Optimering og udledning af formler ved brug af CAS-værktøjer.

CAS-værktøjer er kraftfulde redskaber, som fint kan bruges til at udlede formler, både simple og mere komplicerede. Nedenfor er en lille formelsamling i emnet optimering. Den omfatter velkendte gymnasieopgaver, men formlerne er ikke almindeligt kendte fra matematikpensum og gængse lærebøger.
En elevopgave kunne være at bevise nogle af formlerne ved hjælp af et CAS-værktøj - under kyndig vejledning. Jeg har brugt Maple til at lave sådanne beviser, GeoGebra kan også bruges men det kan let gå hen og blive tungt. Om andre CAS-værktøjer er brugbare ved jeg ikke.
'Beviserne' nedenfor med Maple er uden forklaringer, hvilket selvfølgelig hører med i et ordentligt matematisk bevis, dog er fortegnstilfældene for de afledede meget enkle.
Heine Strømdahl, december 2023.

Optimering.

Det minimale overfladeareal af cylinder og kegle med givet rumfang, med og uden låg.

Sætning.

A: Det minimale overfladeareal af en cylinder uden låg og med et givet rumfang V.

Det minimale overfladeareal findes ved $r = h = \sqrt[3]{\frac{V}{3}}$, det har værdien

$$O_{min} = 3\sqrt[3]{\pi V^2}$$

B: Det minimale overfladeareal af en kegle med låg og med et givet rumfang V.

Det minimale overfladeareal findes ved $r = \frac{\sqrt[3]{3V}}{\sqrt[2]{2}\sqrt[3]{\pi}}$, $h = 2\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}$, det har værdien

$$O_{min} = 2 \cdot \sqrt[3]{9\pi V^2}$$

C: Det minimale overfladeareal af en kegle uden låg og med et givet rumfang V.

Det minimale overfladeareal findes ved $r = \frac{\sqrt[3]{3V}}{\sqrt[6]{2}\sqrt[3]{\pi}}$, $h = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$, det har værdien

$$O_{min} = \frac{3\sqrt[6]{3}\sqrt[3]{\pi V^2}}{\sqrt[3]{2}}$$

D: Det minimale overfladeareal af en cylinder med låg og med et givet rumfang V.

Det minimale overfladeareal findes ved $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, $h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$, det har værdien

$$O_{min} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$$

E:

Overfladearealet af et prisme uden låg, med en regulær polygon som grundflade og med et givet rumfang V. Det minimale overfladeareal er $O_{min} = 3\tan(\frac{\pi}{n})\sqrt[3]{nV^2}$ og det findes ved $r = 2\sqrt[3]{\frac{V\tan^2(\frac{\pi}{n})}{n}}$

A:

Optimering af cylinders overfladeareal - uden låg. De enkelte skridt er gennemført nedenfor med GeoGebras CAS.

1	V=π*h*r^2 → $V = h\, r^2\, \pi$
2	O=2*π*r*h + π*r^2 → $O = r^2\, \pi + 2\, h\, r\, \pi$
3	Beregn(V = h r² π, h) → $\left\{ h = \frac{V}{r^2\, \pi} \right\}$
4	O=r² *π + 2*(V / (r²*π))*r*π → $O = \frac{r^3\, \pi + 2\, V}{r}$

Enter expression or select input, then activate tool

5	(r³ π + 2V) / r Afledede: $\frac{2\,r^3\,\pi - 2\,V}{r^2}$
6	Beregn((2r³ π - 2V) / r²=0, r) $\rightarrow \left\{ r = \frac{\sqrt[3]{V\,\pi^2}}{\pi} \right\}$
7	h=V / ((cbrt(V π²) / π)^2* π) $\rightarrow\ h = V\,\frac{\pi}{\sqrt[3]{V\,\pi^2}^{\,2}}$
8	O = ((cbrt(V π²) / π)³ π + 2V) / (cbrt(V π²) / π) $\rightarrow\ O = \frac{\pi\left(\frac{\sqrt[3]{V\pi^2}}{\pi}\right)^3 + 2\,V}{\frac{\sqrt[3]{V\pi^2}}{\pi}}$
9	Enkel((π (cbrt(V π²) / π)³ + 2V) / (cbrt(V π²) / π)) $\rightarrow\ 3\cdot\frac{\sqrt[3]{V\,\pi^2}^{\,2}}{\pi}$

$with(Gym)$

[*ChiKvadratGOFtest, ChiKvadratUtest, Cos, ExpReg, Fcdf, Fpdf, Gini, KPplot, KvadReg, LPplot, LinReg, LogistReg, MultiLinReg, NormReg, PolyReg, PowReg, PropReg, QQplot, Sin, SinReg, TVM, Tan, afdragAmort, afrund, amort, antalobs, antalstabel, arcCos, arcSin, arcTan, arealP, arealT, art, balanceAmort, bidrag, bincdf, binomialTest, binpdf, boksplot, cart2pol, chi2GOFtest, chi2Kritiskværdi, chi2Sim, chi2Teststørrelse, chi2Utest, chicdf, chipdf, det, dotP, enhedsvektor, ev, fintervalsolve, forventet, fraktil, frekvens, frekvensTabel, gennemsnit, gradient, grupperData, hat, hyppighed, hældningsfelt, intervalPlot, intervalsolve, invCos, invF, invSin, invTan, invbin, invchi, invnorm, invt, irr, konfidensInterval, kumuleretFrekvens, kvartiler, len, linjeelementer, median, middel, niveaukurver, normalcdf, normalpdf, npv, nulpunkter, omskrivKP, pindediagramBIN, plotHistogram, plotLorenzdiagram, plotPindediagram, plotResidualer, plotSumkurve, plotTrappekurve, pol2cart, polygonOmråde, populationsspredning, populationsvarians, proj, punktPlot, reelSolve, renteAmort, residualQQplot, residualer, residualspredning, skraver, spredning, standardafvigelse, stikprøvespredning, stikprøvevarians, sumkurve, tInterval, tTest, tabelsum, tangent, tangentplan, tcdf, testLin, tpdf, trappekurve, trappekurveBIN, trekantsolve, trigSolve, typeinterval, typetal, varians, vektorPlot, vinkel, visMatrix, vsolve, zInterval, zInterval1Andel, zTest*] **(1)**

$with(Plot)$

[*AnalyzeData, AnimatePoints, ColorParse, ColorRange, ColorScheme, ContourPlot, CoordinateSystems, DataPlot, DefaultColorScheme, DualAxisPlot, Export, Extrude, FormatText, GetAdaptiveOptions, GetLocalOptions, Import, Inequality, IsCoordinateSystem, IsOption, LogPlot2D, MakeColorBox, MergeAXIS, ModuleApply, Plot2D, Plot3D, PlotArray, PointPlot, PolarPlot, PolygonPlot, Preprocess, ProcessLocalOptions, ProcessUnits, Redraw, ResetView, SetColors, SetColours, ShadeBetween, SpaceCurve, StackedPlot, Structure, TernaryPlot, TextPlot, TranslateOptions, Utilities, VerifyAdaptiveOptions*] **(2)**

Optimering. Keglers overfladeareal.

Problem.

Find minimumsværdien for overfladearealet af en kegle med låg, keglen har et givet rumfang V.
Resultatet skal udtrykkes ved keglens højde h og grundfladeradius r.

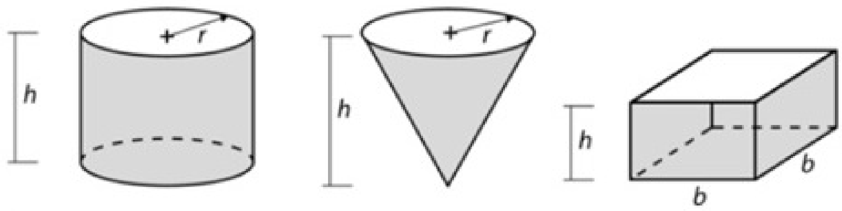
Sætning // resultat.

Minimumsværdien for overfladearealet for en kegle med låg er $O_{min} = 2\,\pi^{1/3}\,3^{2/3}\,V^{2/3}$

Det findes ved $r = \dfrac{3^{1/3}\sqrt{2}\,V^{1/3}}{2\,\pi^{1/3}}$, $h = \dfrac{2\,V^{1/3}\,3^{1/3}}{\pi^{1/3}}$

Problemet og den resulterende sætning udsprang af denne Systime opgave:

Opgave 9.74



Figur 9.76

Der skal fremstilles tre beholdere som vist på figuren:

- en cylinder
- en kegle
- en kasse med en kvadratisk grundflade.

Der skal ikke være låg på, vist på figuren som hvid.

Alle beholdere skal have et rumfang på 10 liter.

1. Bestem for cylinderen og keglen den værdi af *r* og *h* og for kassen den værdi af *b* og *h*, der giver det mindste overfladeareal.
2. Hvilken type beholder har det mindste overfladeareal?

Kilde. Systime Mat B HTX Opg. 9.74.

$with(RealDomain)$

$[\Im, \Re, \text{`\^{}`}, \arccos, \text{arccosh}, \text{arccot}, \text{arccoth}, \text{arccsc}, \text{arccsch}, \text{arcsec}, \text{arcsech}, \arcsin, \text{arcsinh}, \arctan, \text{arctanh}, \cos, \cosh, \cot, \coth, \csc, \text{csch}, \mathit{eval}, \exp, \mathit{expand}, \mathit{limit}, \ln, \log, \sec, \text{sech}, \text{signum}, \mathit{simplify}, \sin, \sinh, \mathit{solve}, \text{sqrt}, \text{surd}, \tan, \tanh]$ **(3)**

Dokumentation ved differentialregning.

Kegle med låg.

Rumfangsformel og overfladearealformel for en kegle med låg.

$$\mathrm{O} = \pi \cdot r \cdot^{2}\sqrt{r^2 + h^2} + \pi \cdot r^2 \,, \quad V = \frac{1}{3}\,\pi \cdot h \cdot r^2$$

$$V = \frac{1}{3}\,\pi \cdot h \cdot r^2 \Leftrightarrow h = \frac{3\,V}{\pi \cdot r^2}$$

$$h := \frac{3\,V}{\pi \cdot r^2}$$

$$h := \frac{3\,V}{\pi\,r^2} \quad \mathbf{(4)}$$

restart

$o_{kegle} := \pi \cdot r \cdot \sqrt[2]{r^2 + h^2} + \pi \cdot r^2$

$$o_{kegle} := \pi\,r\,\sqrt{h^2 + r^2} + \pi\,r^2 \quad \mathbf{(5)}$$

$f(r) := \pi\,r\,\sqrt{\frac{9\,V^2}{\pi^2\,r^4} + r^2} + \pi \cdot r^2$

$$f := r \mapsto r \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{9 \cdot V^2}{\pi^2 \cdot r^4} + r^2} + \pi \cdot r^2 \quad \mathbf{(6)}$$

$f'(r)$

$$\pi\,\sqrt{\frac{9\,V^2}{\pi^2\,r^4} + r^2} + \frac{r\,\pi\left(-\frac{36\,V^2}{\pi^2\,r^5} + 2\,r\right)}{2\,\sqrt{\frac{9\,V^2}{\pi^2\,r^4} + r^2}} + 2\,\pi\,r \quad \mathbf{(7)}$$

$\xrightarrow{\text{assuming real}}$

$$\frac{2\,\pi^2\,r^6 + 2\,\pi\,r^3\,\sqrt{\pi^2\,r^6 + 9\,V^2} - 9\,V^2}{r^2\,\sqrt{\pi^2\,r^6 + 9\,V^2}} \quad \mathbf{(8)}$$

with(*RealDomain*)

[$\Im$, $\Re$, \`^\`, arccos, arccosh, arccot, arccoth, arccsc, arccsch, arcsec, arcsech, arcsin, arcsinh, arctan, arctanh, cos, cosh, cot, coth, csc, csch, *eval*, exp, *expand*, *limit*, ln, log, sec, sech, signum, *simplify*, sin, sinh, *solve*, sqrt, surd, tan, tanh] **(9)**

solve($f'(r) = 0, r$)

$$\frac{3^{1/3}\,\sqrt{2}\,\left(V^2\right)^{1/6}}{2\,\pi^{1/3}},\ -\frac{3^{1/3}\,\sqrt{2}\,\left(V^2\right)^{1/6}}{2\,\pi^{1/3}} \quad \mathbf{(10)}$$

$\xrightarrow{\text{assuming positive}}$

$$\frac{3^{1/3}\,\sqrt{2}\,V^{1/3}}{2\,\pi^{1/3}},\ -\frac{3^{1/3}\,\sqrt{2}\,V^{1/3}}{2\,\pi^{1/3}} \quad \mathbf{(11)}$$

$h = \frac{3\,V}{\pi \cdot r^2}$