Etablissement High-Tech   série de la trigonométrie (1°partie) tronc commun
réalisé par Mr Mohachtou Mohammed

Exercice N°1

1)Calculer $\tan\frac{\pi}{5}+\tan\frac{2\pi}{5}+\tan\frac{3\pi}{5}+\tan\frac{4\pi}{5}$

2)Calculer : $\tan\frac{1991\pi}{6}$

Exercice N°2

1)simplifier

$A=\cos(\pi-x)+\sin(\frac{\pi}{2}+x)+\sin(x+5\pi)+\cos(\frac{5\pi}{2}-x)$

2) Montrer que l'équation :

$(\alpha\in IR), x\in IR$; $x^2-x.\cos\alpha-\frac{1}{4}\sin^2\alpha=0$ admet deux solutions différentes x_1 et x_2 et calculer $x_1^2+x_2^2$ en fonction $\cos\alpha$.

Exercice N°3

1)a) Montrer que : $\cos\frac{5\pi}{12}=\sin\frac{\pi}{12}$

b) Montrer que: $\sin\frac{7\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{12}$

2) Déduire la valeur de la Somme

$\cos^2\frac{5\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}.\sin\frac{7\pi}{12}$

Exercice N°4

On sait que $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

1)Prouver que $\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$

2) a) calculer $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$

b)En déduire que :$\tan\frac{5\pi}{12}=2+\sqrt{3}$

Exercice N° :5

Déterminer les valeurs suivantes

$A=\cos\frac{\pi}{14}+\cos\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{5\pi}{14}+\cos\frac{7\pi}{14}+\cos\frac{9\pi}{14}+\cos\frac{11\pi}{14}+\cos\frac{13\pi}{14}$

$B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$

$C=\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\frac{7\pi}{12}+\sin^2\frac{9\pi}{12}+\sin^2\frac{11\pi}{12}$

$D=\sin^2\frac{\pi}{5}+\sin^2\frac{3\pi}{10}+\sin^2\frac{7\pi}{10}+\sin^2\frac{4\pi}{5}$

$E=\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{10}+\cos\frac{7\pi}{10}+\cos\frac{4\pi}{5}$

Exercice N° :6

Soit $\alpha\in[0;\frac{\pi}{2}[$ on pose

$A=2\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\sqrt{3}\sin(\pi-\alpha)+\cos(\pi-\alpha)$ et

$B=\sqrt{3}\cos^3\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha.\sin^2\alpha+\sin\alpha$

1) Montrer $A=\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$ et $B=\sqrt{3}.\cos\alpha+\sin\alpha$

2) On pose $x=\sin\alpha$ et $y=\cos\alpha$

Résoudre dans IR^2 le système : $\begin{cases} x+\sqrt{3}y=\sqrt{3} \\ \sqrt{3}x+y=2 \end{cases}$

3) Déduire la valeur de α

Exercice N° :7

1) Résoudre dans IR^2 le système suivant :

$\begin{cases} x+y=\frac{1}{2} \\ xy=-\frac{1}{4} \end{cases}$

2)En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{3\pi}{5}$

sachant que : $\frac{3\pi}{5}=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{5}+\cos$ et

$\cos\frac{\pi}{5}.\cos\frac{3\pi}{5}=-\frac{1}{4}$.

3) Montrer que : $1+2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{4\pi}{5}=0$

Exercice N°8

1)a/ Calculer : $A=\cos\frac{4\pi}{3}+\sin\frac{7\pi}{3}+\tan(-\frac{2\pi}{3})$

b/ Calculer : $(x\in IR)$;

$B=\cos(x-\frac{\pi}{2})+\sin(x+\frac{\pi}{2})+\cos(x-\pi)+\sin(x+\pi)$

2)On considère la fonction g définie dans $D=[0;\pi]-\{\frac{\pi}{4}\}$ par : $g(x)=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$.

a/calculer $g(\frac{\pi}{2})$ et $g(\frac{\pi}{6})$

b/ Montrer que pour tout $x\in[0;\frac{\pi}{2}]-\{\frac{\pi}{4}\}$

$1+g(x).g(x+\frac{\pi}{2})=0$

c/ Exprimer g(x) en fonction tanx pour tout $x\in D-\{\frac{\pi}{2}\}$

Exercice N°9

On a : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=\frac{3\pi}{4}$, $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE})=-\frac{2\pi}{3}$,

$(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC})=-\frac{5\pi}{12}$.

Montrer que les points A ;E et C sont alignés

Exercice N° 10

Soit $x \in IR$.

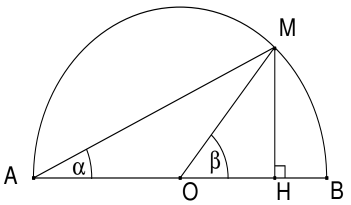
1)Montrer que : $\cos(x+\frac{\pi}{10})=\sin(\frac{2\pi}{5}-x)$

2)En déduire la valeur de :

$\cos(x+\frac{2\pi}{5})-\cos(\frac{\pi}{10}-x)+\sin(\frac{2\pi}{5}+x)-\sin(\frac{\pi}{10}-x)$

Exercice N° 11

On considère la figure suivante qui représente un demi- cercle de centre O et de diamètre [AB] et de rayon 1 .



1)Calculer cosα on utilisant les deux triangles AHM et AMB .

2)Montrer que AH=1+cosβ.

3) En déduire que $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos\beta}{2}$

4) comparer α et β et on déduire que si $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$

alors $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}$

4)Application

a) Montrer que $\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

b)Vérifier que $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

c) Calculer $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$

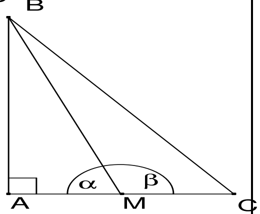
Exercice N° 12

ABC est un triangle rectangle en A et M milieu de [AC](voir shemas)

On pose $\widehat{AMB}=\alpha$ et $\widehat{BMC}=\beta$

et on donne AC=3 et

$\sin\beta=\frac{4}{5}$



1)Montrer que $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ et

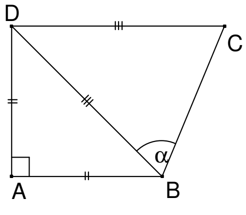
$\cos\alpha=\frac{3}{5}$

2) Montrer que AB=2

Exercice N° :13

ABCD est un trapèze droit en A tels que :

AB=AD et BD=CD



(voir shémas)

1) Déterminer α en radian

2) Sachant que BC=2 et $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

a)Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et Déduire la valeur de

$\sin\frac{3\pi}{8}$

b)En déduire BD et AB

c)Calculer la surface du triangle BCD

Exercice N° :14

On sait que : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})=\frac{3\pi}{4}$ et

$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE})=\frac{-2\pi}{3}$

et $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC})=\frac{-5\pi}{12}$

Montrer que les points A ; E et C sont alignés

Exercice N° :15

1)a/Calculer $A=\cos\frac{4\pi}{3}+\sin\frac{7\pi}{3}+\tan(-\frac{2\pi}{3})$

b/Calculer

$(x\in IR)$; $B=\cos(x-\frac{\pi}{2})+\sin(x+\frac{\pi}{2})+\cos(x-\pi)+\sin(x+\pi)$

2) On considère la fonction g définie dans $D=[0\,;\pi]-\{\frac{\pi}{4}\}$ Par : $g(x)=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$

a) Calculer $g(\frac{\pi}{2})$ et $g(\frac{\pi}{6})$

b) Montrer que pour tout $x\in[0\,;\frac{\pi}{2}]-\{\frac{\pi}{4}\}$

on a : $1+g(x).g(x+\frac{\pi}{2})=0$

c) Exprimer g(x) en fonction de tanx pour tout $x\in D-\{\frac{\pi}{2}\}$

Exercice N°16

ABC est un triangle équilatérale tel que :

$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\equiv\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

ACD et AEB sont deux triangles rectangle isocèles respectivement en D et E

1) construit une figure .

2) Déterminer en radian les mesures des angles

a) $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})$,b) $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD})$; c) $(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{BC})$ d) $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$; h) $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA})$;k) $(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD})$

Exercice N°17

Soit $x \in IR$ tel que $\cos x+\sin x = \frac{5}{6}$

Calculer :

1) $\sin x.\cos x$ **2)** $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}$ **3)** $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos x}$

4) $\tan x+\frac{1}{\tan x}$ **; 5)** $\sin^3 x+\cos^3 x$

Exercice N°17

Soit $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ tel que : $\cos x.\sin x = \frac{1}{2}$

Montrer que $\sin x = \cos x$

Et déduire la valeur de x

Exercice N°18

1)Vérifier que :pour tout $x \in IR$

$(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2 = 2$

2)Soit ABC un triangle rectangle en A tels que : AC<AB et $\cos \hat{B}+\sin \hat{B} = \frac{7}{5}$.

a)Montrer que : $\sin \hat{B} < \cos \hat{B}$

b)Montrer que : $\cos \hat{B}-\sin \hat{B} = \frac{1}{5}$

c)Calculer : $\cos \hat{B}$ et $\sin \hat{B}$

d)Montrer que : $\sin \hat{C} = \frac{4}{5}$

Exercice N°19

Simplifier les expressions suivantes :

$A=\cos^4 x+\sin^2 x(\sin^2 x-\cos^2 x)+\sin^2 x(2\cos^2 x-\sin^2 x)$

$B=\frac{\sin^2 x-\sin^4 x}{\cos^2 x-\cos^4 x}$ $C=\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

Exercice N°20

Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right[$ on pose

$A(x)=\cos x.\sin x\left[\tan x-\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]$

1)Montrer que $A(x)=\sin^2 x-\cos^2 x$

2)On suppose que $A(x)=\frac{3}{5}$

Montrer que $\cos x=\frac{\sqrt{5}}{5}$ puis déduire la valeur de tanx

****

la seule personne que tu dois essayer de surpasser, c'est la personne que tu étais hier."