Herleitung der Mittelungleichung

Mittelungleichung:

Für a, b $\in \mathbb{R}_0^+$ gilt $\sqrt{a \cdot b} \ \leq \ \frac{a+b}{2}$,

wobei die Gleichheit genau dann erfüllt ist, wenn $a = b$.

Herleitung:

Seien $x, y \ \in \mathbb{R}_0^+$, also zwei nicht negative reelle Zahlen.

Es gilt $0 \ \leq \ (x-y)^2$, wobei die Gleichheit genau dann erfüllt ist, wenn $x = y$.

Durch Auflösen mit der binomischen Formel erhalten wir:

$$0 \leq (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Durch einfache Umformungsschritte bringen wir diese Ungleichung in eine andere Form.

$$0 \ \leq x^2 - 2xy + y^2 \ \mid +2xy$$

$$2xy \leq x^2 + y^2 \ \mid : 2$$

$$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$$

Setzen wir nun $\sqrt{a} \coloneqq x$ und $\sqrt{b} \coloneqq y$ mit $a, b \ \in \mathbb{R}_0^+$ so erhalten wir die Ungleichung:

$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, wobei die Gleichheit genau dann erfüllt ist, wenn $\sqrt{a} = \sqrt{b}$.

Diese Gleichheit ist wiederum genau dann erfüllt, wenn $a = b$ gilt.

Also haben wir gezeigt:

Für $a, b \ \in \mathbb{R}_0^+$ gilt $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, mit Gleicheit genau dann, wenn $a = b$. □

Bemerkung:

Diese Mittelungleichung besagt, dass das geometrische Mittel zweier nicht negativer Zahlen stets kleiner gleich dem arithmetischen Mittel dieser beiden Zahlen ist. Außerdem besagt sie, dass die Mittel genau dann gleich sind, falls auch die beiden Zahlen gleich sind.

Die Mittelungleichung gilt nicht nur für zwei Variablen, sondern kann auch für n Variablen aufgestellt und verallgemeinert werden, sodass gilt:

Für $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_0^+$ gilt: $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$,

wobei die Gleichheit genau dann erfüllt ist, wenn $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Anmerkung: Der Beweis für die allgemeine Mittelungleichung kann durch eine Vorwärts-Rückwärts-Induktion erfolgen. Der Beweis in der Schule würde jedoch den Rahmen der Schulmathematik sprengen.

Durch die Mittelungleichung lassen sich nun zwei Sätze beweisen, mit denen einige Extremwertaufgaben ohne Einsatz von Differentialrechnung gelöst werden können.