

Näherungsverfahren nach Heron

Das Heronverfahren, Heronsche Näherungsverfahren oder babylonische Wurzelziehen ist ein Rechenverfahren zur Berechnung einer Näherung der Quadratwurzel einer reellen Zahl $a > 0$.

Beispiel:

Im folgenden einfachen Beispiel wird die Wurzel aus 9 als Annäherung mit drei Berechnungsschritten an den wahren Wert $\sqrt{9} = 3$ gezeigt. Mit $a = 9$ wird der Startwert $x_0 = \frac{9+1}{2} = 5$ für die Iteration berechnet und in die Iterationsvorschrift eingesetzt:

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(5 + \frac{9}{5} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{34}{5} = \frac{34}{10} = 3,4$$

Aufgabe 1: Setze die Iteration fort. Berechne x_2 und x_3 .

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{34}{10} + \frac{9}{\frac{34}{10}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{34}{10} + \frac{90}{34} \right) = \frac{257}{85} = 3,0235294 \dots$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{257}{85} + \frac{9}{\frac{257}{85}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{257}{85} + \frac{765}{257} \right) = \frac{65537}{21845} = 3,000091554 \dots$$

Verallgemeinerung:

Um eine schrittweise Annäherung an $\sqrt{a}$ zu erzielen, baut man eine Zahlenfolge $(x_1; x_2; x_3; \dots; x_n; x_{n+1}; \dots)$ rekursiv auf:

Rekursionsanfang: $x_1 = p$

mit p als positive Zahl reelle Zahl und möglichst ein guter Schätzwert für $\sqrt{a}$.

Rekursionsschritt: $x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$

Aufgabe 2: Berechne x_4 in GeoGebra.

1	$1/2*(65537/21845+9/(65537/21845))$
☒	$\frac{1}{2} \left(\frac{65537}{21845} + \frac{9}{\frac{65537}{21845}} \right)$
2	$1/2*(65537/21845+9/(65537/21845))$
☐	$\rightarrow \frac{4294967297}{1431655765}$
3	\$2
☐	≈ 3.000000001397