

Experimento aleatorio. Espacio muestral y sucesos. Operaciones con sucesos. Álgebra de Boole

CURSO

1ºBach
CCSS

TEMA

PROBABILIDAD

WWW.DANIPARTAL.NET

Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

¿QUÉ ES UN EXPERIMENTO ALEATORIO?

Un experimento aleatorio es aquel que, manteniendo las mismas condiciones en la experiencia, **no se puede predecir el resultado**. **Ejemplos:** lanzar un dado o sacar una bola de una bolsa opaca llena de bolas de colores diferentes.

ESPACIO MUESTRAL, SUCESO ELEMENTAL Y SUCESO COMPUESTO

Al realizar un experimento aleatorio existen varios posibles resultados (**sucesos posibles**). Y en cada experimento siempre se obtendrá uno de esos posibles resultados. Cada suceso posible se llama **suceso elemental**.

Ejemplo: al tirar un dado de seis caras, saldrá un número entero entre 1 y 6. Por lo tanto, hay seis sucesos elementales.

El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se llama **espacio muestral (E)**. El conjunto de todos los sucesos elementales forma el espacio muestral.

Ejemplo: en el lanzamiento de un dado de seis caras el espacio muestral es el conjunto de todos los sucesos elementales: $E = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Varios sucesos elementales unidos forman un subconjunto del espacio muestral, formando lo que se conoce un **suceso S**. Es decir, un suceso S es un subconjunto del conjunto de posibles resultados. Por lo tanto, **cualquier suceso S estará incluido dentro del espacio muestral**: $S \subset E$.

No confundir suceso elemental con suceso S. Para evitar confusión, se puede hablar de "suceso compuesto" al hablar de un suceso S que está formado por más de un suceso elemental.

Ejemplo: En el lanzamiento de un dado, el suceso $S = \{1,3,6\}$ contiene tres sucesos elementales y es un subconjunto del espacio muestral $E = \{1,2,3,4,5,6\}$. Vemos fácilmente que $S \subset E$.

MÁS EJEMPLOS

Ejemplos con monedas

Escribir el conjunto de sucesos posibles resultante de lanzar dos veces una moneda.

$$E = \{(cara, cara), (cara, cruz), (cruz, cara), (cruz, cruz)\}$$

Escribir el suceso "sacar cero caras" entre las dos tiradas.

$$S = \{(cruz, cruz)\} \rightarrow \text{Se observa fácilmente que } S \subset E.$$

Escribir el suceso "sacar una sola cara" entre las dos tiradas.

$$S = \{(cara, cruz), (cruz, cara)\} \rightarrow \text{Se observa fácilmente que } S \subset E.$$

Ejemplos con bolas

Escribir el conjunto de sucesos posibles resultante de sacar dos bolas de una bolsa que contiene una bola negra (N), otra roja (R) y otra blanca (B).

$E = \{(N, R), (N, B), (R, N), (R, B), (B, N), (B, R)\} \rightarrow$ Fíjate que el orden influye. No es lo mismo sacar primero Negro y segundo Rojo, que sacar primero Rojo y segundo Negro.

Escribir el suceso "no sacar la bola negra" entre las dos bolas que se obtienen.

$S = \{(R, B), (B, R)\} \rightarrow$ Se observa fácilmente que $S \subset E$.

SUCESO IMPOSIBLE, SEGURO, IGUALES Y COMPLEMENTARIO

Un **suceso imposible** es el que nunca puede ocurrir en el experimento aleatorio. Se representa por el conjunto vacío: \emptyset .

El **suceso seguro** es aquel que coincide con el espacio muestral E , por lo que es seguro que siempre se cumple. Los subconjuntos \emptyset y E se consideran subconjuntos impropios del espacio muestral.

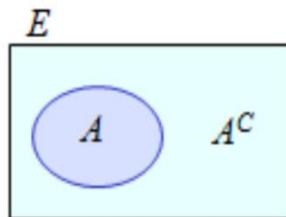
Ejemplo: obtener un 7 con una tirada de un dado clásico de 6 caras es imposible, por lo que se considera suceso imposible. Obtener un número entre 1 y 6 al lanzar un dado es un suceso seguro.

Dos **sucesos son iguales** si contienen los mismos sucesos elementales.

Ejemplo: el suceso "obtener un 5 o un 6" en una tirada del dado es $A = \{5,6\}$. Y el suceso "obtener más de un 4" en una tirada es $B = \{5,6\}$. Ambos sucesos contienen los mismos sucesos elementales, por lo que son iguales.

Un **suceso complementario o contrario** de A es el que se cumple cuando no se realiza A . Lo representamos por \bar{A} o bien por A^c .

Ejemplo: Dado el suceso "obtener cara" al lanzar una moneda, el suceso complementario será "obtener cruz". Es decir: $A = \{cara\}$, $\bar{A} = \{cruz\}$.

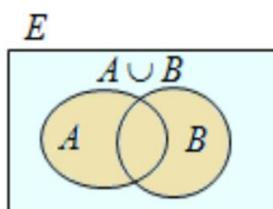


Los elementos que pertenecen al complementario de A no pertenecen al suceso A . La unión de los elementos que pertenecen al suceso A y a su complementario forman todos los elementos del espacio muestral.

UNIÓN, INTERSECCIÓN Y DIFERENCIA DE SUCESOS

Existen tres operaciones fundamentales entre sucesos, que dan como resultado un nuevo suceso (las siguientes imágenes muestran las operaciones de sucesos como conjuntos, a través de los llamados diagramas de Venn).

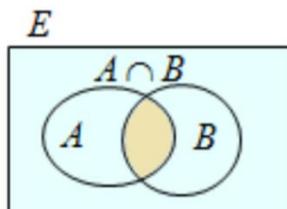
Unión de dos sucesos $\rightarrow A \cup B \rightarrow$ Se verifica si se cumple A o se cumple B (es válido si se cumpla al menos uno de los dos sucesos). La unión de un suceso A y de su complementario da lugar a todo el espacio muestral. Es decir: $A \cup \bar{A} = E$.



Experimento aleatorio. Espacio muestral y sucesos

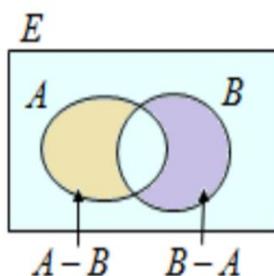
Intersección de dos sucesos $\rightarrow A \cap B \rightarrow$ Se verifica si se cumple A y si se cumple B (es válido si se cumplen los dos sucesos).

Dos sucesos incompatibles son lo que no tienen sucesos elementales en común, es decir, los que la intersección da lugar al conjunto vacío \rightarrow Si $A \cap B = \emptyset$ significa que A y B son incompatibles.



Diferencia de dos sucesos $\rightarrow A - B \rightarrow$ Se verifica si se cumple A y no se cumple B (es válido si se cumple A pero no se cumple B).

Una consecuencia de esta definición es: $\bar{A} = E - A$. El complementario contiene todos los elementos del espacio muestral salvo los elementos de A.

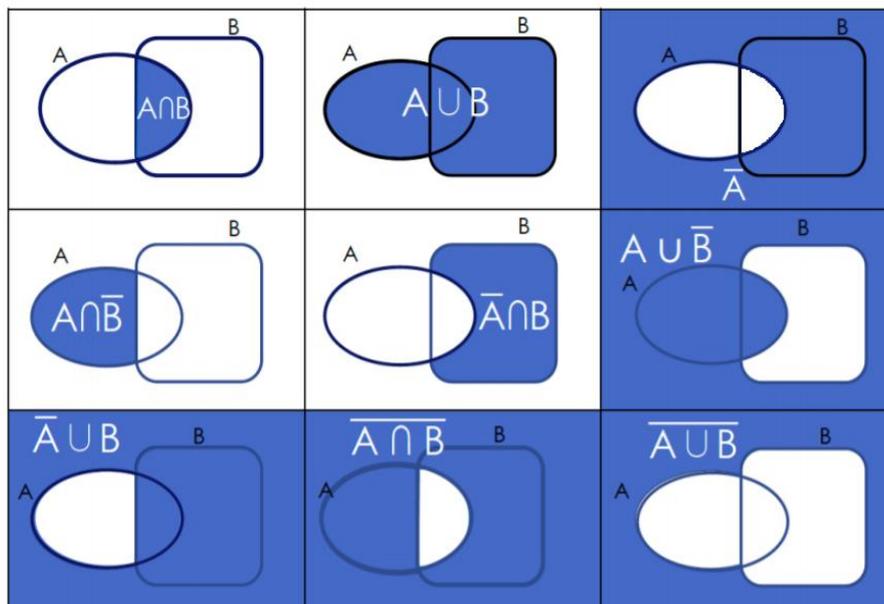


ÁLGEBRA DE BOOLE Y LEYES DE MORGAN

La unión, la intersección y la diferencia cumplen las siguientes propiedades, conocidas como Álgebra de Boole (a las que se añaden las conocidas como Leyes de Morgan).

Propiedad	Unión	Intersección
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Idempotente	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Simplificación	$A \cup (B \cap A) = A$	$A \cap (B \cup A) = A$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Elemento neutro	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap E = A$
Elemento absorbente	$A \cup E = E$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
Leyes de Morgan	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ El complementario de la unión es la intersección de complementarios.	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ El complementario de la intersección es la unión de complementarios.

Experimento aleatorio. Espacio muestral y sucesos
 Diagramas de Venn para representar algunas de las propiedades de la tabla anterior.



EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Tenemos una baraja española y sacamos una carta al azar. Definimos A como el suceso "sacar un oro" y B como el suceso "sacar un rey". Escribe los sucesos siguientes:

- $A \cup B \rightarrow$ Sacar un oro o bien sacar un rey (se cumple al menos uno de los dos sucesos de partida).
- $A \cap B \rightarrow$ Sacar el rey de oro (se cumplen los dos sucesos de partida).
- $A - B \rightarrow$ Sacar cualquier oro, salvo el rey de oro (se cumple A pero no se cumple B).
- $\bar{A} \rightarrow$ No sacar ningún oro.
- $\overline{A \cup B} \rightarrow$ Por las propiedades se cumple $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \rightarrow$ No sacar oro y no sacar un rey (no se cumple ni A ni B).
- $\bar{A} \cup \bar{B} \rightarrow$ No sacar oro o bien no sacar un rey (se cumple al menos uno de los dos sucesos complementarios).