

Das Beschreiben typischer Eigenschaften von Exponentialfunktionen und Produkten/Summen aus Exponentialfunktionen und ganzrationalen Funktionen

Zunächst die Eigenschaften der natürlichen Exponentialfunktion

die Funktion $f(x) = e^x$ strebt für $x \rightarrow \infty$ gegen ∞

die Funktion $f(x) = e^x$ strebt für $x \rightarrow -\infty$ gegen 0

Kurz

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Das asymptotische Verhalten von Funktionen, die aus einer Summe aus einer Ganzrationalen Funktion und einer Exponentialfunktion bestehen.

Beispiel:

$$f(x) = 3x^2 - 5x - 2 + e^x$$

Für $x \rightarrow -\infty$ strebt e^x gegen 0, sodass sich der Graph von f asymptotisch der Funktion $g(x) = 3x^2 - 5x - 2$ annähert.

Für $x \rightarrow \infty$ wächst die Funktion e^x viele schneller als die ganzrationale Funktion, sodass dann $e^x \gg 3x^2 - 5x - 2$ gilt.

Das asymptotische Verhalten ändert sich, wenn man den Exponenten in der Exponentialfunktion mit einem anderen Vorzeichen versieht.

$$g(x) = 3x^2 - 5x - 2 \cdot e^{-x}$$

Für $x \rightarrow +\infty$ strebt e^{-x} gegen 0, sodass sich der Graph von f asymptotisch der Funktion $g(x) = 3x^2 - 5x - 2$ annähert.

Für $x \rightarrow -\infty$ wächst die Funktion e^{-x} viele schneller als die ganzrationale Funktion, sodass dann $e^{-x} \gg 3x^2 - 5x - 2$ gilt.

Das asymptotische Verhalten einer Funktion, die aus einer Summe aus einer ganzrationalen Funktion und einer Exponentialfunktion mit einer quadratischen Funktion im Exponenten besteht, hängt von dem Globalverhalten der Funktion im Exponenten ab.

$$h(x) = 5x^2 - 7x + 8 + e^{-3x^2+5x-7}$$

$$k(x) = -3x^2 + 5x - 7$$

Der Graph von k ist eine nach unten geöffnete Parabel.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} k(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = -\infty$$

Sowohl für $x \rightarrow \infty$ als auch für $x \rightarrow -\infty$ strebt e^{-3x^2+5x-7} gegen 0.

Die Funktion $h(x)$ nähert sich sowohl für $x \rightarrow \infty$ als auch für $x \rightarrow -\infty$ asymptotisch gegen die ganzrationale Funktion $y = 5x^2 - 7x + 8$