Teoría – Tema 4

Teoría - 9 - demostración por inducción de la forma de derivadas enésimas

Inducción matemática

La inducción es un método de demostración matemática, al igual que lo es la reducción al absurdo (que ya hemos aplicado en este curso).

Como su propio nombre indica, la inducción busca “inducir” (obtener) una regla general a partir de elementos individuales de una serie. Es decir, la inducción va de lo particular a lo general.

¿Cómo se aplica? Siguiendo tres pasos.

1. Obtener el primer término de la serie: $n=1$

2. Presentar una hipótesis como regla general (esta es la parte más difícil): término n-ésimo. Normalmente, para plantear esta hipótesis, debemos observar como son los primeros términos de la serie.

3. Demostrar la forma del término $n+1$ a partir del primer término $n=1$ y de la hipótesis del término n-ésimo.

¿A que no te has enterado de nada? Vamos a verlo mejor con un ejemplo.

Aplicación a la derivada n-ésima

Entendamos la inducción con un ejemplo concreto.

Obtener la derivada n-ésima de $f(x)=x\cdot e^x$.

Calculamos la primera derivada → $f'(x)=e^x+x\cdot e^x=(1+x)\cdot e^x$

Calculamos la segunda derivada → $f''(x)=e^x+e^x+x\cdot e^x=2e^x+x\cdot e^x=(2+x)\cdot e^x$

Calculamos la tercera derivada → $f'''(x)=2e^x+e^x+x\cdot e^x=3e^x+x\cdot e^x=(3+x)\cdot e^x$

Con estos tres primeros términos de la serie, ya podemos plantear una hipótesis para el término n-ésimo.

Hipótesis: $f^n=n e^x+x\cdot e^x$

La hipótesis se cumple para $n=1$ → $f'=1\cdot e^x+x\cdot e^x=(1+x)\cdot e^x$

Suponemos cierta la hipótesis para el término n-ésimo → $f^n=n e^x+x\cdot e^x$

Según esta hipótesis el término $n+1$ nos preguntamos si se cumple: ¿ $f^{n+1}=(n+1)e^x+x\cdot e^x$?

Vamos a demostrarlo derivando el término n-ésimo.

$$f^{n+1}=\frac{d[f^n]}{dx}=\frac{d[n e^x+x\cdot e^x]}{dx}=n e^x+e^x+x\cdot e^x=(n+1)e^x+x\cdot e^x$$

Tal y como queríamos demostrar.