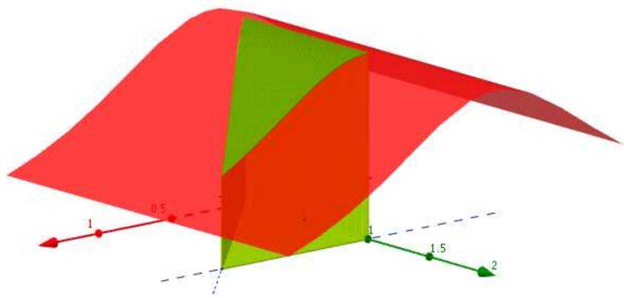
$$\frac{1-x}{x^2+1}$$ ☻

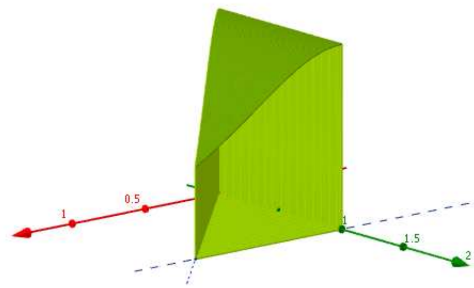
La segunda integral es

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{4} \approx 0.438824$$ ☻






1
0.5
1
1.5
2


1
0.5
1
1.5
2