Κεφάλαιο 6

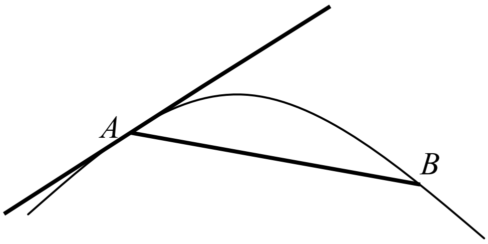
Παράγωγος

Στο κεφάλαιο αυτό στόχος μας είναι να συνδέσουμε μία συγκεκριμένη συνάρτηση $f(x)$ με μία δεύτερη συνάρτηση $f'(x)$, την οποία και θα ονομάζουμε **παράγωγο της f**. Η τιμή της $f'(x)$, σε ένα συγκεκριμένο σημείο πάνω στη συνάρτηση $f(x)$ έχει την ιδιοτητά ότι είναι η κλίση της εφαπτομένης στο συγκεκριμένο αυτό σημείο.

6.1 Η Έννοια της Παραγώγου

Στην παράγραφο αυτή θα εισάγουμε την έννοια της παραγώγου δίνοντας την γεωμετρική της ερμηνεία.

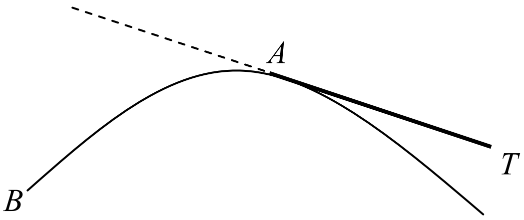
Εάν A και B είναι δύο σημεία πάνω σε μία καμπύλη τότε



η γραμμή που ενώνει τα σημεία A και B ονομάζεται *χορδή*

η γραμμή που τέμνει την καμπύλη μόνο στο σημείο A ονομάζεται *εφαπτομένη* στο A.

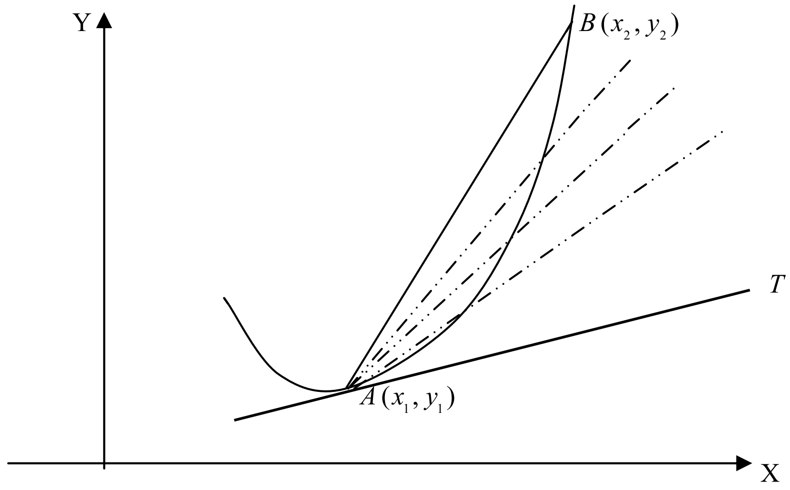
Είναι γεγονός ότι μία καμπύλη δεν έχει σε όλα τα σημεία της την ίδια κλίση. Η έννοια λοιπόν της παραγώγου μίας συνάρτησης προήλθε από την ανάγκη να προσδιοριστεί η εφαπτομένη μίας καμπύλης σε ένα συγκεκριμένο σημείο.



Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι κινούμαστε πάνω στην καμπύλη αυτή , από το σημείο B στο σημείο A ($B \to A$), και στο σημείο A η κλίση αλλάζει και παραμένει σταθερή. Εάν αυτό συμβεί, τότε θα κινούμαστε πάνω στη ευθεία γραμμή AT , δηλαδή πάνω στη *εφαπτομένη* στο σημείο A.

Άρα η κλίση της καμπύλης στο σημείο A είναι η ίδια με την κλίση της *εφαπτομένη* στο σημείο A.

Ας πάρουμε λοιπόν δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ πάνω στη καμπύλη $y = f(x)$ και ας υποθέσουμε ότι κινούμαστε πάνω στην καμπύλη αυτή , από το σημείο B στο σημείο A, και ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την παράγωγο στο σημείο Α. Την κίνηση αυτή μπορούμε να δούμε στο παρακάτω σχήμα.

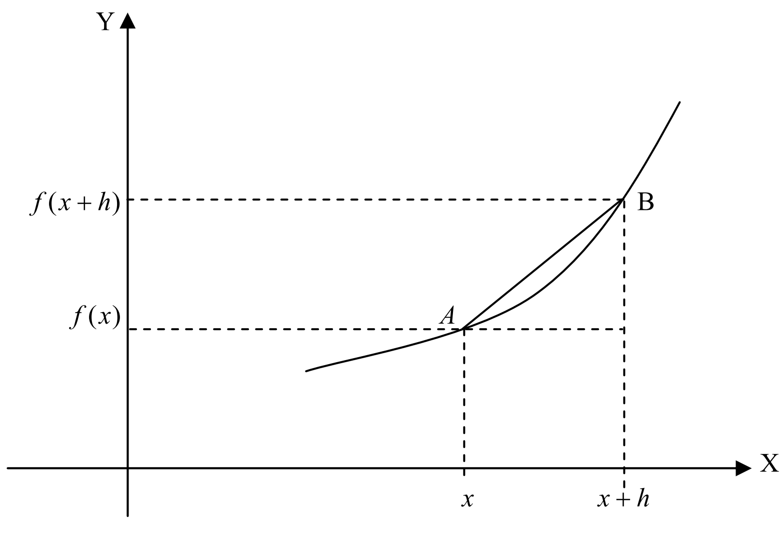


Αυτό σημαίνει ότι το μεν σημείο A παραμένει σταθερό, ενώ το σημείο B κινείται και πλησιάζει προς το σημείο A . Όσο πιο κοντά είναι το Β στο Α, τόσο καλύτερη είναι η προσέγγιση που θα πάρουμε. Δηλαδή, $B \to A$ **ή**

η κλίση της ευθείας (χορδής) $AB \to$ κλίση της εφαπτομένης AT **ή**

$$\lim_{B \to A} (\text{ κλίση χορδής } AB) = \text{ κλίση της εφαπτομένης } AT.$$

Ας κοιτάξουμε τώρα μεταξύ δύο πολύ κοντινών σημείων πάνω στην καμπύλη ,



όπου h είναι ένας αριθμός πολύ κοντά στο μηδέν.

Η κλίση της ευθείας (χορδής) AB δίνεται από τον τύπο

$$\frac{\text{Μεταβολη του } y}{\text{Μεταβολη του } x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} \quad \text{ή} \quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

όπου $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ είναι ο λόγος μεταβολής της συνάρτησης $f(x)$ και τείνει σε ένα συγκεκριμένο όριο. Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης στο σημείο x ονομάζεται παράγωγος της συνάρτησης και ορίζεται ως

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

6.1.1 Ορισμός

Η παράγωγος μίας συνάρτησης $y = f(x)$ είναι η συνάρτηση $f'(x)$ που η τιμή της σε κάθε x ορίζεται από τον κανόνα

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

όταν υπάρχει αυτό το όριο. Το πεδίο ορισμού της f' είναι το σύνολο των σημείων του πεδίου ορισμού της f όπου υπάρχει το εν λόγω όριο.

Οι συνηθέστεροι συμβολισμοί για την παράγωγο της συνάρτησης $y = f(x)$ είναι

$$y', \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}, f'(x), f'.$$

Το $\dfrac{d}{dx}$ δηλώνει την παράγωγο ως προς το σημείο *x*.

6.1.2 Παραδείγματα

1) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 1$.

Λύση

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{[(x+h)^2+1]-(x^2+1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2+1-x^2-1}{h} = =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} = (2x+h) = 2x.$$

2) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x^3-3x+3$.

Λύση

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{[(x+h)^3-3(x+h)+3]-(x^3-3x+3)}{h}=$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-3x-3h+3-x^3+3x-3}{h}=$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2-3)}{h}=$$
$$\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2-3)=3x^2-3.$$

3) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x}$.

Λύση

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Παραγώγιση σε Ακραίο Σημείο Διαστήματος

Έστω μία συνάρτηση $f(x)$ που ορίζεται στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και που δεν ορίζεται έξω από αυτό. Τότε η παράγωγος της συνάρτησης $f'(x)$ δεν ορίζεται στα δύο άκρα της α και β αφού η

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

είναι η γνωστή δίπλευρη παράγωγος και στα δύο άκρα μόνο μονόπλευρα όρια έχουν νόημα. Για να αντεπεξέλθουμε στις εδικές αυτές περιπτώσεις ορίζουμε παραγώγους από αριστερά (<u>*αριστερή πλευρική παράγωγος*</u>) και δεξιά (<u>*δεξιά πλευρική παράγωγος*</u>). Δηλαδή :

$$f'_-(x)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{και} \quad f'_+(x)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

αντίστοιχα.

6.1.3 Ορισμός

Μία συνάρτηση f *θα λέγεται παραγωγίσιμη στο διάστημα* $[\alpha,\beta]$ *εάν ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες :*

1. *Η* f *είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα* (α,β).
2. *Η* f *είναι παραγωγίσιμη από τα αριστερά στο α.*
3. *Η* f *είναι παραγωγίσιμη από τα δεξιά στο β.*

Ασκήσεις 6.1

Με βάση τον ορισμό της παραγώγου να βρεθεί η παράγωγος $f'(x)$, των παρακάτω συναρτήσεων.

1) $f(x)=4x^2-9x$

2) $f(x)=x^4-9x^3+6$

3) $f(x)=(x-3)(2x+5)$

4) $f(x)=(x-4)^2$

5) $f(x)=\dfrac{(x^3+2)}{x}$

6) $f(x)=x^{-2}(1+x)$

7) $f(x)=\sqrt{x}(x-1)$

8) $f(x)=1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$

9) $f(x)=\alpha x^2+\beta$ $\quad$ *α,β* = σταθερές

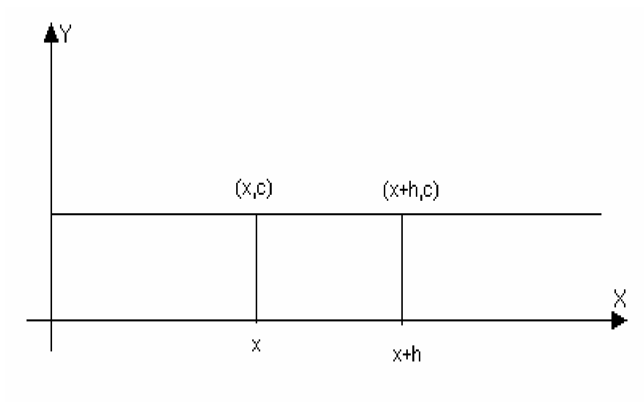
10) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

6.2 Τεχνικές Παραγώγισης

Ευτυχώς κάθε φορά που θέλουμε να παραγωγίσουμε μία συνάρτηση δεν χρειάζεται να επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία (με βάση τον ορισμό) αφού ειδικές κατηγορίες συναρτήσεων μπορούν να παραγωγιθούν χρησιμοποιώντας ορισμένους κανόνες. Τους κανόνες αυτούς θα εξετάσουμε στην συνέχεια.

Παραγώγιση σταθεράς $f(x)=c$

Έστω η συνάρτηση $f(x)=c$, όπου c είναι μία σταθερά, έχουμε δηλαδή την εξίσωση μίας ευθείας γραμμής παράλληλη στον άξονα των x. Δηλαδή



Άρα,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

Επομένως η κλίση της $f(x)$ είναι 0. Δηλαδή,

$$\frac{df}{dx}=0$$

Παράγωγος του ax όπου a = σταθερά

Έστω η συνάρτηση $f(x)=ax$, έχουμε δηλαδή την εξίσωση μίας ευθείας γραμμής με κλίση a.

Άρα,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(ax+h)-ax}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

Επομένως η κλίση της είναι 1. Δηλαδή,

$$\frac{df}{dx}=a$$

Παράγωγος του x^n όπου n = ακέραιος

y	x^2	x^3	x^4	$x^{-2}\left(=\frac{1}{x^2}\right)$
$\frac{dy}{dx}$	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	$-2x^{-3}$

Από τον παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε τον ακόλουθο κανόνα,

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Πράγματι,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right]$$

Όταν το $h\to 0$ όλοι οι παράγοντες εκτός του πρώτου πάνε στο μηδέν. Επομένως, $f'(x) = nx^{n-1}$

Παράγωγος του $\sqrt{x}$

Εάν $f(x) = \sqrt{x}$, τότε

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Πράγματι,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Σταθερά Πολλαπλάσια

Έστω a μία σταθερά . Εάν η $f(x)$ είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση του x τότε ισχύει

$$\frac{d}{dx}\left(af(x)\right) = a\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} f'(ax) &= \lim_{h\to 0}\frac{af(x+h)-af(x)}{h} = \lim_{h\to 0} a\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] \\ &= a\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] \\ &= af'(x) \end{aligned}$$

Παραγώγιση αθροίσματος και διαφοράς

6.2.1 Θεώρημα

Εάν f και g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις του x, τότε το άθροισμα τους $f+g$ είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση του x για την οποία ισχύει ο κανόνας

$$\frac{d}{dx}\left(f+g\right) = \frac{df}{dx}+\frac{dg}{dx}$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(f+g\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x+h)+g(x+h)\right]-\left[f(x)+g(x)\right]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x+h)-f(x)\right]+\left[g(x+h)-g(x)\right]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \end{aligned}$$

$$= \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$ □

Το θεώρημα 6.2.1 ισχύει και για διαφορά δύο συναρτήσεων. Δηλαδή,

$$\frac{d}{dx}\left(f - g\right) = \frac{df}{dx} - \frac{dg}{dx}$$

6.2.2 Παραδείγματα

Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων

1) $y = 2$, 2) $y = x^5$ 3) $y = 4x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 5x + 2$, 4) $y = x^{-2} - \sqrt{x}$

Λύση

1) $\frac{dy}{dx} = 0$, 2) $\frac{dy}{dx} = 5x^4$, 3) $\frac{dy}{dx} = 16x^3 - 6x^2 + 16x - 5$,

4) $\frac{dy}{dx} = -2x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

Παραγώγιση γινομένου

6.2.3 Θεώρημα
Εάν δύο συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες ως προς x τότε το γινόμενο τους $f \times g$ είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση του x για την οποία ισχύει ο κανόνας

$$\frac{d}{dx}\left(fg\right) = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}$$

Απόδειξη

$$\frac{d}{dx}\left(fg\right) = \lim_{h \to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας $f(x+h)g(x)$ στον αριθμητή παίρνουμε

$$\frac{d}{dx}\left(fg\right) = \lim_{h \to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}\left[f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \left[\lim_{h\to 0} f(x+h)\right] \frac{dg}{dx} + \left[\lim_{h\to 0} g(x)\right] \frac{df}{dx}$$

Το όριο $\lim_{h\to 0} g(x) = g(x)$ *αφού δεν εξαρτάτε από το h. Η f(x) είναι παραγωγίσιμη στο x και επομένως και συνεχής στο x. Άρα* $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$. *Επομένως,*

$$\frac{d}{dx}(fg) = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx} \qquad \square$$

6.2.4 Παραδείγματα

Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων

1) $y = \left(4x^2 - 1\right)\left(7x^3 + x\right)$, 2) $y = \left(2 - x - 3x^3\right)\left(2x - \frac{1}{4}\right)$, 3) $y = \left(x^2 + 1\right)\left(x^3 - 3\right)$

Λύση

1) $$\frac{dy}{dx} = \left(7x^3 + x\right)\frac{d}{dx}\left(4x^2 - 1\right) + \left(4x^2 - 1\right)\frac{d}{dx}\left(7x^3 + x\right)$$

$$= \left(7x^3 + x\right)\left(8x\right) + \left(4x^2 - 1\right)(21x^2 + 1) = 140x^4 - 9x^2 - 1$$

2) $$\frac{dy}{dx} = \left(2x - \frac{1}{4}\right)\frac{d}{dx}\left(2 - x - 3x^3\right) + \left(2 - x - 3x^3\right)\frac{d}{dx}\left(2x - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \left(2x - \frac{1}{4}\right)\left(-1 - 9x^2\right) + \left(2 - x - 3x^3\right)2$$

$$= -24x^3 + \frac{9}{4}x^2 - 4x + \frac{17}{4}$$

3) $$\frac{dy}{dx} = \left(x^3 - 3\right)\frac{d}{dx}\left(x^2 + 1\right) + \left(x^2 + 1\right)\frac{d}{dx}\left(x^3 - 3\right)$$

$$=\left(x^3-3\right)\left(2x\right)+\left(x^2+1\right)\left(3x^2\right)=5x^4+3x^2-6x$$

Παραγώγιση πηλίκου

6.2.5 Θεώρημα

Εάν δύο συναρτήσεις f και g, όπου $g \neq 0$ είναι παραγωγίσιμες ως προς x τότε το πηλίκο $y = f/g$ είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση του x για την οποία ισχύει ο κανόνας

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\frac{df}{dx}-f\frac{dg}{dx}}{g^2}$$

Απόδειξη

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).g(x)-f(x).g(x+h)}{h.g(x+h).g(x)}$$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας $f(x).g(x)$ *στον αριθμητή παίρνουμε*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x)}{hg(x+h)g(x)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]-\left[f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]}{g(x+h)g(x)}$$

$$=\frac{\lim_{h\to 0}g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{\lim_{h\to 0}g(x+h)\lim_{h\to 0}g(x)}$$

$$=\frac{\lim_{h\to 0}g(x)\frac{df}{dx}-\lim_{h\to 0}f(x)\frac{dg}{dx}}{\lim_{h\to 0}g(x+h)\lim_{h\to 0}g(x)}$$

Το όριο $\lim_{h\to 0}g(x)=g(x)$ *και το* $\lim_{h\to 0}f(x)=f(x)$ *αφού δεν εξαρτώνται από το h.*

Η g(x) είναι παραγωγίσιμη στο x και επομένως και συνεχής στο x. Άρα $\lim_{h \to 0} g(x+h) = g(x)$. *Επομένως,*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}}{g^2}$$ □

6.2.6 Παραδείγματα

Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων

1) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, 2) $y = \dfrac{x^2-1}{x^4+1}$, 3) $y = \dfrac{4x+1}{x^2-5}$

Λύση

1) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(x^2-1\right)\frac{d}{dx}\left(x^2+1\right) - \left(x^2+1\right)\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$= \frac{\left(x^2-1\right)(2x) - \left(x^2+1\right)(2x)}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(x^4+1\right)\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right) - \left(x^2-1\right)\frac{d}{dx}\left(x^4+1\right)}{\left(x^4+1\right)^2}$$

$$= \frac{\left(x^4+1\right)(2x) - \left(x^2+1\right)\left(4x^3\right)}{\left(x^4+1\right)^2} = \frac{-2x^5 - 4x^3 + 2x}{\left(x^4+1\right)^2}$$

3) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(x^2-5\right)\frac{d}{dx}(4x+1) - (4x+1)\frac{d}{dx}\left(x^2-5\right)}{\left(x^2-5\right)^2}$$

$$= \frac{\left(x^2-5\right)(4) - (4x+1)(2x)}{\left(x^2-5\right)^2} = \frac{-4x^2 - 2x - 20}{\left(x^2-5\right)^2}$$

6.2.7 Θεώρημα

Εάν η συνάρτηση $f(x)$ *είναι παραγωγίσιμη στο x και* $f(x) \neq 0$ *τότε η συνάρτηση* $\frac{1}{f(x)}$ *είναι παραγωγίσιμη στο x και*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)}{\left(f(x)\right)^2}$$

Ο αναγνώστης μπορεί πολύ εύκολα να απόδείξη το θεώρημα 6.2.7 χρησιμοποιώντας το θεώρημα 6.2.5 (παραγώγιση πηλίκου).

6.2.8 Παραδείγματα

Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων

1) $y = \frac{1}{x}$, 2) $y = \frac{1}{x^3 + 2x - 3}$

Λύση

1) $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{d}{dx}\left(x\right)}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$

2) $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{d}{dx}\left(x^3 + 2x - 3\right)}{x^3 + 2x - 3} = -\frac{3x^2 + 2}{\left(x^3 + 2x - 3\right)^2}$

Διαδοχική παραγώγιση

Εάν η παράγωγος της συνάρτησης $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x, και την παραγωγίσουμε για άλλη μία φορά, τότε η νέα συνάρτηση θα μας δώσει την **δεύτερη** παράγωγο της $y = f(x)$.

Οι συνηθέστεροι συμβολισμοί για την δεύτερη παράγωγο της $y = f(x)$ είναι

$$y'', \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, f''(x), f''.$$

Γενικότερα το αποτέλεσμα της διαδοχικής παραγώγισης μίας συνάρτησης $y = f(x)$ n -φορές δηλώνεται ως :

$$y^{(n)}, \frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^n f(x)}{dx^n}, f^{(n)}(x), f^{(n)}.$$

6.2.9 Παράδειγμα

Εάν $y = 5x^3 - 6x^2 + 2x - 18$ τότε,

$$y' = \frac{dy}{dx} = 15x^2 - 12x + 2 \qquad y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = 30x - 12$$

$$y^{(3)} = \frac{d^3 y}{dx^3} = 30 \qquad y^{(4)} = \frac{d^4 y}{dx^4} = 0$$

$$y^{(5)} = 0, y^{(6)} = 0, \cdots\cdots, y^{(n)} = 0 \quad (n \geq 4).$$

Ασκήσεις 6.2

Να βρεθεί η $f'(x)$ και η $f''(x)$ των παρακάτω συναρτήσεων

1) $f(x)=x^5$

2) $f(x)=x^{-3}$

3) $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$

4) $f(x)=x^{-1}$

5) $f(x)=\sqrt[3]{(x^2)}$

6) $f(x)=x^2-x+3$

7) $f(x)=(x-1)(x+1)$

8) $f(x)=\dfrac{4x^2+x-1}{2x}$

9) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+3x^2+7x+1$

10) $f(x)=-2$

11) $f(x)=\sqrt{2}x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

12) $f(x)=x^{-3}+\dfrac{1}{x^7}$

13) $f(x)=(3x^2+6)\left(2x-\dfrac{1}{4}\right)$

14) $f(x)=-3x^{-8}+2\sqrt{x}$

15) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{5}$

16) $f(x)=(3x^2+1)^2$

17) $f(x)=\pi^3$

18) $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ = σταθερές

19) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{3x}$

20) $f(x)=(x^5+2x)^2$

21) $f(x)=(5x)^{-2}$

22) $f(x)=(x^2-7)(x^3+4x+2)$

23) $f(x)=\left(4+\dfrac{1}{x}\right)\left(2x-\dfrac{1}{x^2}\right)$

24) $f(x)=\dfrac{3x+1}{2x-5}$

25) $f(x)=\dfrac{x^2}{2x^2+x+1}$

26) $f(x)=\dfrac{(2x+1)(x-5)}{3x+2}$

27) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}$

28) $f(x)=(3x+1)^{-2}$

6.3 Παράγωγος Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

Η παράγωγος της τριγωνομετρικής συνάρτησης $y = \sin x$ ως προς x και με βάση τον ορισμό της παραγώγου, είναι το όριο

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}.$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$$

καθώς και τα ακόλουθα δύο γνωστά όρια $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$ και $\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = 0$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\left[\cos h - 1\right] + \cos x \sin h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\sin x\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \lim_{h\to 0}\left(\cos x\frac{\sin h}{h}\right) \\
&= \sin x \lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin h}{h}\right) \\
&= \sin x \times 0 + \cos x \times 1 \\
&= \cos x .
\end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο ο αναγνώστης μπορεί να αποδείξει ότι η παράγωγος της συνάρτησης

$$y = \cos x \qquad \text{είναι} \qquad y' = -\sin x$$

και η παράγωγος της συνάρτησης

$$y = \tan x \qquad \text{είναι} \qquad y' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

6.3.1 Παραδείγματα

Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων

1) $y = x^2 \tan x$, 2) $y = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$, 3) $y = \dfrac{1}{\cos x}$

Λύση

1) $$\frac{dy}{dx} = x = \tan x \frac{d}{dx}\left(x^2\right) + x^2 \frac{d}{dx}\left(\tan x\right) = 2x \tan x + x^2 \sec^2 x$$

2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(1+\cos x\right)\frac{d}{dx}\left(\sin x\right) - \sin x \frac{d}{dx}\left(1+\cos x\right)}{\left(1+\cos x\right)^2}$$

$$= \frac{\left(1+\cos x\right)\left(\cos x\right) - \sin x\left(-\sin x\right)}{\left(1+\cos x\right)^2}$$

$$= \frac{\cos x + \cos x^2 + \sin^2 x}{\left(1+\cos x\right)^2} = \frac{\cos x + 1}{\left(1+\cos x\right)^2} = \frac{1}{1+\cos x}$$

3) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \frac{d}{dx}\left(1\right) - 1\frac{d}{dx}\left(\cos x\right)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{0 - 1(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x \cos x}$$

$$= \frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x \, .$$

Ασκήσεις 6.3

Να βρεθεί η $f'(x)$ των παρακάτω συναρτήσεων

1) $y = x^2 - \cos x$

2) $y = 1 + 7\sin x - \tan x$

3) $y = x\sin x$

4) $\sin x \cos x$

5) $y = \left(x^2 + \sin x\right)\sec x$

6) $y = \dfrac{x^2}{1 + 2\tan x}$

7) $y = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$

8) $y = \sin^2 x$

9) $y = \left(1 + \cos x\right)\left(x - \sin x\right)$

10) $y = \cos^2 x + \sin^2 x$

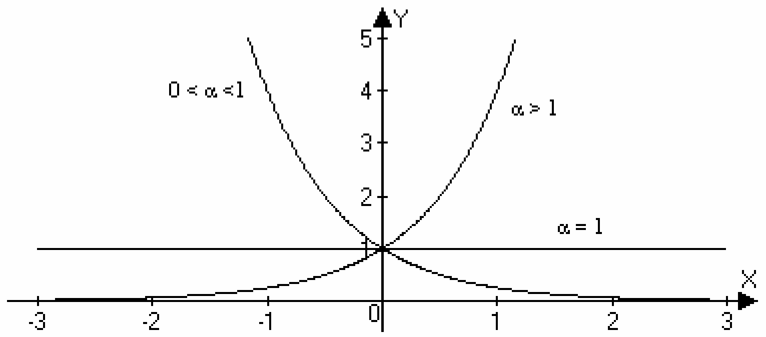
6.4 Παράγωγος Εκθετικών και Λογαριθμικών Συναρτήσεων

Παράγωγος εκθετικών συναρτήσεων

Στην άλγεβρα, οι ακέραιοι εκθέτες και οι ρητοί εκθέτες ενός αριθμού a μπορούν να οριστούν ως

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n-\phi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}\ ,\ a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ \ a^0 = 1,\ \ a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p,\ \ a^{-p/q} = \frac{1}{a^{p/q}}\,.$$

Το γράφημα της συνάρτησης $y = a^x$ εξαρτάται από τις τιμές που μπορεί να πάρει το a. Το παρακάτω γράφημα μας δείχνει την συνάρτηση $y = a^x$ για $0 < a < 1$, $a = 1$ και $a > 1$.



6.4.1 Πρόταση

Έστω $a > 0$. *Αν* $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ *με* $f(x) = a^x$, *τότε* $f'(x) = a^x \ln a$.

Ειδικά, για $a = e$ *παίρνουμε:* $\dfrac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$.

Απόδειξη

Έχουμε την ανισότητα: $1 + x \le e^x \le \dfrac{1}{1-x}$, *για κάθε* $x \in (-\infty, 1)$. *Για x αρκούντως μικρό κατ' απόλυτη τιμή (*$|x| < \dfrac{1}{|\ln a|}$, *για* $a \ne 1$, *ενώ για* $a = 1$ *το x μπορεί να είναι οτιδήποτε) έχουμε* $x \ln a \in (-\infty, 1)$. *Άρα,*

$$1 + x\ln a \le e^{x\ln a} \le \frac{1}{1 - x\ln a},\ \text{ήτοι}\ 1 + x\ln a \le a^x \le \frac{1}{1 - x\ln a} \Rightarrow x\ln a \le a^x - 1 \le \frac{x\ln a}{1 - x\ln a}.$$

Εάν $x > 0$, *παίρνουμε* $\ln a \le \dfrac{a^x - 1}{x} \le \dfrac{\ln a}{1 - x\ln a}$ *και επειδή* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln a}{1 - x\ln a} = \ln a$, *έπεται (από το κριτήριο της παρεμβολής) ότι* $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

Εάν $x<0$, *παίρνουμε* $\ln a \geq \frac{a^x-1}{x} \geq \frac{\ln a}{1-x\ln a}$, *οπότε* $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$.

Άρα $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$.

Με βάση τώρα, τον ορισμό της παραγώγου η παράγωγος της συνάρτηση $y=a^x$ *δίνεται από τον τύπο*

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^x\left(a^h-1\right)}{h}=a^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=a^x\cdot\ln a.$$

Εάν, $a=e$ *τότε η συνάρτηση γίνεται* $y=e^x$ *και η παράγωγός της ορίζεται ως*

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\right)=e^x \qquad \square$$

6.4.2 Σημείωση

Ο αριθμός e ορίζεται ως

$$e=\lim_{h\to+\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^h=\lim_{k\to 0}\left(1+k\right)^{1/k}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

$$=2.71828\ldots$$

Παράγωγος λογαριθμικών συναρτήσεων

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log_b x$. Η $f'(x)$ ορίζεται ως

$$\frac{d}{dx}\left(\log_b x\right)=\lim_{h\to 0}\frac{\log_b(x+h)-\log_b(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\log_b(x+h)-\log_b(x)\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_b\left(\frac{x+h}{x}\right) \qquad \left[\log_a\left(XY\right)=\log_a X+\log_a Y\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_b\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

εάν $u=\frac{h}{x}$ τότε $u\to 0$ όταν $h\to 0$ και επομένως,

$$\frac{d}{dx}\left(\log_b x\right)=\lim_{u\to 0}\frac{1}{ux}\log_b\left(1+u\right)$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{u\to 0} \frac{1}{u} \log_b (1+u)$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{u\to 0} \log_b (1+u)^{1/u}$$

$$= \frac{1}{x} \log_b \left[\lim_{u\to 0} (1+u)^{1/u} \right] \qquad \left[e = \lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} \right]$$

$$= \frac{1}{x} \log_b e$$

Επομένως,

$$\frac{d}{dx}\left(\log_b x\right) = \frac{1}{x} \log_b e\,, \qquad x > 0$$

αλλάζοντας την βάση του λογαρίθμου παίρνουμε

$$\frac{d}{dx}\left(\log_b x\right) = \frac{1}{x \ln b}\,, \qquad x > 0 \qquad \left[\log_z x = \frac{\log_a x}{\log_a z} \right]$$

Στην περίπτωση όπου $b = e$ τότε

$$\frac{d}{dx}\left(\ln(x)\right) = \frac{1}{x}\,, \quad x > 0 \qquad \left[\log_a a = 1 \right]$$

Ασκήσεις 6.4

Να βρεθεί η παράγωγος , $f'(x)$, των παρακάτω συναρτήσεων.

1) $f(x) = x\ln x$

2) $f(x) = x^2(x-1)^{\frac{1}{2}}$

3) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

4) $f(x) = 3\sin x\cos x$

5) $f(x) = \tan x$,

6) $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$

7) $f(x) = (x-1)\ln(x-1)$

8) $f(x) = \sin x\ln x$

9) $f(x) = \dfrac{x}{\cos x}$

10) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

11) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

12) $f(x) = e^x\sin x$

13) $f(x) = \dfrac{e^x}{\sin x}$

14) $f(x) = x\log x$

15) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - e^{-x}}$

16) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

17) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

18) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$

19) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$

20) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\ln(x-1)}$

6.5 Παράγωγος Σύνθετης Συνάρτησης

Για να υπολογίσουμε την παράγωγο σύνθετων συναρτήσεων χρησιμοποιούμε τον κανόνα της αλυσιδωτής παραγώγισης ή κανόνα της αλυσίδας.

6.5.1 Πρόταση (κανόνας της αλυσίδας)

Έστω $g : A \to B$ *παραγωγίσιμη στο σημείο* $x_0 \in A$ *και* $f : B \to \mathbb{R}$ *παραγωγίσιμη στο σημείο* $g(x_0) \in B$, *όπου Α, Β ανοικτά διαστήματα του* $\mathbb{R}$. *Τότε η* $f \circ g$ *είναι παραγωγίσιμη στο σημείο* $x_0 \in A$ *και ισχύει:* $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi : A \to \mathbb{R}$ *με τύπο*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)}, & \text{αν } g(x) \neq g(x_0) \\ f'(g(x_0)), & \text{αν } g(x) = g(x_0) \end{cases}$$

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι η φ είναι συνεχής στο σημείο x_0. *Έστω λοιπόν* $\varepsilon > 0$. *Εφόσον η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο* $g(x_0)$, *υπάρχει* $\delta > 0$ *με την ιδιότητα:*

$$y \in B \text{ και } 0 < |y - g(x_0)| < \delta \quad \Rightarrow \left| \frac{f(y) - f(g(x_0))}{y - g(x_0)} - f'(g(x_0)) \right| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Τώρα, εφόσον η g είναι συνεχής στο x_0 *(γιατί είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό), υπάρχει* $\delta' > 0$ *με την ιδιότητα:* $x \in A$ *και* $0 < |x - x_0| < \delta' \quad \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \delta$.

Για κάθε $x \in A$ *με* $0 < |x - x_0| < \delta'$ *διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: (i) Αν* $g(x) = g(x_0)$, *τότε* $\varphi(x) = f'(g(x_0)) = \varphi(x_0)$ *και άρα* $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = 0 < \varepsilon$ *και (ii)* $0 < |g(x) - g(x_0)| < \delta$, *οπότε, βάσει της (1),* $\left| \dfrac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} - f'(g(x_0)) \right| < \varepsilon$, *δηλαδή* $|\varphi(x) - f'(g(x_0))| < \varepsilon$. *Παρατηρούμε τώρα ότι για κάθε* $x \in A \setminus \{x_0\}$ *ισχύει:*

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \varphi(x) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

[Αν $g(x)=g(x_0)$, *τότε* $\dfrac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}=\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=0$, *ενώ αν* $g(x)\neq g(x_0)$

τότε $\dfrac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}=\dfrac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}\cdot\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\varphi(x)\cdot\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ *].*

Επομένως,

$$(f\circ g)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$$=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0).$$

□

Με άλλα λόγια εάν

$$y=f\left(g(x)\right)\ \textit{και}\ u=g(x)\ \textit{τότε}\ y=f(u)$$

και επομένως,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

6.5.2 Παραδείγματα

1) Να βρεθεί η παράγωγος της $y=\sqrt{x^2-1}=(x^2-1)^{1/2}$

Λύση

$$u=x^2-1 \qquad \frac{du}{dx}=2x \qquad \text{και} \qquad y=u^{1/2} \qquad \frac{dy}{du}=\frac{1}{2}u^{-1/2}.$$

Άρα,

$$\frac{dy}{du}=\frac{1}{2}u^{-1/2}.2x=\frac{x}{u^{1/2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

2) Να βρεθεί η παράγωγος της $y=\sin(2\theta-\frac{\pi}{4})$

Λύση

$$u=2\theta-\frac{\pi}{4} \qquad \frac{du}{d\theta}=2 \qquad \text{και} \qquad y=\sin u \qquad \frac{dy}{du}=\cos u$$

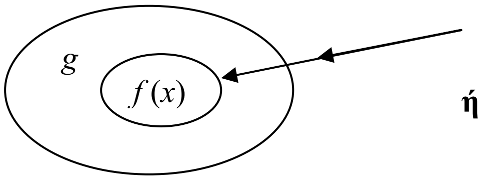
Άρα,

$$\frac{dy}{d\theta}=2\cos u=2\cos(2\theta-\frac{\pi}{4}).$$

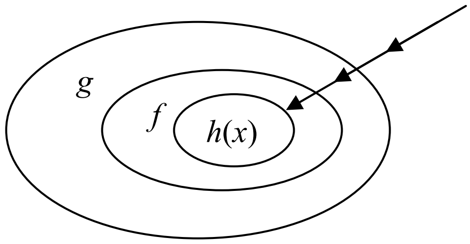
6.5.3 Σημείωση

*Ουσιαστικά ο υπολογισμός της παραγώγου μίας σύνθεσης **δύο ή και περισσοτέρων** παραγωγίσιμων συναρτήσεων, δεν είναι τίποτε άλλο παρά το γινόμενο των παραγώγων κάθε συνάρτησης αρχίζοντας την παραγώγιση της σύνθεσης από έξω προς τα μέσα.*

Έτσι λοιπόν εάν έχουμε τις συναρτήσεις $r(x) = g(f(x))$ **ή** $p(x) = g(f(h(x)))$, η παραγώγιση της σύνθεσης από έξω προς τα μέσα



ή



θα μας δώσει τους παρακάτω δύο τύπους

$$r'(x) = g'(f(x)) \times f'(x) \quad \text{ή} \quad p'(x) = g'(f(h(x))) \times f'(h(x)) \times h'(x).$$

6.5.4 Παραδείγματα

1) Να βρεθεί η παράγωγος της $y = e^{2x}$

Λύση

Εδώ έχουμε δύο συναρτήσεις την e^{2x} και την $2x$. Άρα ,

$$y' = \left(e^{2x}\right)' = e^{2x}\left(2x\right)' = e^{2x}2 = 2e^{2x}.$$

2) Να βρεθεί η παράγωγος της $y = \sin\left(e^{2x}\right)$

Λύση

Εδώ έχουμε τρεις συναρτήσεις την $\sin\left(e^{2x}\right)$ την e^{2x} και την $2x$. Άρα,

$$\begin{aligned} y' &= \left(\sin\left(e^{2x}\right)\right)' = \cos\left(e^{2x}\right)\left(e^{2x}\right)' = \cos\left(e^{2x}\right)e^{2x}\left(2x\right)' = \cos\left(e^{2x}\right)e^{2x}2 \\ &= 2e^{2x}\cos\left(e^{2x}\right) \end{aligned}$$

3) Να βρεθεί η παράγωγος της $y = \left(\cos\left(4x^5\right)\right)^3$

Λύση

Εδώ έχουμε τρεις συναρτήσεις την $\left(\cos\left(4x^5\right)\right)^3$ την $\cos\left(4x^5\right)$ και την $4x^5$.

Άρα,

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(\left(\cos\left(4x^5\right)\right)^3\right)' = 3\left(\cos\left(4x^5\right)\right)^2\left(\cos\left(4x^5\right)\right)' \\
&= 3\left(\cos\left(4x^5\right)\right)^2\left(-\sin\left(4x^5\right)\right)\left(4x^5\right)' = 3\left(\cos\left(4x^5\right)\right)^2\left(-\sin\left(4x^5\right)\right)20x^4 \\
&= -60x^4\sin(4x^5)\left(\cos(4x^5)\right)^2
\end{aligned}
$$

Παράγωγος του x^r όπου r = ρητός αριθμός.

Στην παράγραφο 6.2 είδαμε πώς να βρίσκουμε την παράγωγο του x^n για ακέραιες τιμές του n αλλά και για $n = 1/2$. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας θα δούμε ότι η ίδια τεχνική μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για οποιαδήποτε ρητή δύναμη του x. Δηλαδή,

$$\frac{d}{dx}\left(x^r\right) = rx^{r-1}.$$

Απόδειξη

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $y = x^{p/q}$. *Εάν* $u = x^{1/q}$ *και* $y = u^p$ *τότε παραγωγίζοντας ως προς* x *και* u *αντίστοιχα παίρνουμε* $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1}$ *και* $\dfrac{dy}{du} = px^{p-1}$.

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{p}{q}u^{p-1}x^{\frac{1}{q}-1}$$

$$= \frac{p}{q}\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1}\left(x^{\frac{1}{q}-1}\right) = \frac{p}{q}\left(x^{\frac{p-1}{q}}\right)\left(x^{\frac{1}{q}-1}\right) = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-\frac{1}{q}+\frac{1}{q}-1}$$

$$= \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$$

Ασκήσεις 6.5

Να βρεθεί η παράγωγος $f'(x)$ των παρακάτω συναρτήσεων.

1) $f(x)=e^{3x}$

2) $f(x)=(x+1)^5$

3) $f(x)=(x^2+1)^5$

4) $f(x)=\sin\theta^2$

5) $f(x)=\sin^2\theta$

6) $f(x)=(x+1)^{-1}$

7) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x-1}}$

8) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^{2x}}$

9) $f(x)=\dfrac{1}{\sin\theta}$

10) $f(x)=2e^{-3x}+e^{4x}$

11) $f(x)=e^{\sin x}$

12) $f(x)=2e^{\sin 3\theta}$

13) $f(\theta)=2\sin(\theta^2+4)^{\frac{1}{2}}$

14) $f(x)=\ln\left(\sin x\cos x\right)$

15) $f(x)=\ln\left(\dfrac{\sin x}{1-\cos x}\right)$

16) $f(x)=\cos^3(\sin(2x))$

17) $f(x)=\left(\dfrac{x-5}{2x+1}\right)^3$

18) $f(x)=x^3\sin^2(5x)$

19) $f(x)=\cos(\cos x)$

20) $f(x)=\left(x\sin(2x)+\tan^4(x^7)\right)^5$

6.6 Παράγωγος Αντίστροφων Συναρτήσεων

6.6.1 Πρόταση

Εάν η συνάρτηση $y = f(x)$ *είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με αντίστροφη συνάρτηση την* $x = f^{-1}(y) = g(y)$, *τότε η* $g(y)$ *θα είναι παραγωγίσιμη όταν* $\frac{dy}{dx} = f'(x) \neq 0$ *και*

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}.$$

Απόδειξη

Αφού η συνάρτηση $f(x)$ *είναι παραγωγίσιμη, θα είναι και συνεχής έτσι ώστε*

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \to 0 \text{ όταν το } \Delta x \to 0.$$

Η συνάρτηση $g(y)$ *είναι συνεχής, άρα* $\Delta x \to 0$ *όταν* $\Delta y \to 0$. *Επομένως,*

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y / \Delta x}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{dy/dx} \qquad \square$$

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί και γραφτεί και ως

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}$$

ή διαφορετικά, αλλάζοντας τις μεταβλητές

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

δηλαδή,

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

Παράγωγος Αντίστροφων Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

Ας πάρουμε την συνάρτηση $y = \sin^{-1} x \left(= \arcsin x\right)$. Η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφτεί σαν

$$x = \sin y .$$

Εάν τώρα παραγωγίσουμε ως προς y θα πάρουμε $\frac{dx}{dy} = \cos y$. Επομένως ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} .$$

Γνωρίζουμε όμως ότι $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2$.

Επομένως,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} .$$

6.6.2 Σημείωση

Επειδή $-1 < x < 1$, *τότε* $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. *Για αυτές τις τιμές του* y $\cos(x) \geq 0$. *Άρα* $\cos(y) = \sqrt{(1-x^2)}$ *[και* ***όχι*** $-\sqrt{(1-x^2)}$ *].*

Με τον ίδιο τρόπο ο αναγνώστης μπορεί να αποδείξει ότι η παράγωγος της

$y = \cos^{-1} x \left(= \arccos x\right)$ είναι $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$

και η παράγωγος της

$y = \tan^{-1} x \left(= \arctan x\right)$ είναι $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$.

6.7 Συνοπτικός Πίνακας Παραγώγισης

Οι τύποι παραγώγισης που αναπτύξαμε σε αυτό το κεφάλαιο δίνονται στον παρακάτω πίνακα. Οι συναρτήσεις u και v που βλέπετε στους τύπους θεωρούνται ότι είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις του x. Το γράμμα c δηλώνει μία αυθαίρετη σταθερά.

$y = c$, (c = σταθερά)	$\frac{dy}{dx} = 0$	$y = \sin\theta$	$\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta$
$y = x^n$	$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$	$y = \cos\theta$	$\frac{dy}{d\theta} = -\sin\theta$
$y = ax^n$	$\frac{dy}{dx} = anx^{n-1}$	$y = \tan\theta$	$\frac{dy}{d\theta} = \sec^2\theta$
$y = e^x$	$\frac{dy}{dx} = e^x$	$y = \sin^{-1}\frac{x}{a}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
$y = e^{ax}$	$\frac{dy}{dx} = ae^{ax}$	$y = \cos^{-1}\frac{x}{a}$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
$y = a^x$	$\frac{dy}{dx} = a^x \ln a$	$y = \tan^{-1}\frac{x}{a}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{a^2 + x^2}$
$y = \ln x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$		
Κανόνας Γινομένου :		*Κανόνας Πηλίκου* :	
$y = u.v$,	$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$	$y = \frac{u}{v}$,	$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$
Κανόνας Αλυσίδας :			
$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$			

6.8 Διαφορικά

Μέχρι στιγμής έχουμε αντιμετωπίσει τον συμβολισμό dy/dx ως ένα απλό σύμβολο για την παραγώγιση. Τα σύμβολα ‘‘dy’’ και ‘‘dx’’, τα οποία και ονομάζονται ***διαφορικά***, δεν είχαν από μόνα τους κάποια συγκεκριμένη σημασία.

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε πως τα σύμβολα αυτά, ‘‘dy’’ και ‘‘dx’’, μπορούν να χρησιμοποιηθούν έτσι ώστε το dy/dx να ερμηνευτεί ως το πηλίκο των δύο αυτών διαφορικών.

Εάν $y = f(x)$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο x, τότε μπορούμε να ορίσουμε το dy ως

$$dy = f'(x)dx \tag{1}$$

Εάν $dx \neq 0$, τότε μπορούμε να διαιρέσουμε και τα δυο μέλη της (1) με dx για να μας δώσει

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \tag{2}$$

Η εξίσωση (2) μας λεει ότι μπορούμε να θεωρήσουμε το σύμβολο για την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ ως πηλίκο των δύο διαφορικών.

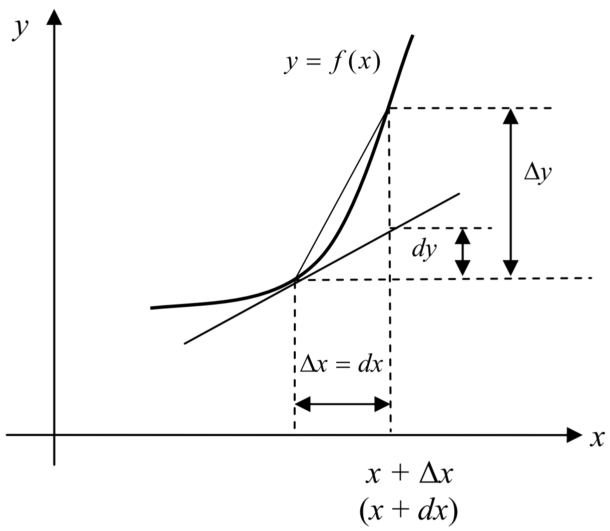
6.8.1 Ορισμός

Για την συνάρτηση $y = f(x)$ ορίζουμε

(α) ως διαφορικό του x το dx με την σχέση $dx = \Delta x$

(β) ως διαφορικό του y το dy με την σχέση $dy = f'(x)dx$

Επομένως το διαφορικό της ανεξάρτητης μεταβλητής x είναι από τον ορισμό ίσο με την μεταβολή της μεταβλητής. Το διαφορικό όμως της εξαρτημένης μεταβλητής y δεν ισούται με την μεταβολή της. Αυτό μπορεί να γίνει πιο κατανοητό βλέποντας το παρακάτω σχεδιάγραμμα .



Είναι εμφανές ότι το $dy \neq \Delta y$. Όσο ποιο μικρό είναι το διάστημα Δx τόσο καλύτερη είναι η προσέγγιση του διαφορικού dy στο Δy.

Οι τύποι παραγώγων που παραθέσαμε στον συνοπτικό πίνακα παραγώγισης στην παράγραφο 6.9 μπορούν να εκφραστούν και σε διαφορικά. Οι τύποι αυτοί δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Συνοπτικός Πίνακας Διαφορικών

$d(c) = 0$ (c = σταθερά)	$d(\sin\theta) = \cos(\theta)d\theta$
$d(x^n) = nx^{n-1}dx$	$d(\cos\theta) = -\sin(\theta)d\theta$
$d(ax^n) = anx^{n-1}dx$	$d(\tan\theta) = \sec^2(\theta)d\theta$
$d(e^x) = e^x dx$	$d\left(\sin^{-1}\frac{x}{a}\right) = \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$
$d(e^{ax}) = ae^{ax}dx$	$d\left(\cos^{-1}\frac{x}{a}\right) = -\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$
$d(a^x) = a^x \ln(a)dx$	$d\left(\tan^{-1}\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{a^2+x^2}dx$
$d(\ln x) = \frac{dx}{x}$	
<u>*Κανόνας Γινομένου*</u> :	<u>*Κανόνας Πηλίκου*</u> :
$d(uv) = vdu + udv$	$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

6.9 Λύσεις Ασκήσεων

Ασκήσεις 6.1

1) $8x-9$, 2) $4x^3-27x^2$, 3) $4x-1$, 4) $2x-8$, 5) $2x-\frac{2}{x^2}$, 6) $-2x^{-3}-x^{-2}$,

7) $\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$, 8) $-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^4}$, 9) $2\alpha x$, 10) $-\frac{1}{2x^{3/2}}$.

Ασκήσεις 6.2

1) $5x^4$, $20x^3$ 2) $-3x^{-4}$, $12x^{-5}$, 3) $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$, 4) $-x^{-2}$, $2x^{-3}$, 5) $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$, $-\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}$,

6) $2x-1$, 2, 7) $2x$, 2, 8) $2+\frac{1}{2x^2}$, $-\frac{1}{x^3}$, 9) x^2+6x+7, $2x+6$ 10) 0, 11) $\sqrt{2}$,

$\frac{1}{2}(2)^{-1/2}$, 12) $-3x^{-4}-7x^{-8}$, $12x^{-5}+56x^{-9}$, 13) $18x^2-\frac{3}{2}x+12$, $36x-\frac{3}{2}$,

14) $24x^{-9}+\frac{1}{\sqrt{x}}$, $-216x^{-10}-\frac{1}{2x^{3/2}}$, 15) $\frac{2}{5}x$, $\frac{2}{5}$ 16) $36x^3+12x$, $108x^2+12$ 17) 0,

18) $3ax^2+2bx+c$, $6ax+2b$, 19) $\frac{1}{3}-\frac{1}{3x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, 20) $10x^9+24x^5+8x$, $90x^8+120x^4+8$

21) $-\frac{2}{25}x^{-3}$, $\frac{6}{25}x^{-4}$, 22) $5x^4-9x^2+4x-28$, $20x^3-18x+4$, 23) $8+\frac{8}{x^3}+\frac{3}{x^4}$,

$-\frac{24}{x^4}-\frac{12}{x^5}$, 24) $\frac{-17}{(2x-5)^2}$, $\frac{68}{(2x-5)^3}$, 25) $\frac{x^2+2x}{(2x^2+x+1)^2}$, $\frac{-3x^3+2x+2}{(2x^2+x+1)^4}$,

26) $\frac{6x^2+8x-3}{(3x+2)^2}$, $\frac{108x^5-144x^4-144x^3-36x^2-48x+104}{(3x+2)^4}$, 27) $-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^4}-\frac{4}{x^5}$

$\frac{2}{x^3}+\frac{6}{x^4}+\frac{12}{x^5}+\frac{20}{x^6}$, 28) $\frac{-6}{(3x+1)^3}$, $\frac{54}{(3x+1)^4}$

Ασκήσεις 6.3

1) $2x+\sin x$, 2) $7\cos x-\sec^2 x$, 3) $x\cos x+\sin x$, 4) $\cos 2x$

5) $x^2\sec x\tan x+2x\sec x+\sec^2 x$, 6) $\frac{4x\tan x-2x^2\sec^2 x+2x}{(1+2\tan x)^2}$, 7) $\frac{1}{1+\cos x}$,

8) $2\sin x\cos x$, 9) $1-\cos^2 x-x\sin x(1-\sin x)$, 10) 0.

Ασκήσεις 6.4

1) $1+\ln x$, 2) $\frac{5x^2-4x}{2\sqrt{(x-1)}}$, 3) $\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$, 4) $3\cos^2 x-3\sin^2 x$,

5) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$, 6) $\dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$, 7) $1+\ln(x-1)$, 8) $\cos x \ln x + \dfrac{1}{x}\sin x$,

9) $\dfrac{1}{\cos x}(1+x\tan x)$, 10) $-\dfrac{1}{\sin^2 x}$, 11) $\dfrac{2}{(x+1)^2}$, 12) $e^x\left(\sin x + \cos x\right)$,

13) $\dfrac{e^x\left(\sin x - \cos x\right)}{\sin^2 x}$, 14) $\dfrac{1+\ln x}{\ln 10}$, 15) $\dfrac{-2}{(e^x - e^{-x})^2}$, 16) $\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, 17) $\dfrac{x^2-1}{x^2}$,

18) $\dfrac{2-x}{2x^2\sqrt{(x-1)}}$, 19) $\dfrac{2x\cos x - \sin x}{2x\sqrt{x}}$, 20) $\dfrac{(x-1)\ln(x-1) - x\ln x}{x(x-1)\ln^2(x-1)}$.

Ασκήσεις 6.5

1) $3e^{3x}$, 2) $5(x+1)^4$, 3) $10x(x^2+1)^4$, 4) $2\theta\cos(\theta^2)$, 5) $2\sin\theta\cos\theta$, 6) $-(x+1)^{-2}$,

7) $-\dfrac{1}{2(x-1)^{3/2}}$, 8) $-e^{-x}+2e^{-2x}$, 9) $-\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$, 10) $-6e^{-3x}+4e^{4x}$, 11) $e^{\sin x}\cos x$,

12) $6e^{\sin 3\theta}\cos(3\theta)$, 13) $\dfrac{2\theta}{\sqrt{(\theta^2+4)}}\cos(\theta^2+4)^{\frac{1}{2}}$, 14) $2\dfrac{\cos(2x)}{\sin(2x)}$, 15) $-\dfrac{1}{\sin x}$,

16) $-6\cos^2(\sin(2x)).\sin(\sin(2x)).\cos(2x)$, 17) $\dfrac{33(x-5)^2}{(2x+1)^4}$,

18) $10x^3\sin(5x)\cos(5x)+3x^2\sin^2(5x)$, 19) $\sin x\sin(\cos x)$,

20) $5\left(x\sin(2x)+\tan^4(x^7)\right)^4.\left(2x\cos(2x)+\sin(2x)+28x^6\tan^3(x^7)\sec^2(x^7)\right)$.