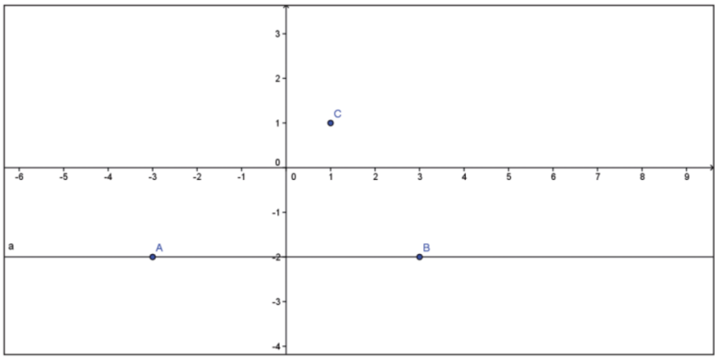
Parábolas e Funções Quadráticas

Acessar o link na plataforma ggb associado ao google sala de aula e geogebra classes. https://www.geogebra.org/m/kwwtznhe, usando o código de acesso RDA8 K7PF.

Agora, siga os passos:

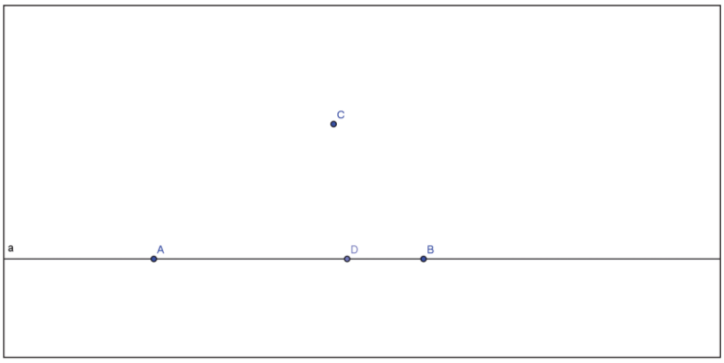
Utilize a ferramenta para traçar a reta que passa por A e B. A figura abaixo mostra o que deve estar na sua tela:



Vamos agora determinar um ponto qualquer da parábola de foco C e diretriz AB. Bem, a parábola é o lugar geométrico dos pontos cuja distância a C e a AB (ao foco e à diretriz) é constante. Vamos determinar então um ponto qualquer dessa parábola.

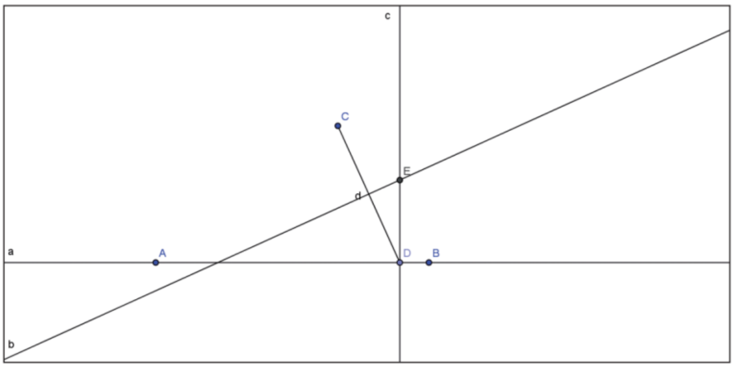
Para deixar a área de trabalho mais limpa, vamos esconder os eixos (menu Exibir/eixos). Seja E um ponto qualquer dessa parábola, então d(E, C) = d(E, AB). Vamos tomar um ponto qualquer em AB –

clique em no 2º menu de botões e na reta AB e determine o ponto D sobre AB. Observe que o ponto D move-se livremente sobre a reta AB.

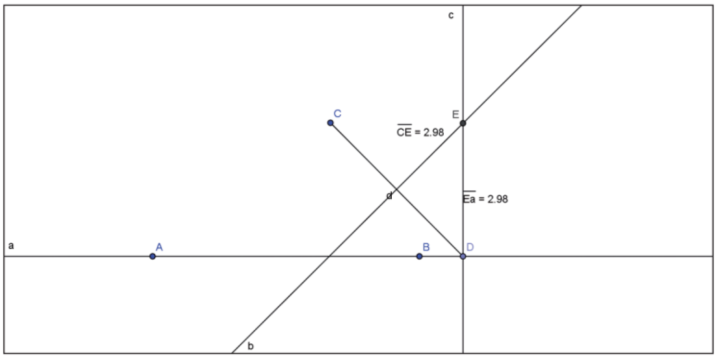


Nosso problema agora mudou. Precisamos determinar um ponto E tal a distância de E a C seja igual à distância de E a D. Seja então o segmento CD. Qualquer ponto que esteja sobre a mediatriz de CD dista igualmente de C e de D, o que indica que E é um ponto dessa mediatriz. Mas qual ponto? Clique em disponível no 3º menu de botões para traçar por D uma perpendicular à reta AB,

clicando consecutivamente em D e na diretriz AB. Agora, para traçar a mediatriz do segmento CD, clique em também no 3º menu de botões e nos pontos C e D. Marque o ponto que está na interseção entre a perpendicular e a mediatriz, selecionando no 2º menu de botões e na interseção. Surgirá na sua tela o ponto E que equidista de C e de D de forma que a distância de DE é perpendicular a AB. Logo, o ponto E é o ponto que procuramos, ele é um ponto qualquer da parábola de foco C e diretriz AB.

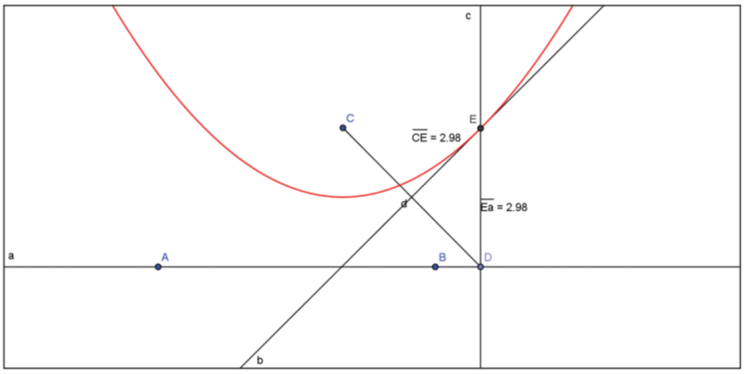


Como o Geogebra permite verificar distâncias entre pontos e entre ponto e reta, vamos então usar esse recurso para verificar a distância entre C e E e entre AB e E. Clique então sobre o ícone no 8º menu de botões e sobre C e E (aparecerá CE=...) e a seguir sobre AB e E (aparecerá Ea=...) e verifique que elas são iguais. Mova D sobre AB e veja que essas distâncias mudam isoladamente quando movemos D mas continuam iguais entre si.



Para visualizar a parábola, habilite o rastro do ponto E, clicando sobre ele com o botão direito do mouse e selecionando a opção “Habilitar rastro”. Movimente D sobre a reta AB e observe a parábola. Para fazê-la desaparecer, basta movimentar o desenho todo, clicando

em no último menu de botões e a seguir sobre a tela para movimentá-la. Desabilite o rastro de E clicando novamente sobre ele com o botão direito do mouse e em “habilitar rastro”. Você agora pode movimentar novamente D sobre AB sem que fique marcado o caminho percorrido por E. Uma outra maneira de visualizar a parábola é como um lugar geométrico – o Geogebra nos oferece esta opção. Clique no botão disponível no 4º menu de botões, no ponto E e no ponto D – dessa forma, estamos orientando o software a determinar o lugar geométrico dos pontos E quando D se move sobre a reta AB. Você está agora vendo a parábola. Experimente ainda movimentar o ponto D e você verá que E move-se sobre a parábola.



Acabamos então de determinar por procedimentos geométricos a parábola de foco C(1,1) e diretriz AB de equação y= –2. Vamos agora determiná-la por procedimentos algébricos.

Seja então o ponto E(x,y). Como E pertence à parábola que procuramos; então d(E,C) = d(E,AB).

Sendo d(P, Q) = $\sqrt{(x_P - x_Q)^2 - (y_P - y_Q)^2}$ e d(P,r)= $\dfrac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,

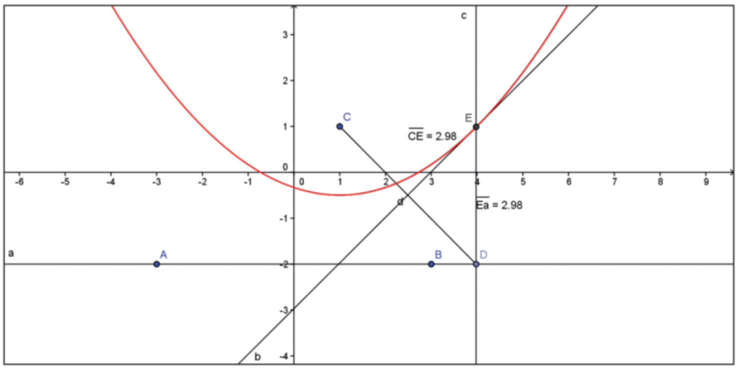
onde P(x_P, y_P), e Q(x_Q, y_Q) e a reta r tem equação r:ax + by + c = 0, temos:

d(E, C) = $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$ e d(E, AB) = $\dfrac{|0x + 1y + 2|}{\sqrt{0^2 + 1^2}}$ = y+2.

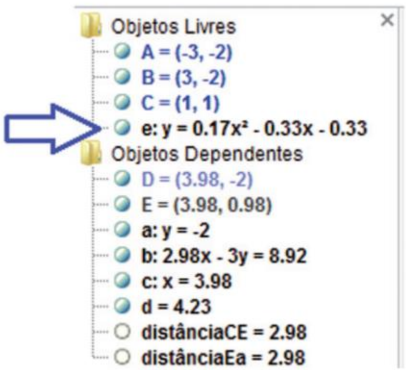
Da definição de parábola, vem que d(E, C)=d(E, AB), ou seja, $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = y + 2$

Resolvendo a equação, obtemos $y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$, que é uma função quadrática, o que significa que o ponto E é dado por $E\left(x, \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)$.

Volte agora à sua tela no Geogebra e peça para ver os eixos (menu Exibir/eixos). Agora, no campo Entrada na parte inferior da tela, escreva a equação $x, \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ e tecle <Enter>. O que você vai ver é que as parábolas coincidem, aparecendo exatamente uma sobre a outra.



Para poder perceber essa última parábola, marque-a e desmarque-a no campo "Janela de Álgebra", conforme podemos ver na figura a seguir:



Você perceberá que ela aparecerá e desaparecerá, o que facilitará a percepção de que as duas parábolas encontram-se sobrepostas na figura.

Você pode rever sua construção passo a passo acessando o menu Exibir/Barra de Navegação para Passos da Construção. Clicando em Iniciar você verá toda a construção novamente, passo a passo.

Podemos então tentar generalizar essa ideia? Vamos determinar a equação da parábola de foco C(m,n) e diretriz y – p = 0. Observe que a diretriz é horizontal para que possamos ter uma função, já que temos por objetivo estudar as funções quadráticas. Sendo E(x,y), temos:

d(C, E) = $\sqrt{(x-m)^2+(y-n)^2}$ e

d (diretriz, E) = $\dfrac{|0.x+1.y-p|}{\sqrt{m^2+n^2}} = y-p$

Da igualdade que define a parábola, vem:

$$\sqrt{(x-m)^2+(y-n)^2} = y-p$$

Resolvendo e isolando y, obtemos .

$$y = \frac{1}{2n-2p}x^2 - \frac{m}{n-p}x + \frac{m^2+n^2-p^2}{2n-2p}$$

Note que, como m, n, p são números reais, sendo n ≠ p, tem-se que $\dfrac{1}{2n-2p}$, $-\dfrac{m}{n-p}$ e $\dfrac{m^2+n^2-p^2}{2n-2p}$ também são números reais. A necessidade de ter-se evidencia-se tanto pelo lado algébrico, para que os denominadores não se anulem, como também no fato de que o foco não pode ser um ponto da diretriz porque se fosse, a parábola degenerar-se-ia em uma reta coincidente com a diretriz (experimente mover na sua tela do Geogebra o ponto C em direção à reta AB e veja o que acontece!).