Ejercicios tipo Selectividad sobre programación lineal. Parte I

CURSO	**TEMA**	**WWW.DANIPARTAL.NET**
1ºBach	progLINEAL 04	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

INFORMACIÓN GENERAL

Primera parte de ejercicios resueltos de Selectividad de cursos anteriores sobre programación lineal.

Vídeo asociado:

https://youtu.be/vfeCaE3NsxA

Geogebra asociado:

https://www.geogebra.org/m/ydxufpgf

EJERCICIO 1

Las restricciones de pesca de un país obligan a una empresa a pescar como máximo 2 toneladas de merluza y 2 toneladas de rape. Además, en total, las capturas de estas dos especies no pueden pasar de las 3 toneladas.

Si el precio de la merluza es de 6€/kg y el precio del rape es de 9€/kg, ¿qué cantidades debe pescar la empresa para obtener el máximo beneficio?

Es muy útil ilustrar los datos del enunciado en una tabla que muestre explícitamente las variables de nuestro problema.

	nº toneladas	Precio por tonelada (€)	Beneficio
Tipo pescado: merluza	x	6.000	6.000·x
Tipo pescado: rape	y	9.000	9.000·y

El beneficio total es nuestra función objetivo a maximizar: beneficio de la merluza más el beneficio del rape.

$f(x,y) = 6000x + 9000y$

Restricciones del enunciado (leer con calma el enunciado).

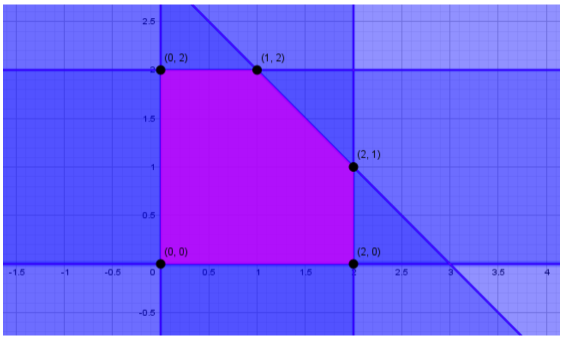
- Pescar 2 toneladas de merluza como máximo $\rightarrow x \leq 2$
- Pescar 2 toneladas de rape como máximo $\rightarrow y \leq 2$
- La pesca total no puede superar las 3 toneladas $\rightarrow x + y \leq 3$
- Además, la cantidad de pescado de cada tipo nunca puede ser negativa $\rightarrow x \geq 0, y \geq 0 \rightarrow$ **Estas dos condiciones no suelen aparecer de manera explícita en este tipo de enunciados, pero es muy importante aplicarlas para que la**

región factible sea acotada. Se conocen como condición de positividad de las variables.

En consecuencia, tenemos un sistema de cinco inecuaciones lineales de dos incógnitas.

Obtenemos la región factible del sistema. Indicando los vértices y si los lados pertenecen a la solución final.

La imagen de la derecha muestra una región factible convexa, con los vértices y los lados pertenecientes a la solución final (ya que todas las inecuaciones poseen el signo igual).



Obtenemos la imagen de $f(x,y) = 6000x + 9000y$ en los cinco vértices de la región factible.

$$f(0,0) = 0 + 0 = 0$$
$$f(2,0) = 12.000$$
$$f(0,2) = 18.000$$
$$f(1,2) = 24.000$$
$$f(2,1) = 21.000$$

Por el Teorema fundamental de la programación lineal podemos afirmar que, si la función objetivo posee un máximo en la región convexa que la delimita, el máximo aparece en al menos uno de los vértices de la región factible acotada.

Por lo tanto, el **punto** $(\mathbf{1},\mathbf{2})$ **maximiza** la función objetivo con una **imagen igual a** $\mathbf{24.000€}$ **(solución única)**. **La empresa debe pescar 1 tonelada de merluza y 2 toneladas de rape para maximizar beneficios**.

EJERCICIO 2

Un atleta debe tomar por lo menos 4 unidades de vitamina A, 6 unidades de vitamina B y 24 de vitamina C cada día.

Existen en el mercado dos productos P1 y P2, que en cada comprimido contienen las siguientes unidades de esas vitaminas:

- **Un comprimido de P1 contiene 3 unidades de vitamina A, 2 unidades de vitamina B y 4 unidades de vitamina C.**
- **Un comprimido de P2 contiene 4 unidades de vitamina A, 1 unidad de vitamina B y 3 unidades de vitamina C.**

Cada comprimido P1 cuesta 10 céntimos y cada comprimido P2 cuesta 5 céntimos.

¿Cuántos comprimidos de cada tipo debe tomar al día para obtener el nivel de vitaminas indicado al menor coste económico?

Las variables serán el número de comprimidos que debe tomar de cada tipo al día.

La función objetivo es el coste económico: coste de los comprimidos P1 más coste de los comprimidos P2.

$f(x, y) = 10x + 5y$

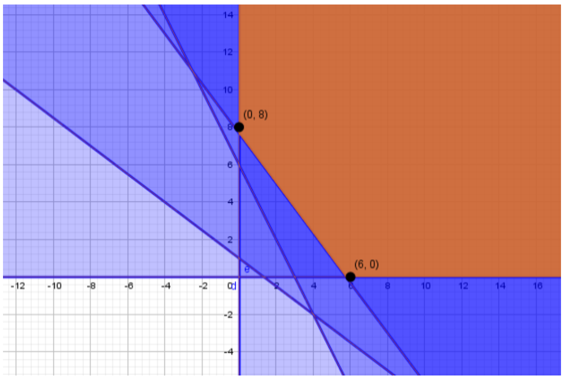
	nº comprimidos al día	Precio de cada comprimido (céntimos)	Coste
Comprimido P1	x	10	10·x
Comprimido P2	y	5	5·y

Conjunto de restricciones:

- Al menos 4 unidades de vitamina A. Como cada comprimido de P1 contiene 3 unidades de vitamina A y cada comprimido de P2 contiene 4 unidades de vitamina A $\rightarrow 3x + 4y \geq 4$
- Al menos 6 unidades de vitamina B. Como cada comprimido de P1 contiene 2 unidades de vitamina B y cada comprimido de P2 contiene 1 unidad de vitamina B $\rightarrow 2x + y \geq 6$
- Al menos 24 unidades de vitamina C. Como cada comprimido de P1 contiene 4 unidades de vitamina C y cada comprimido de P2 contiene 3 unidades de vitamina C $\rightarrow 4x + 3y \geq 24$
- Además, el número de comprimidos de cada tipo no puede ser negativo: condición de no negatividad de las variables $\rightarrow x \geq 0, y \geq 0$

En consecuencia, tenemos un sistema de cinco inecuaciones lineales de dos incógnitas.

Obtenemos la región factible del sistema. Indicando los vértices y si los lados pertenecen a la solución final.



La solución del sistema de inecuaciones lineales de la derecha no está totalmente delimitada por los lados de un polígono. Diremos que **la solución no está acotada**.

La región factible es convexa y los vértices y los lados pertenecen a la solución, por aparecer el signo igual en todas las inecuaciones.

Obtenemos la imagen de $f(x,y) = 10x + 5y$ en los dos vértices de la región factible.

$$f(6,0) = 6 \cdot 10 + 0 = 60$$
$$f(0,8) = 0 + 8 \cdot 5 = 40$$

Aunque la región factible no es acotada, **por el Teorema fundamental de la programación lineal** podemos afirmar que, si la función objetivo posee un mínimo en la región convexa que la delimita, el mínimo aparece en al menos uno de los vértices de la región factible.

El vértice que genera la imagen más pequeña es el punto $(0,8)$, que da lugar a una imagen de 40 céntimos.

Como el punto $(0,8)$ pertenece a un lado vertical que crece hacia arriba hacia el infinito, tomamos otro punto de ese lado para verificar si también es mínimo.

Por ejemplo, tomamos el punto $(0,10) \rightarrow f(0,10) = 0 + 50 \rightarrow$ La imagen que genera $(0,10)$ es mayor que la imagen que genera $(0,8)$.

Por lo tanto, el punto $(0,8)$ es la solución única que minimiza el coste del problema.

El atleta debe tomar 0 comprimidos de tipo P1 y 8 comprimidos tipo P2 para minimizar costes y alcanzar los niveles mínimos de vitaminas requeridos (solución única).

EJERCICIO 3

Una empresa textil quiere fabricar dos tipos de camisetas, lisas y estampadas. Para fabricar una camiseta lisa necesita 70g de algodón y 20g de poliéster. Y para cada camisa estampada necesita 60g de algodón y 10 g de poliéster.

La empresa dispone para ello de 4200g de algodón y 800g de poliéster. Para que sea rentable debe fabricar al menos 10 estampadas y, además, el número de estampadas debe ser al menos igual al doble del número de lisas.

Sabiendo que cada camiseta lisa da un beneficio de 5 euros y cada estampada de 4 euros, ¿cuántas camisetas de cada tipo debería fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?

Las variables serán el número de camisetas que deben fabricarse.

	nº camisetas fabricadas	Beneficio por cada camiseta (€)	Beneficio
Camiseta lisa	x	5	5·x
Camiseta estampada	y	4	4·y

El beneficio total es nuestra función objetivo a maximizar.

$f(x,y) = 5x + 4y$

Conjunto de restricciones:

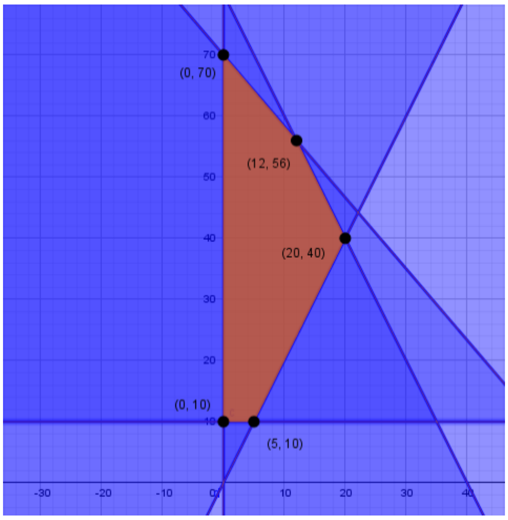
- Cada camiseta lisa contiene 70g de algodón y cada camiseta estampada 60g de algodón. Y la cantidad máxima de algodón que posee la empresa es 4200g. Esta cantidad máxima es un límite superior de material $\rightarrow 70x + 60y \leq 4200$
- Cada camiseta lisa contiene 20g de poliéster y cada camiseta estampada 10g de poliéster. Y la cantidad máxima de poliéster que posee la empresa es 800g. Esta cantidad máxima es un nuevo límite de material disponible $\rightarrow 20x + 10y \leq 800$
- Deben fabricarse al menos 10 camisetas estampadas $\rightarrow y \geq 10$
- El número de estampadas debe ser al menos igual al doble de lisas $\rightarrow y \geq 2x$
- Como es costumbre en estos ejercicios, el número de camisetas de cada tipo no pueden ser negativas $\rightarrow x \geq 0, y \geq 0$

Poseemos un sistema de seis inecuaciones lineales de dos incógnitas.

Obtenemos la región factible del sistema. Debemos indicar si los vértices y los lados pertenecen a la solución final.

La región factible es convexa y todos los lados y los vértices pertenecen a la solución por aparecer el signo igual en todas las inecuaciones.

Obtenemos la imagen de $f(x,y) = 5x + 4y$ en los cinco vértices de la región factible.



$$f(5,10) = 25 + 40 = 65$$
$$f(0,10) = 0 + 40 = 40$$
$$f(0,70) = 0 + 280 = 280$$
$$f(20,40) = 100 + 160 = 260$$
$$f(12,56) = 60 + 224 = 284$$

Por el Teorema fundamental de la programación lineal podemos afirmar que, si la función objetivo posee un máximo en la región convexa que la delimita, el máximo aparece en al menos uno de los vértices de la región factible. Al estar acotada la solución, sabemos que el problema de programación lineal tendrá solución.

El beneficio máximo es de 284€ si fabrica 12 camisetas lisas y 56 estampadas.