UŽITÍ GEOGEBRA APPLETŮ PRO VÝUKU TĚLES

ŠÁRKA VORÁČOVÁ

ABSTRAKT. Příspěvek je zaměřený na možnosti využití GeoGebry pro výuku těles. Vytvořili jsme volně dostupný soubor interaktivních výukových materiálů pokrývající všechna tělesa, která jsou vyučována na základní a střední škole. Velká pozornost je věnována heuristické výuce objemů a povrchů těles. Postupy pro zkoumání prostorových vztahů popsány před více než 2000 lety v Eukleidových *Základech* a v Archimedových spisech mohou být dobrou inspirací pro intuitivní zkoumání žáků založené na geometrickém názoru. Objemy těles patří dlouhodobě ke kritickým místům vyučování matematice, porozumění prostorových vztahů a vlastností je častokrát nahrazeno drilem a dosazováním do vzorců. Právě v této oblasti může software dynamické geometrie účinně pomoci pro zvýšení zaujetí žáků, provokování k vytváření hypotéz i jejich experimentálnímu ověřování.

ÚVOD

Prostorová geometrie patří dlouhodobě ke kritickým místům matematického vzdělávání. Dle [9] se zde výrazně projevuje, že učitelé učí tak, jak byli sami učeni, jak tomu rozumí a jak úlohy sami řeší. Nedostatky ve vyučování geometrii souvisejí s nedostatky v geometrickém vzdělávání učitelů. Odrazem představ o axiomatické výstavbě geometrie je soustředění školní geometrie na rýsování a terminologii. Geometrie by však měla být od samého počátku orientována na poznávání prostoru, v němž žák žije, a na rozvíjení představivosti [6]. Představivost, a to nejen geometrická se obecně rozvíjí praxí. Vhodný výukový software v krátkém čase zprostředkuje žákům náhled řady geometrických situací a rozšiřuje tak evidované modely i zkušenosti [11]. Průzkum [4] prokázal pozitivní vliv software dynamické geometrie na konstrukci prostorových objektů a při určování objemů a povrchů.

1. DYNAMICKÁ GEOMETRIE

Výukové webové stránky a programy dnes patří k učebním pomůckám stejně jako tištěné učebnice či sbírky úloh a je zcela jisté, že jejich význam pro učení a vyučování dále poroste. Využití počítačových programů ve školské matematice je možné dvojím způsobem. První spočívá v řešení standardně zadaných úloh použitím příkazů daného software. V danou chvíli žák ani nemusí znát postup či vzorec vedoucí k výsledku, software provede výpočet za něj; z pohledu žáka jde tedy o jakousi černou skříňku. Druhý způsob spočívá v podpoře aktivní práce žáka, povzbuzení k vytváření a ověřování hypotéz a experimentování, jež vede k hlubšímu pochopení souvislostí [8].

Pozitivní vliv dynamických geometrických programů dokládá řada kvantitativních i kvalitativních výzkumů. Žáci dosahují výrazně lepších výsledků ve standardizovaném testu na porozumění geometrickým pojmům a geometrickou představivost. Žáci využívající dynamickou geometrii prokazují hlubší a trvalejší zapamatování získaných poznatků (cit. podle [11]).

Received by the editors datum odevzdání redakci časopisu.
1991 *Mathematics Subject Classification.* 97G30, 97U50.
Key words and phrases. GeoGebra, Dynamická geometrie, Konstruktivní vyučování, Tělesa.

Posledních deset let je celosvětově nejpoužívanějším programem školské matematiky GeoGebra. Instalace i online verze jsou zcela zdarma, nenáročné na hardware a tím i přístupné ve všech školních počítačových učebnách. Zadávání objektů je didakticky promyšlené a nástroje pokrývají školské kurikulum od základní školy až po základy calculu.

Prostředí GeoGebry integruje více edukačních prostředí a další možnosti jsou dále vyvíjeny. Velký potenciál pro výuku stereometrie skýtá prostředí AR (rozšířená realita), kdy se zobrazovaný objekt zobrazí na dotykových zařízení vnořený do fotografovaného prostředí. Dle studie reklamní společnosti Leo Burnett jsou poznatky zprostředkované augmentovanou realitou provázeny větším emočním zážitkem a tím jsou zapamatovatelnější. Lze očekávat podobný dopad i ve výukovém procesu.

Na serveru geogebra.org je přes milion appletů sdílených uživateli. Bohužel, vyhledávání dokumentů k danému tématu je nepřehledné, kvalita a matematická správnost nejsou nijak garantovány, hodnocení je ponecháno udílením “like“. I přes tyto nevýhody patří server Geogebry k účinným pomocníkům pro přípravu hodin matematiky na základní střední i vysoké škole.

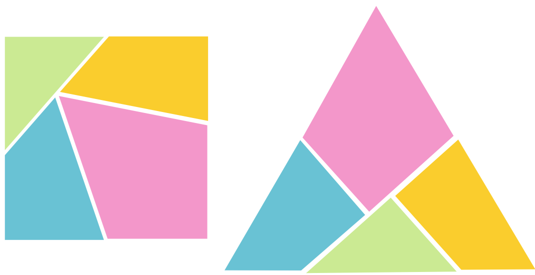
Proto jsme i my zvolili tuto platformu pro uložení a volného sdílení našeho souboru interaktivních materiálů „Slovník těles“ [16]. Naší snahou bylo využít možnosti dynamického software, nahradit pasivní pozorování interaktivními prvky a postupně přidávat úkoly pro samostatné konstrukce žáků. Součástí výukového materiálu jsou interaktivní applety pro zobrazení těles, dokreslování sítí těles v prostředí GeoGebra a řešení testových otázek.

2. JEDNOTKA OBSAHU A OBJEMU

Teorie míry je třeba pěstovat systematicky od útlého věku. Tak jak dítě přirozeně vnímá, který objekt je větší, který je těžší, tak přirozené by měly být pojmy pro obsah i objem. Už od první třídy je třeba věnovat této problematice velkou pozornost. Čas strávený objevováním jednotky v rovině i prostoru se nám bohatě vrátí ve vyšších ročnících.

2.1. Obsahy rovinných útvarů

Nejprve s dětmi intuitivně porovnáváme velikosti obrazců, poté vymyslíme pravidlo pro rozhodování. Výborně se v této fázi osvědčily nejrůznější skládanky a tangramy. Díky Wallace–Bolyai–Gerwienově větě víme, že můžeme vhodným rozložením přeskládat jakékoliv rovinné obrazce stejného obsahu.



OBRÁZEK 1. Čtverec a trojúhelník lze rozdělit na shodné části; zdroj Wikipedia

Za nejčistší důkaz rovnosti obsahů bylo považováno již v antice rozdělení obou útvarů na shodné části. Eukleides (asi 325–260) věnuje přeměně rovinných útvarů první dvě knihy *Základů*. Takové přerovnání není ovšem možné u kružnice. V *Základech* je použita Eudoxova exhaustační metoda, proto je vztah mezi kružnicemi diskutován až ve dvanácté knize (Věta 3). I ve školské matematice je objev čísla π posunut do vyšších ročníků.

Porozumí-li žáci jednotce obsahu, můžeme začít počítat obsahy obdélníků, popř. odvodit vzorce. Pro trojúhelníky a rovnoběžníky postupujeme podobně. Nejprve dokreslujeme do čtvercové sítě a pomocí skládaček odvodíme vztah pro výpočet obsahu.

2.1. Objemy těles

Pokud je to možné, je vhodné použít osvědčené rovinné metody i v prostoru. Ovšem je jasné, že v prostoru je situace o poznání složitější. Není vůbec samozřejmé najít kritérium pro to, který objekt je větší než druhý, osvědčeným přístupem je přelévání vody z vhodně tvarovaných nádob. Spojité tekuté medium můžeme nahradit diskrétním, např. pískem a připravit děti na Demokritovy atomistické úvahy, jež vedly k prvnímu vztahu pro objem kužele, koule i válce. Demokritovy důkazy byly znovu objeveny v 17. století Bonaventurou Cavalierim (1598–1647). Bez Cavalieriho principu se ve školské matematice neobejdeme a je dobré úvahy o nekonečně malých rozdílech dvou shodných veličin předkládat žákům systematicky.

Podobně jako antičtí geometři dávali přednost rozkladu objektů na stejné části, i naši žáci tento důkaz považují za nejpřesvědčivější. Rozklad tělesa analogický rovinnému rozkladu ovšem nebude v obecném případě možný. Problém rozkladu těles stejných objemů na shodné části patří mezi 23 takzvaných Hilbertových problémů, jež předložil David Hilbert v roce 1900 ve své přednášce na 2. mezinárodním kongresu matematiků v Paříži. Tyto problémy představovaly největší tehdy nevyřešené matematické problémy. Hilbertův žák Max Dehn ještě téhož roku ukázal, že existují dva trojboké jehlany se shodnou podstavou a výškou, jež nelze rozřezat na konečný počet vzájemně shodných čtyřstěnů.

Vyřešení vztahu objemů vzájemně nerozložitelných těles patří mezi významné výsledky antické geometrie a bylo dokazováno dvěma různými metodami. Archimedes (287–212) přiznává prvenství v objevení vztahu objemu jehlanu, hranolu, kužele i válce Demokritovi [14].

Dle Demokrita z Abdér (460-370) se vše, co se nachází v reálném světě, skládá z malých, lidským okem neviditelných a dále již nedělitelných atomů. Jeho odvození vzorce pro jehlan muselo být velmi podobné přístupu, jenž v 17. století popsal Bonaventura Cavalieri. Metoda porovnávání nekonečně tenkých vrstev těles mělo velký vliv na jeho současníky i matematiky pozdějšího období (viz Cavalieriho princip, [15]).

Druhou metodou používající infinitesimální úvahy je Eudoxova exhaustivní metoda používaná v Eukleidových *Základech*, především v 11. a 12. knize. Vyslovena již je ovšem v desáté knize, kde je používána pro důkaz souměřitelnosti iracionálních čísel.

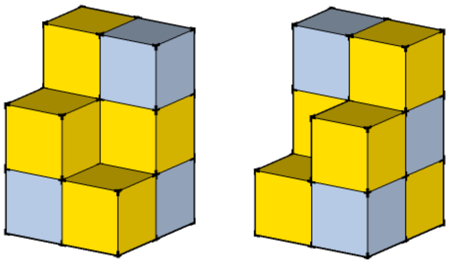
Věta 1. (Eukleides, *Základy*, Kniha 11). *Jsou-li dány dvě veličiny nestejné, když od větší odečteme část větší než polovina a od zbytku opět větší než polovina, a tak stále budeme činiti, zbude nějaká veličina, jež bude menší než daná veličina menší.*

O Eudoxovi z Knidu (408–355) je známo, že se stal členem Platonovy Akademie. Platon (427–347) byl nesmiřitelným odpůrcem Demokrita a zřejmě od něj vzešel podnět vyloučit z důkazů všechny úvahy o atomech. Tak v žádné větě Eukleidových Základů nenajdeme úvahy, jež by nám připomínali Cavalieriho princip, vztahy pro objem jehlanu, válce, kužele i koule jsou dokazovány pomocí Věty 1. Archimedes považoval rovněž Eudoxův přístup za nejčistší a naprosto dokonalý, sám důmyslným způsobem uplatňoval exhaustivní metodu pro určení objemů, ale ve svém spise *Metoda* přiznává, že ke vzorcům došel porovnáváním na páce a konstrukcí rovnoběžných řezů, tedy postupem blízkým Demokritovým úvahám. Tyto metody ovšem Archimedes nepovažoval za průkazné, a proto odvozené vztahy dokazoval Eudoxovým postupem. Ačkoliv můžeme žasnout nad Archimedovým důvtipem, je to postup mnohdy zdlouhavý, který se do školské matematiky nehodí. Pokud ale zvolíme správnou grafickou reprezentaci, vhodné pomůcky a historický text převyprávíme do jednodušší podoby, můžou i naši studenti prohlédnout do této stěžejní metody antické geometrie.

Je důležité seznámit již na střední škole žáky s úvahami o nekonečně malých objektech, při správném vedení mohou být někteří uchváceni stejným způsobem jako současníci Newtona a Leibnize.

3. OBJEM KRYCHLE A KVÁDRU

Analogie úloh nad čtverečkovaným papírem je užitečná pro zavedení krychlové jednotky a pro výpočet objemu krychle a kvádru. Myšlenkovým rozkladům by měly předcházet manipulace se skutečnými kostičkami, mezistupněm může být rozšířená realita nebo jen 3D reprezentace interaktivních appletů. Webovské stránky „Objem krychle“ a „Objem kvádru“ GeoGebra knihy Slovník těles [15] obsahují interaktivní applety s testovými otázkami pro stavby z kostiček a určení objemu.

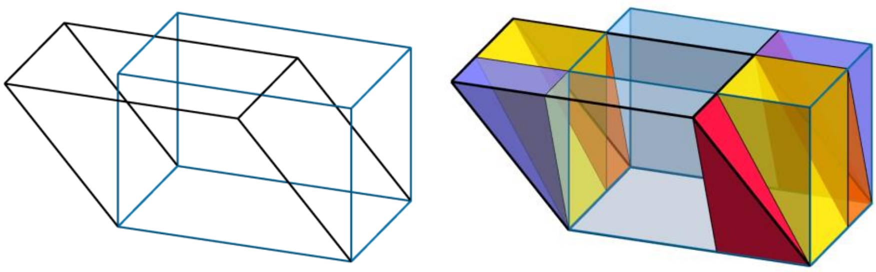


OBRÁZEK 2. Kolik kostiček musíte přemístit, aby byly stavby stejné.

4. OBJEM ROVNOBĚŽNOSTĚNU

Objem kosého hranolu, případně rovnoběžnostěnu je první příležitostí pro použití Cavalieriho principu, ale můžeme se bez něj dost dobře obejít a s vhodnými pomůckami demonstrovat přerovnání šikmého a kolmého hranolu.

Rovnoběžnostěn a kvádr o stejné podstavě a výšce mají stejný objem, podobně jako obdélník a rovnoběžník se stejnou stranou a výškou mají stejný obsah. Jak ale přesvědčit žáky, že tato analogie platí i v prostoru. Pokud mají obě tělesa shodné roviny dvou bočních stěn, je jednoduché přerovnat jedno ve druhé, přerovnání obdélníků a rovnoběžníku nám může být dobrým návodem. Pokud jsou stejné jen roviny společné podstavy a horních stěn, je situace obtížnější. V jedenácté knize Eukledových *Základů* jsou převedení dvou rovnoběžníku stejného objemu věnovány věty 29 a 30. Přiblížit ideu důkazu žákům je možné jen s vhodnými pomůckami. V kapitole „Kvádr“ GeoGebra knihy „Slovník těles“ je důkaz demonstrován v materiálu „Přerovnání rovnoběžnostěnu na kvádr“, nejpřesvědčivějším důkazem by ale pro děti bylo přerovnání reálných objektů.

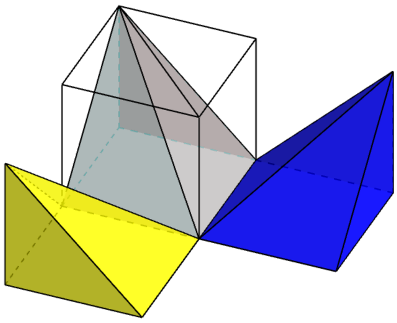


OBRÁZEK 3. Přerovnání rovnoběžnostěnu na kvádr stejného objemu.

Modrý kvádr a černý rovnoběžnostěn mají shodné podstavy a stejnou výšku, tedy musí mít stejný objem. Cílem je přerovnat černý rovnoběžnostěn na modrý kvádr, tedy rozřezat obě tělesa na stejné části. Ponecháme společný průnik obou těles, zbývající části rovnoběžnostěnu rozdělíme na dva trojboké hranoly (žlutý, modrý) a tři trojboké jehlany (modrý, oranžový a růžový). Vhodným posunutím zaplníme barevnými tělesy volná místa ve kvádru. Obrázek 3 ukazuje současně kvádr i rovnoběžnostěn, proto jsou přerovnané části zobrazeny dvakrát.

5. Objem jehlanu

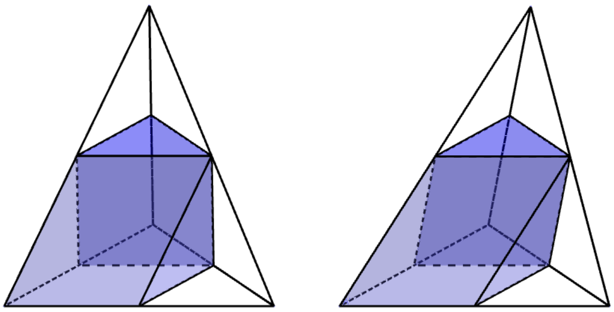
Odvodit s žáky objevitelským způsobem vzorec pro objem jehlanu je komplikovanější. Ve školské praxi se často spokojíme s vyslovením vzorce bez důkazu. Důvěřivější studenty by mohl přesvědčit rozklad krychle na tři shodné čtyřboké jehlany. Podstavy jehlanů jsou sousední stěny krychle, výškou je vždy hrana na podstavu kolmá. (viz Objem jehlanu, [16]).



Obrázek 4. Rozklad krychle na tři shodné jehlany

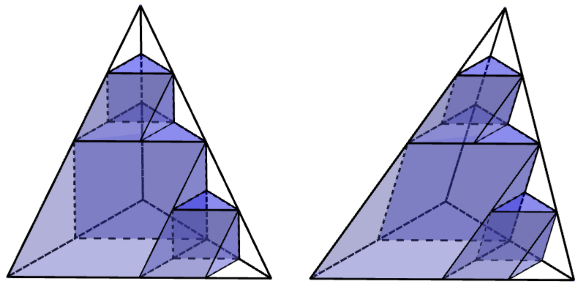
Ovšem u kvádru je to o něco složitější. Rozklad kvádru netvoří tři shodné jehlany, jsou to jen jehlany stejného objemu. Kvádr musíme rozložit na šest trojbokých jehlanů stejného objemu. Jak ale dokázat, že dva jehlany se shodnými základnami a výškami mají stejný objem? Standardně se odvoláváme na Cavalieriho princip, my nyní předveden Eudoxův důkaz, jak je použita ve dvanácté knize *Základů*.

Na obrázku 5 jsou dva trojboké jehlany se shodnými podstavami a stejnou výškou. Dokážeme rovnost jejich objemů tím, že bude od každého jehlanu odebírat části stejného objemu. Sestrojíme středy všech hran čtyřstěnů a uvažujeme rozklad každého z nich na dva navzájem shodné čtyřstěny a dva trojboké hranoly (modře). Odpovídají si hranoly mají shodnou podstavu a stejnou výšku, tedy mají stejný objem. Odebereme od každého čtyřstěnu modrou část, tedy vyčerpáme shodně jejich objemy částí větší než polovina.



Obrázek 5. Eudoxův rozklad jehlanu, první iterace

Z každého čtyřstěnu nám zbývají dva poloviční čtyřstěny a z každého z těchto čtyřstěnů odebereme opět podobné hranoly, viz obrázek 6. Takto budeme dále postupovat až nám zbyde část, jejíž objem je menší než libovolně malá veličina. Pokud předpokládáme, že jsou objemy porovnatelné a pro každé dva objemy vždy existuje jejich rozdíl, je dokázáno, že jsou si objemy rovny.

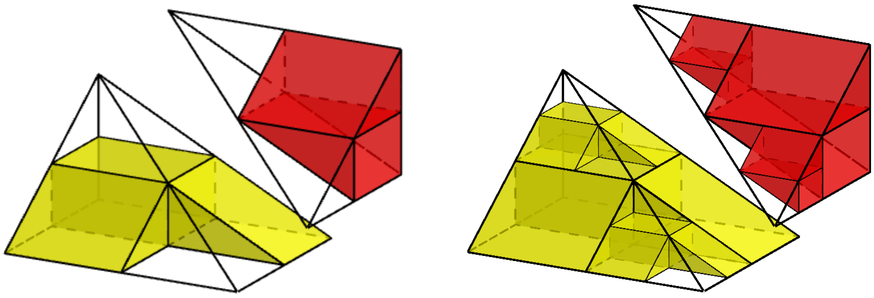


OBRÁZEK 6. Eudoxův rozklad jehlanu, druhá iterace

Takovou porovnatelnost objemů může názorně demonstrovat přelitím vody z jednoho čtyřstěnu do druhého. Zjistíme nejen, který ze čtyřstěnů má větší objem ale i o kolik se jejich objemy liší. Dlužno podotknout, že tato úvaha by Platona jistě nepotěšila.

Další možností je názorný čínský důkaz, jenž je popsán v knize Devět kapitol matematického umění. Tato kniha pochází z přibližně stejné doby jako Eukleidovy *Základy* a v čínské matematice hraje i podobnou úlohu. Téměř každý čínský matematik do 20. století se na tuto knihu odkazoval [3].

Významný čínský matematik Liu Huie (20–280) popisuje rozklad trojbokého hranolu na čtyřboký (žlutý) jehlan a trojboký(červený) jehlan – viz obrázek 7. Postupným doplňováním hranolů ukážeme, že objem žlutého jehlanu je dvakrát větší než objem červeného jehlanu. Odtud objem jehlanu je třetinou objemu hranolu se shodnou podstavou a výškou. Animace důkazu je zpracována v materiálu „Volume of Pyramid“ na serveru geogebra.org.



OBRÁZEK 7. Čínský důkaz objemu jehlanu; zdroj geogebra.org

ZÁVĚR

Při osvojování matematických vědomostí s podporou moderních technologií záleží více na způsobu jejich integrace než typu použitých prostředků. Hlavním faktorem, který ovlivňuje využívání technologií ve školské matematice, se stává učitel, zejména jeho didaktické dovednosti a ICT kompetence [8].

Nespornou výhodou integrace počítače do výuky je diferenciace výuky a možnost žáků řešit úlohy svým tempem. Velký rozdíl mezi studenty je ve asi největším problémem při organizaci výuky. Je třeba mít připraveny příklady pro nadané děti, ale na druhé straně jsou i žáci, kteří nepřijmou intuitivní ovládání GeoGebry a živelné experimentování s nástroji. Doporučujeme připravit si pro takové žáky vytištěný návod nebo applet s krokovanou konstrukcí, příp. instruktážní video. Úloha učitele jako koordinátora práce dětí je nezastupitelná, práce na počítači nemůže být zcela samostatná, důležitá je zpětná reflexe a diskuse o nalezených vlastnostech a řešeních úloh. Učitel musí žáky usměrňovat a podněcovat jejich do jisté míry samostatné objevování a zkoumání daných geometrických vlastností a problémů.

Podle našeho názoru má GeoGebra potenciál pokrýt témata celé školské matematiky. Doufáme, že se podaří spojit úsilí všech nadšenců tohoto software a vytvořit jeden prostor soustředící všechny kvalitní výukové materiály, jež mohou být učitelům podporou při tvořivé integraci GeoGebry do výuky matematiky.

LITERATURA

[1] M. Gunzel a kol.: *Integrace elektronického prostředí pro počítačem podporovanou výuku matematiky,* Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2012.

[2] M. Hejný, F. Kuřina: *Dítě, škola a matematika: Konstruktivistické přístupy k vyučování.* Praha: Portál, 2009. 232 s.

[3] J. Hudeček: *Matematika v devíti kapitolách. Sbírka početních metod z doby Han s komentářem Liu Huie z doby Wei a Li Chunfenga a dalších z doby Tang*. Překlad, vysvětlivky a úvod. Praha: Katedra didaktiky matematiky MFF UK, 2008. pp. 5–23

[4] K. Chino at al.: The effects of Spatial Geometry Currirulum with 3D DGS in Lower Secondary School Mathematics, *Proceedings PME* , Vol 31, part2, 2007. 137–144

[5] F. Kuřina: Geometrická představivost a vyučování stereometrii. *Matematika a fyzika ve škole*. 1987/1989, roč. 18, s. 201–212.

[6] F. Kuřina: Kritické jevy naší školské matematiky, *Matematika – fyzika – informatika*, Vol. 24, s. 241–251. Praha, 2015

[7] R. Plch: Využití systémů počítačové algebry ve výuce matematiky, *Univ. S. Boh. Dept. Of Mathematics Report Series*. 2005, Vol. 13,s.145–159 .

[8] P. Pech: Klasické nebo počítačové metody při řešení úloh v geometrii? *Univ. S. Boh. Dept. Of Mathematics Report Series*. 2005, Vol. 13,s.127–134.

[9] M. Rendl, N. Vondrová a kol.: *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Univerzita Karlova v Praze, Praha, 2013.

[10] J. Robová: Webové aplikace ve vyučování matematiky. In Lengyelfalusy, T.; Horváth, P. (ed.). 5. žilinská didaktická konferenci s medzinárodnou účasťou. Žilina, 2008. s. 47–55.

[11] J. Robová: *Integrace informačních a komunikačních technologií jako prostředek aktivního přístupu žáků k matematice*. PeDF Univerzity Karlovy v Praze. Praha, 2012

[12] P. Sak: Člověk a vzdělání v informační společnosti: vzdělávání a život v komputerizo-vaném světě. Praha: Portál, 2007.

[13] J. Vaníček: *Počítačové kognitivní technologie ve výuce geometrie*. PedF UK, Praha, 2009.

[14] P. Vopěnka, *Nová infinitní matematika: III. Reálná čísla a jejich diskretizace*, Karolinum, Praha, 2016.

[15] P. Vopěnka: *Eukleides, Základy, komentované Knihy XI–XII,* OPS, 2011.

[16] Š. Voráčová, S. Hronová: *Slovník těles*, GeoGebra kniha, soubor interaktivních materiálů, online https://www.geogebra.org/m/wfxx7zsx

ADRESA AUTORA: ÚSTAV APLIKOVANÉ MATEMATIKY, FAKULTA DOPRAVNÍ ČVUT , PRAHA
E-mail address: voracova@fd.cvut.cz