Problemas – Tema 1

CCSS Problemas - 8b - Más problemas sobre diferencia entre extremos relativos y absolutos

1. Sea $f(x)=\frac{1}{4-x^2}$ **. Hallar su máximo y su mínimo absolutos en el intervalo** $[-1,1]$ **.**

El dominio de la función es toda la recta real salvo los valores $x=\pm 2$, por anular al denominador del cociente de polinomios.
Los extremos relativos de la función se obtienen derivando e igualando a cero → $f'(x)=0$.

$$f'(x)=\frac{2x}{(4-x^2)^2}$$
$$2x=0 \rightarrow x=0$$

En el punto $(0,\frac{1}{4})$ tenemos un candidato a extremo relativo.

Si calculamos la segunda derivada y evaluamos para $x=0$, tendremos:

$f''(x)=\frac{6x^2+8}{(4-x^2)^3}$, $f''(0)=8>0$ → $(0,\frac{1}{4})$ es un mínimo relativo

Si evaluamos la función en $x=-1$ y en $x=1$ obtenemos las siguientes imágenes:

$$x=-1 \rightarrow f(-1) \rightarrow (-1,\frac{1}{3})$$

$$x=1 \rightarrow f(1) \rightarrow (1,\frac{1}{3})$$

Conclusión: $(0,\frac{1}{4})$ es un mínimo absoluto (imagen más pequeña), mientras que $(1,\frac{1}{3})$ y $(-1,\frac{1}{3})$ son dos máximos absolutos (imágenes más grande) en el intervalo $[-1,1]$.

2. Sea la función $f(x)=x^2-8\ln(x)$ **definida en** $f:1\rightarrow+\infty$ **.**

a) Estudia intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcula los extremos absolutos y relativos de la función, y obtener el valor de la ordenada en cada extremo.

c) Estudia los intervalos de concavidad y convexidad.

d) ¿Posee asíntota oblicua la gráfica de la función? Justificar la respuesta.

a) El dominio de la función es $Dom(f)=x\geq 1$, según nos dice el enunciado.

Derivamos e igualamos a cero para obtener puntos críticos.

$$f(x)=x^2-8\ln(x) \rightarrow f'(x)=2x-\frac{8}{x}=\frac{2x^2-8}{x} \quad , \quad f'(x)=0 \rightarrow 2x^2-8=0 \rightarrow x=\pm 2$$

Solo tomamos el valor $x=2$, ya que $x=-2$ no pertenece al dominio de la función.

Estudiamos el signo de la derivada en los siguientes intervalos.

$[1,2) \rightarrow f'(1)<0 \rightarrow f(x)$ estrictamente decreciente

$(2,+\infty) \rightarrow f'(10)>0 \rightarrow f(x)$ estrictamente creciente

b) En $x=2$ tenemos un extremo relativo ya que la derivada en ese punto es nula y a la izquierda la función decrece, y a la derecha la función crece. Además, por ser el único extremo relativo del dominio también será extremo absoluto.

$f(2)=4-8\ln(2)\simeq-1{,}55$ $\rightarrow$ Mínimo absoluto en $(2,\ -1{,}55)$

¡Ojo! Viene un detalle bastante sutil. En $x=1$ la función está definida. Además la función no está definida a la izquierda de $x=1$ y es estrictamente decreciente a su derecha. En $x=1$ no se anula la derivada, por lo que no es un extremo suave (extremo relativo). Pero si podemos decir que en $x=1$ encontramos un máximo local no suave por existir un entorno alrededor de $x=1$ donde la mayor imagen se alcanza en $x=1$. Como indico, este extremo local no debemos confundirlo con el concepto de extremo relativo suave.

$f(1)=1-8\ln(1)=1$ $\rightarrow$ Máximo local (no suave) en $(1,1)$

c) La curvatura la estudiamos con la segunda derivada.

$$f''(x)=\frac{4x\cdot x-(2x^2-8)}{x^2}=\frac{2x^2+8}{x^2} \quad , \quad f''(x)=0 \rightarrow 2x^2+8=0 \rightarrow x=\sqrt{-4}\notin \mathbb{R}$$

No tenemos puntos candidatos a puntos de inflexión, al no anularse la segunda derivada para ningún valor real.

La curvatura la estudiamos, de manera única, en todo el dominio.

$x\geq 1 \rightarrow f''(1)>0 \rightarrow f(x)$ convexa U

d) Las asíntotas oblicuas $y=mx+n$ pueden aparecer en el comportamiento de la función cuando la variable tiende a infinito y si converge el siguiente límite:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-8\ln(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(x-\frac{8\ln(x)}{x}\right)=\infty-0=\infty$$

Donde hemos usado que, en el infinito, el cociente ente logaritmo y polinomio tiende a cero.

Por lo tanto, al no converger a un valor finito el anterior límite, no existe asíntota oblicua.

No tiene sentido preguntarse por la AO en menos infinito porque la función solo está definida para $f:1\to+\infty$.