GeoGebra 3D: un pas endavant

El material per a aquest taller està orientat, com diu el títol, a fer "un pas endavant" cap a l'ús del GeoGebra 3D a partir d'un coneixement del programa, la relació entre els objectes a la finestra gràfica i la finestra algebraica, l'ús d'eines o de comandaments en la línia d'entrada, el recurs dels punts lliscants com a visualització de valors numèrics que podem variar, i d'altres aspectes fonamentals pel que fa al GeoGebra.

Per treballar tenim dues opcions: fer-ho amb les eines que ens dóna el programa o bé directament des de la línia d'entrada. En aquest segons cas podem anomenar nosaltres els objectes amb la qual cosa podem controlar millor el desenvolupament de l'aplicació. També és interessant comentar que (potser com a idea general "per a sempre") convé que al menú "Opcions" estigui activa l'opció "No etiquetis objectes nous". Si no ho feu us podeu trobar amb un munt d'objectes amb la seva etiqueta (el nom de l'objecte) corresponent i que això, en comptes d'ajudar, emboliqui la visió.

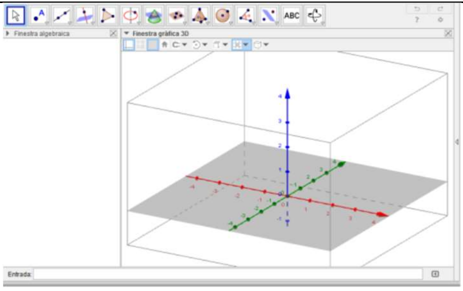
Índex i temporització

0. Benvinguda i presentació i explicació de com anirà el taller i que engeguin el GeoGebra 3D (3 minuts)
1. Introducció a l'entorn de treball. (potser 10 minuts)
2. Les eines bàsiques.
3. Construcció de cilindres, cons, esferes i prismes. Càlcul d'àrees i volums amb l'ajut de la finestra algebraica.
4. Construcció de poliedres.
5. Interseccions i seccions. (aprox. 15 minuts)
6. Rectes, plans i sistemes d'equacions. (aprox. 15 minuts)

   + algun problema geomètric (5-10 minuts)

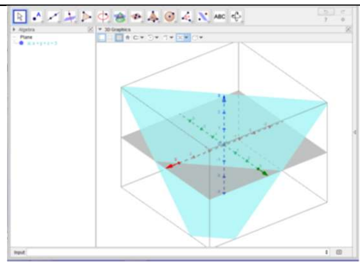
7. Problemes d'optimització
8. Transformacions (només fer-ne referència)

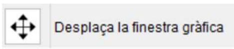
1. Introducció a l'entorn de treball.

Què veiem quan engeguem el GeoGebra si optem per l'escenari "*Gràfics3D i finestra algebraica*"? La finestra gràfica 3D. Podem fer aparèixer unes icones per gestionar-la. També veiem...	 Finestra algebraica i finestra 3D

- Els eixos xyz visibles o no clicant a la icona
- El Pla xy especialment destacat amb possibilitat de graella (visibles o no) (quan interessi, aquest pla es pot visualitzar a la finestra gràfica 2D; ja ho practicarem en unes de les activitats d'aquest taller)
- Experimenteu pel que fa a girar "a mà" la vista (amb la icona activa, amb el botó esquerre o el dret; amb altres icones actives, només amb el botó dret). Si arrossegueu es pot quedar girant. Clic per parar. També amb la icona de la finestra gràfica o amb l'eina 

. La rotació amb aquestes icones és sempre respecte l'eix de les z.

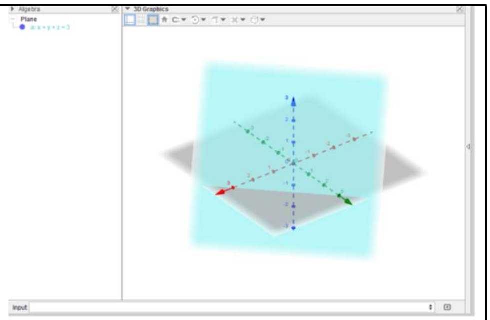
Sobre la caixa de representació. Hi hem de pensar força! Veurem el lligam entre la visualització gràfica (Geo) i l'àlgebra (Gebra) i diferents possibilitats de representació.	 Visualització d'un pla (pla xy visible)

- Visualització de plans (i seccions d'un ortoedre). Poseu a la línia d'entrada **x+y+z= 0**. Heu dibuixat un pla...però si no veieu res haureu de girar la vista i segurament veureu un hexàgon! Podeu canviar la definició d'aquest pla a la finestra algebraica, aneu fent proves, i aneu mirant... per exemple amb x+y+z= 3, x+y+z=5, x+y+z=8, 2x+2y+z=8, 4x+2y+z= 10 i també 3x+2y= 0 possiblement un rectangle!
- Podeu veure que fent més ample o allargada o més gran la pantalla... canvien les dimensions de la caixa de representació i pot canviar l'aspecte de les figures que hi ha representades! (per això podria ser que el que es diu en el punt anterior no fos del tot exacte)
- Això mateix passa si desplacem la finestra gràfica 3D amb l'eina 

activa. Hi ha dues possibilitats per aquest desplaçament, amb les icones que apareixen en pantalla, ben entenedores
- Encara podeu provar els zooms 

i fixar-vos en "fins on es mostren" les graduacions dels eixos.
- Heu de saber que hi ha diferents tipus de perspectiva (aspecte molt especialitzat) i la possibilitat de fer una vista "real en 3D per a ulleres" (que ja practicarem en algun moment del taller).
- També és possible , si tenim una figura dibuixada, fer-ne les tres vistes des del punt de vista dels tres eixos (quelcom semblant a planta, alçat i perfil)

Més sobre la caixa de representació.
La podem treure i fer la representació sense que es vegi la caixa. Ho podem fer amb la icona  de la finestra gràfica, que permet fer-la visual o no, i fer-la més gran o més petita.

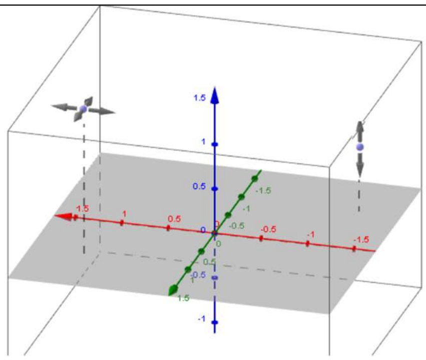

Visualització d'un pla i del pla xy
sense la caixa de representació

- Dibuixeu algun pla i confronteu-ne la visualització amb la caixa de representació present o no.
- Escriviu a la línia d'entrada la instrucció **esfera[(1,1,1), 2]** (centre, radi) i observeu, amb la caixa de representació o sense.

Els punts: creació i moviment

- Convé aprendre bé com es poden generar els punts
- I hem d'aprendre com es poden moure

Atenció!!! Les figures (plans, políedres, esferes,...) a l'espai no es poden moure " a mà"


Icones que mostren les possibilitats
per a moure els punts

- Amb la icona  activa es poden crear punts al pla XY. Aleshores, clicant sobre el punt apareix  i els podem moure horitzontalment, amb el ratolí o amb les fletxes del cursos; i tornant a clicar apareix i els podem moure verticalment, només amb el ratolí.
- També podem crear directament un punt a la línia d'entrada escrivint-ne les coordenades. Després el podem moure tal com s'acaba d'explicar.
- Quan tinguem dibuixat un objecte, amb la icona  activa podem crear un punt sobre aquest objecte i aleshores moure'l lliurement amb el ratolí sobre aquest objecte, però només sobre l'objecte (a no ser que en separem la dependència).
- Per la vinculació entre la finestra gràfica i el pla XY de la finestra 3D, un punt de la finestra gràfica crea un punt a la finestra 3D. Però aquest punt és un punt del pla.
- Feu proves de creació de punts de les diverses maneres i moveu-los a discreció.
- Podeu dibuixar un pla o una esfera i crear-hi un punt a sobre i veure com s'hi mou.

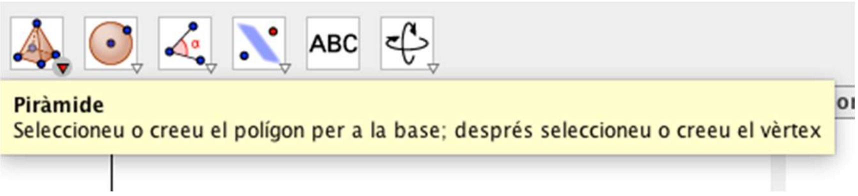
...i ja esteu a punt d'avançar cap a fer feina amb les eines del menú.

Algunes observacions sobre altres recursos

- Punts lliscants: s'han de crear a la finestra gràfica o la segona finestra gràfica. No es poden situar en la finestra 3D
- Imatges: no es poden importar imatges a la finestra 3D
- Textos: es poden posar textos a la finestra 3D i fixar-ne la posició vinculada a un punt. Però estan "plans a la pantalla". Per programa no es poden "girar a l'espai"

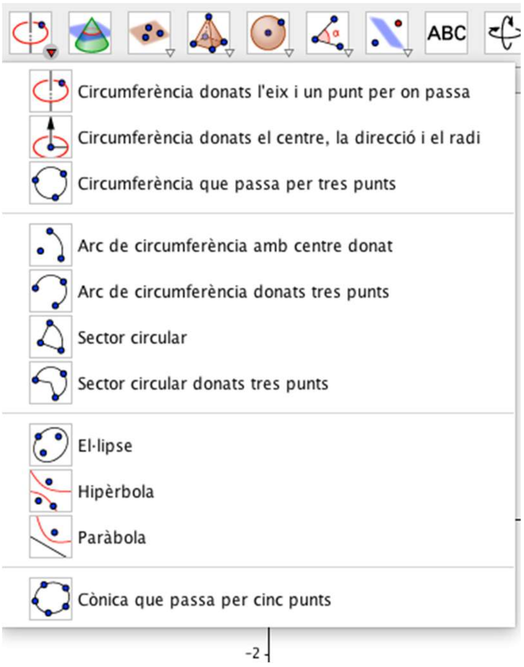
2. Les eines bàsiques.

Cada eina té una ajuda contextual:

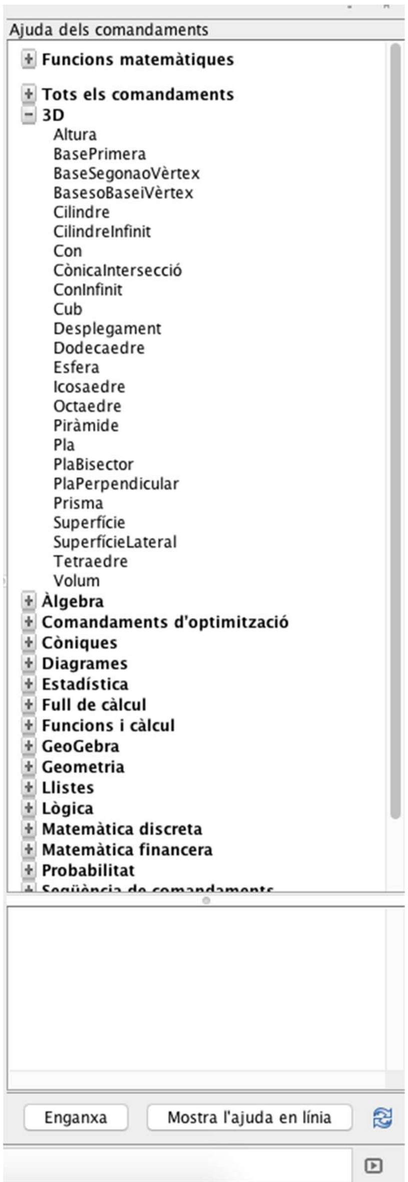


Observeu que moltes de les eines que trobem a la finestra gràfica surten també a la finestra 3D. Com a excepció tenim els polígons regulars i els rígids. Apareixen unes de noves com “Recta perpendicular”:

i d’altres per a la creació de circumferències, les dues primeres del conjunt d’eines següent:

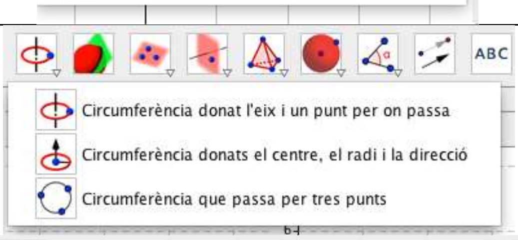


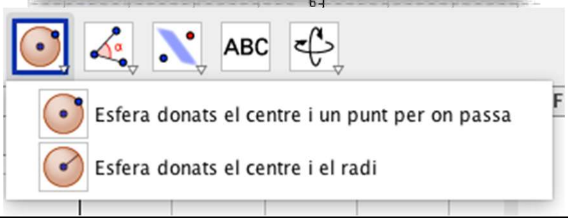
Algunes eines les podem introduir des de la línia d'Entrada i per això disposem d'una ajuda que es pot activar des de la mateixa Entrada:



Cada instrucció té la seva sintaxi inclosa i es pot enganxar a la Entrada.

3. Construcció de cilindres, cons, esferes i prismes. Càlcul d'àrees i volums amb l'ajut de la finestra algebraica.

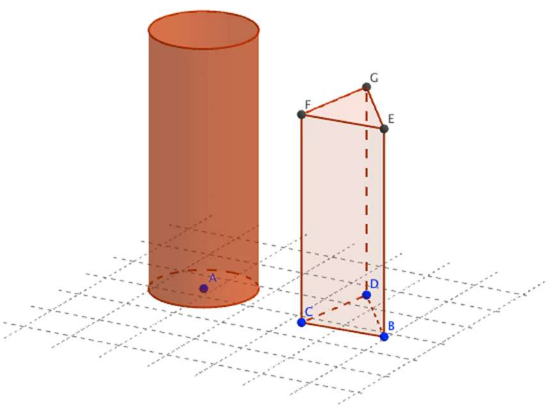
<table>
<tr>
<td>La construcció de prismes i piràmides és molt senzilla. Fins i tot ho podem fer arrossegant el ratolí per generar-los a partir del polígon de la base.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Circumferències i esferes.</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

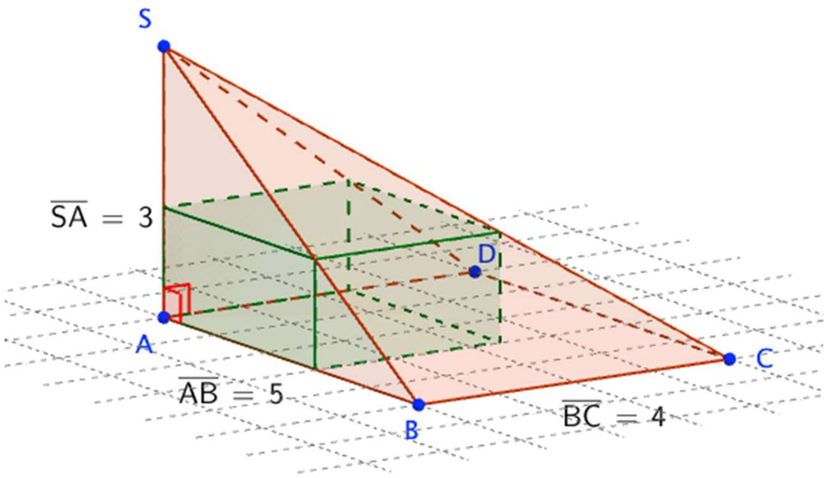
Cal tenir en compte que les eines no inclouen totes les possibilitats que ofereix el programa i que surten al llistat d'ajuda que hem vist anteriorment.

A la finestra algebraica hi trobem els volums de les figures, les àrees de les seves cares, les superfícies laterals i les longituds de les arestes. Podem fer-les servir per introduir textos amb aquests valors o per fer càlculs.

Un cilindre té un radi de 1 cm i una altra de 5 cm. Quines són les dimensions del prisma de manera que tingui el mateix volum que el cilindre?



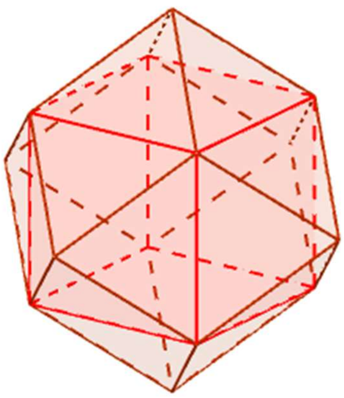
SABCD és una piràmide recta amb base el rectangle ABCD de dimensions 5 cm, 4 cm i 3 cm. Com podem inscriure-hi una capsa de volum màxim?



4. Construcció de poliedres.

Excepte en el cas del cub, els poliedres s'han de construir des de la línia d'Entrada amb instruccions que es corresponen amb el seu nom (tetraedre, octaedre, dodecaedre, icosaedre). Calen dos punts per construir-los. Un tercer punt serveix per definir el pla de la base.

Construir un cub amb 6 piràmides (una para a cada cara) amb un punt lliscant per controlar la seva altura. Animar el punt lliscant per obtenir un dodecaedre ròmbic (sòlid format per 12 rombes idèntics).



5. Interseccions i seccions.

Algun exercici d'interseccions aprofitant l'últim o els últims políedres que s'hagin construït

La part fonamental d'aquest apartat ha de ser mostrar les seccions còniques

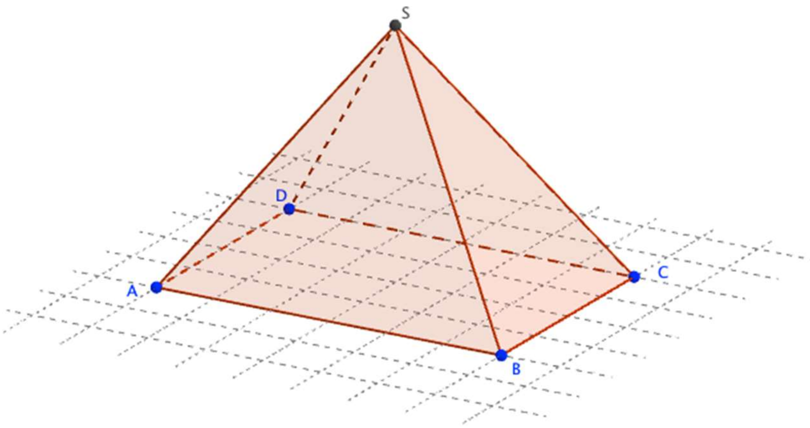
Un problema que es pot treballar aquí o en el següent apartat: buscar un vector que formi el mateix angle amb tres vectors donats. En una de les jornades (potser la passada) jo vaig mostrar com es veia quin era el focus d'una el·lipse com a secció cònica...però crec que un taller no és "per al lluïment" sinó per a ensenyar eines bàsiques

6. Rectes, plans i sistemes d'equacions.

A banda de l'eina "Recta perpendicular" que hem vist abans disposem d'eines per a la construcció de plans:

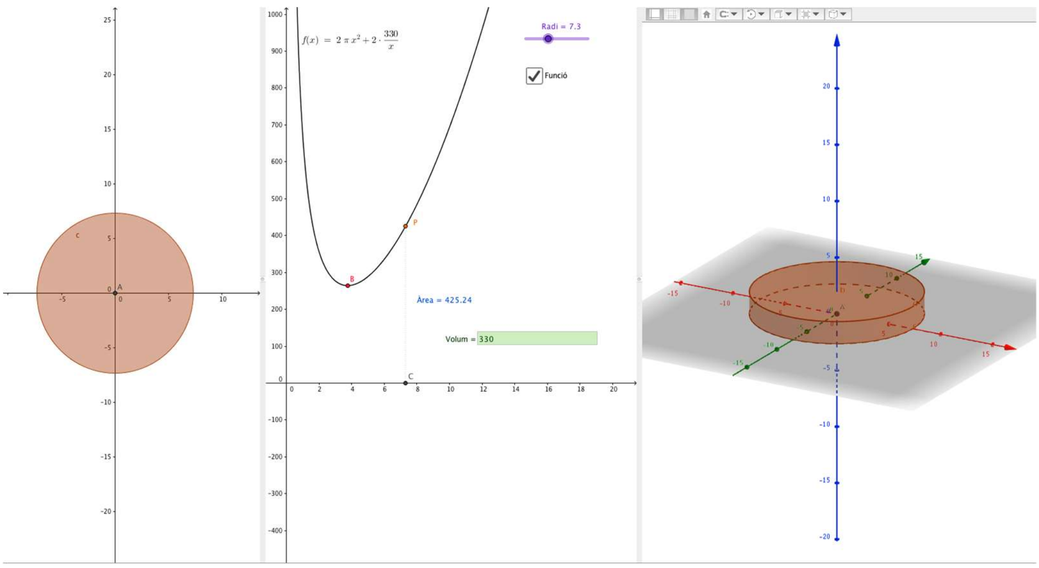
Construcció de plans	

SABCD es una piràmide de base el rectangle ABCD i de vèrtex S que està a sobre del centre del rectangle. Construir la esfera circumscrita a aquesta piràmide.



7. Problemes d'optimització.

Us proposem un problema molt senzill: Trobar el valor del radi pel qual l'àrea d'un cilindre de volum donat és mínima. Hauríem d'arribar al conjunt de finestres següent:



No és tant difícil com sembla. Observem que hi ha tres finestres gràfiques actives: la finestra gràfica, la segona finestra gràfica i la finestra 3D. Les hem d'obrir totes tres per començar. La posició relativa és irrellevant.

A la segona finestra gràfica hi posem un punt lliscant que anomenem Radi una casella d'entrada/sortida amb la llegenda "Volum". Prèviament haurem creat la variable volum i li haurem donat un valor com per exemple 330. Situem aquests dos objectes on creiem més convenient però tenint en compte on seran els eixos per quan representem la funció que volem optimitzar, l'àrea d'un cilindre de volum donat. Millor fixar ambdós objectes.

A la finestra gràfica hi dibuixem un cercle de radi donat pel punt lliscant Radi i a la finestra 3D un cilindre de base el cercle anterior i altura donada pel quocient del volum i de l'àrea del cercle (volum/(pi*$Radi^2$). Ho haurem de fer a la línia d'Entrada amb la instrucció:

Cilindre[<Circumferència>, <Altura>]

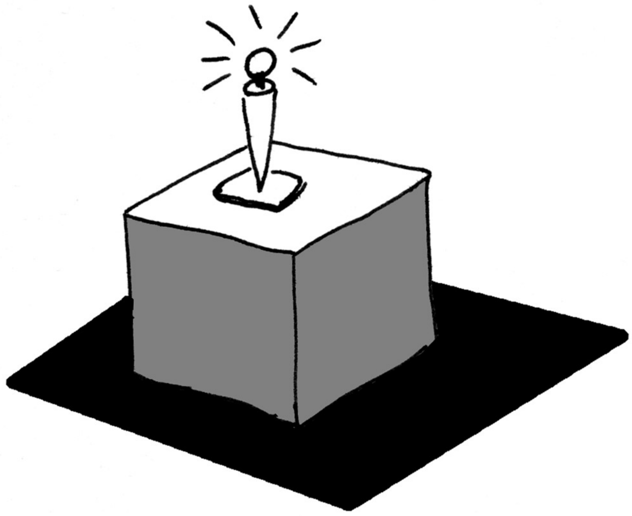
A la segona finestra gràfica hem de crear un punt P amb les coordenades (Radi, àrea del cilindre) i activar-ne la traça. Recordem que a la pestanya "Avançat" de les propietats d'un objecte hi podem indicar en quines finestres volem que sigui visible. L'àrea del cilindre la podem calcular a partir de les dades que ens dóna la finestra algebraica (recordem que també hi trobem la superfície lateral) o bé amb la funció corresponent que dóna l'àrea en funció del volum i del radi. Aquesta la funció la podem representar a la segona finestra gràfica per comprovar que el punt P es mou a obre i trobar-ne el mínim amb la instrucció Mínim.

8. Transformacions a l'espai

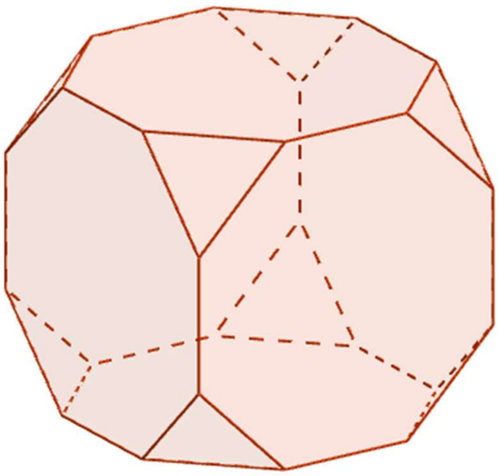
Podeu provar de fer transformacions a l'espai (simetries, rotacions, translacions, homotècies,…) De vegades són molt útils per a determinades construccions.

Propostes d'exercicis per MathieuBlossier de l'IREM de Rouen (França)

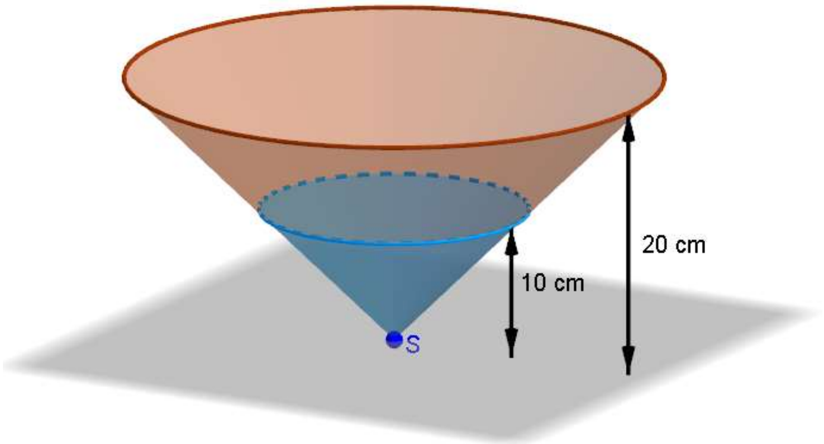
1. Un llum està a sobre d'una tauleta de nit de forma cúbica. L'ombra que es forma al terra es un quadrilàter l'aresta del qual és 9 vegades la d'una cara del cub. Quina és la posició del llum?



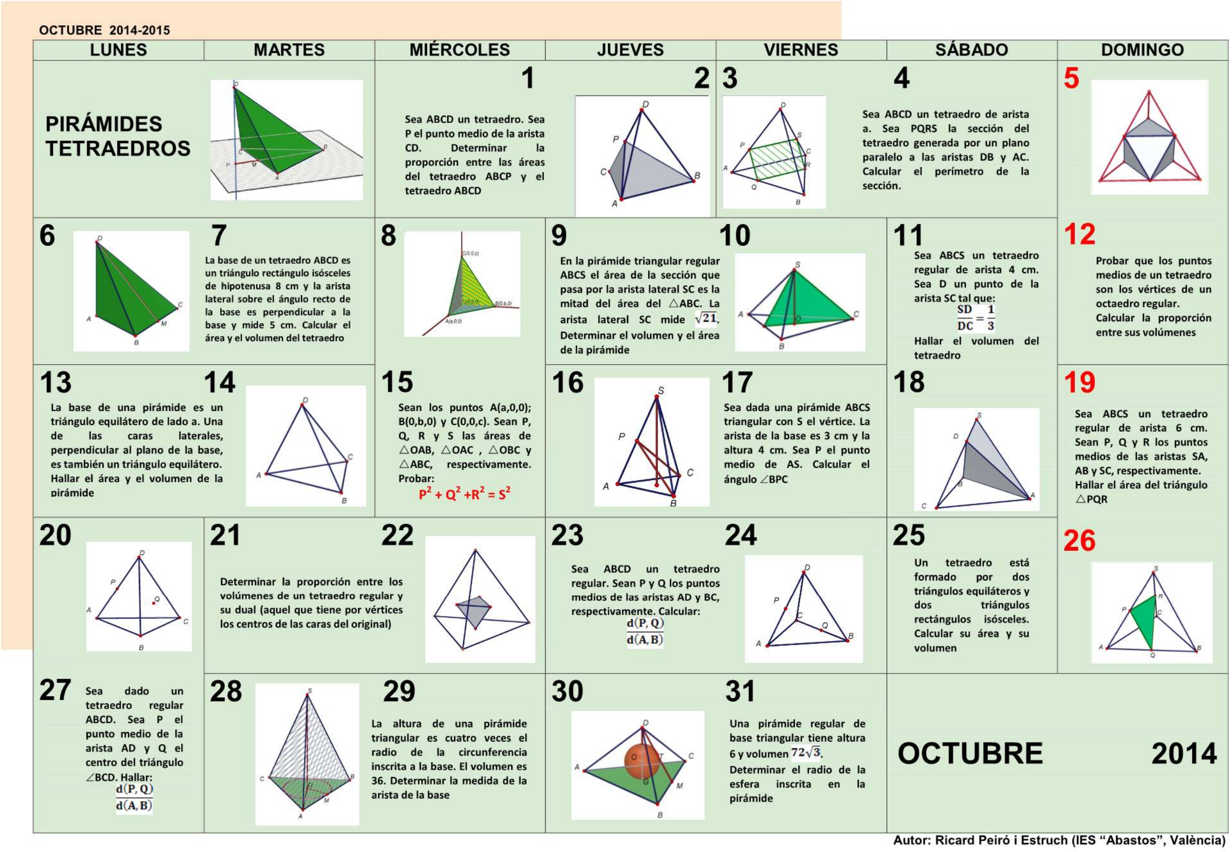
2. Construir un cub truncat (format per octògons regulars i triangles equilàters).



3. Un con de 20 cm d'altura i de vèrtex S té com a base un cercle de 20 cm de radi. El con està invertit i ple d'aigua fins a un altura de 10 cm. Si deixem caure una bala de 4 cm de radi dins de l'aigua, quina és la nova altura de l'aigua dins del con?



i més idees!



OCTUBRE 2014-2015

LUNES | MARTES | MIÉRCOLES | JUEVES | VIERNES | SÁBADO | DOMINGO

PIRÁMIDES TETRAEDROS

1-2. Sea ABCD un tetraedro. Sea P el punto medio de la arista CD. Determinar la proporción entre las áreas del tetraedro ABCP y el tetraedro ABCD

3-4. Sea ABCD un tetraedro de arista a. Sea PQRS la sección del tetraedro generada por un plano paralelo a las aristas DB y AC. Calcular el perímetro de la sección.

5.

6-7. La base de un tetraedro ABCD es un triángulo rectángulo isósceles de hipotenusa 8 cm y la arista lateral sobre el ángulo recto de la base es perpendicular a la base y mide 5 cm. Calcular el área y el volumen del tetraedro

8.

9-10. En la pirámide triangular regular ABCS el área de la sección que pasa por la arista lateral SC es la mitad del área del $\triangle ABC$. La arista lateral SC mide $\sqrt{21}$. Determinar el volumen y el área de la pirámide

11. Sea ABCS un tetraedro regular de arista 4 cm. Sea D un punto de la arista SC tal que: $\frac{SD}{DC}=\frac{1}{3}$ Hallar el volumen del tetraedro

12. Probar que los puntos medios de un tetraedro son los vértices de un octaedro regular. Calcular la proporción entre sus volúmenes

13-14. La base de una pirámide es un triángulo equilátero de lado a. Una de las caras laterales, perpendicular al plano de la base, es también un triángulo equilátero. Hallar el área y el volumen de la pirámide

15. Sean los puntos A(a,0,0); B(0,b,0) y C(0,0,c). Sean P, Q, R y S las áreas de $\triangle OAB$, $\triangle OAC$, $\triangle OBC$ y $\triangle ABC$, respectivamente. Probar: $P^2 + Q^2 + R^2 = S^2$

16-17. Sea dada una pirámide ABCS triangular con S el vértice. La arista de la base es 3 cm y la altura 4 cm. Sea P el punto medio de AS. Calcular el ángulo $\angle BPC$

18.

19. Sea ABCS un tetraedro regular de arista 6 cm. Sean P, Q y R los puntos medios de las aristas SA, AB y SC, respectivamente. Hallar el área del triángulo $\triangle PQR$

20.

21-22. Determinar la proporción entre los volúmenes de un tetraedro regular y su dual (aquel que tiene por vértices los centros de las caras del original)

23-24. Sea ABCD un tetraedro regular. Sean P y Q los puntos medios de las aristas AD y BC, respectivamente. Calcular: $\frac{d(P,Q)}{d(A,B)}$

25. Un tetraedro está formado por dos triángulos equiláteros y dos triángulos rectángulos isósceles. Calcular su área y su volumen

26.

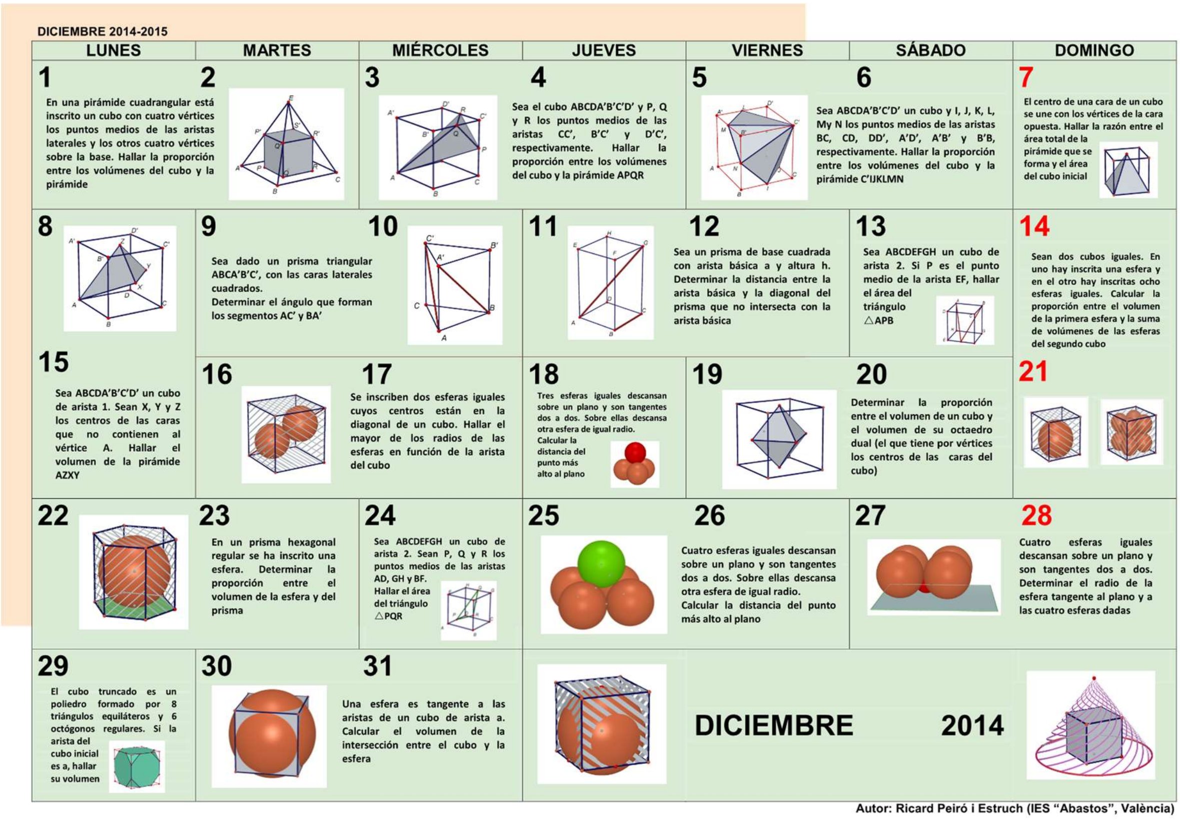
27. Sea dado un tetraedro regular ABCD. Sea P el punto medio de la arista AD y Q el centro del triángulo $\angle BCD$. Hallar: $\frac{d(P,Q)}{d(A,B)}$

28-29. La altura de una pirámide triangular es cuatro veces el radio de la circunferencia inscrita a la base. El volumen es 36. Determinar la medida de la arista de la base

30-31. Una pirámide regular de base triangular tiene altura 6 y volumen $72\sqrt{3}$. Determinar el radio de la esfera inscrita en la pirámide

OCTUBRE 2014

Autor: Ricard Peiró i Estruch (IES "Abastos", València)



DICIEMBRE 2014-2015

LUNES | MARTES | MIÉRCOLES | JUEVES | VIERNES | SÁBADO | DOMINGO

1-2. En una pirámide cuadrangular está inscrito un cubo con cuatro vértices los puntos medios de las aristas laterales y los otros cuatro vértices sobre la base. Hallar la proporción entre los volúmenes del cubo y la pirámide

3-4. Sea el cubo ABCDA'B'C'D' y P, Q y R los puntos medios de las aristas CC', B'C' y D'C', respectivamente. Hallar la proporción entre los volúmenes del cubo y la pirámide APQR

5-6. Sea ABCDA'B'C'D' un cubo y I, J, K, L, My N los puntos medios de las aristas BC, CD, DD', A'D', A'B' y B'B, respectivamente. Hallar la proporción entre los volúmenes del cubo y la pirámide C'IJKLMN

7. El centro de una cara de un cubo se une con los vértices de la cara opuesta. Hallar la razón entre el área total de la pirámide que se forma y el área del cubo inicial

8.

9-10. Sea dado un prisma triangular ABCA'B'C', con las caras laterales cuadrados. Determinar el ángulo que forman los segmentos AC' y BA'

11-12. Sea un prisma de base cuadrada con arista básica a y altura h. Determinar la distancia entre la arista básica y la diagonal del prisma que no intersecta con la arista básica

13. Sea ABCDEFGH un cubo de arista 2. Si P es el punto medio de la arista EF, hallar el área del triángulo $\triangle APB$

14. Sean dos cubos iguales. En uno hay inscrita una esfera y en el otro hay inscritas ocho esferas iguales. Calcular la proporción entre el volumen de la primera esfera y la suma de volúmenes de las esferas del segundo cubo

15. Sea ABCDA'B'C'D' un cubo de arista 1. Sean X, Y y Z los centros de las caras que no contienen al vértice A. Hallar el volumen de la pirámide AZXY

16-17. Se inscriben dos esferas iguales cuyos centros están en la diagonal de un cubo. Hallar el mayor de los radios de las esferas en función de la arista del cubo

18. Tres esferas iguales descansan sobre un plano y son tangentes dos a dos. Sobre ellas descansa otra esfera de igual radio. Calcular la distancia del punto más alto al plano

19-20. Determinar la proporción entre el volumen de un cubo y el volumen de su octaedro dual (el que tiene por vértices los centros de las caras del cubo)

21.

22-23. En un prisma hexagonal regular se ha inscrito una esfera. Determinar la proporción entre el volumen de la esfera y del prisma

24. Sea ABCDEFGH un cubo de arista 2. Sean P, Q y R los puntos medios de las aristas AD, GH y BF. Hallar el área del triángulo $\triangle PQR$

25-26. Cuatro esferas iguales descansan sobre un plano y son tangentes dos a dos. Sobre ellas descansa otra esfera de igual radio. Calcular la distancia del punto más alto al plano

27-28. Cuatro esferas iguales descansan sobre un plano y son tangentes dos a dos. Determinar el radio de la esfera tangente al plano y a las cuatro esferas dadas

29. El cubo truncado es un poliedro formado por 8 triángulos equiláteros y 6 octógonos regulares. Si la arista del cubo inicial es a, hallar su volumen

30-31. Una esfera es tangente a las aristas de un cubo de arista a. Calcular el volumen de la intersección entre el cubo y la esfera

DICIEMBRE 2014

Autor: Ricard Peiró i Estruch (IES "Abastos", València)