GUIÃO DE EXPLORAÇÃO

10º Ano - Matemática A

1. Considera, num referencial ortonormado $Oxyz$, a superfície esférica definida pela condição

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 = 16}$$

1.1. Indica o centro e o raio da superfície esférica.

1.2. Escreve uma equação que defina cada um dos planos tangentes à superfície esférica e paralelos aos planos coordenados.

Para isso, explora o recurso Geogebra no qual o centro da superfície esférica tem coordenadas (a, b, c) e raio r. Seleciona o centro e o raio desta superfície esférica, com a ajuda dos seletores para os parâmetros a, b, c e r .

Começa por investigar quais são os planos tangentes à superfície esférica e que são paralelos ao plano xoy. Assim, na caixa para mostrar/esconder objetos seleciona a opção “Planos paralelos a xoy”. Com o seletor “d" varia este parâmetro, observa o que acontece e procura responder à questão.

Nota: Procede de modo semelhante para os planos paralelos yoz e xoz. **Ativa apenas uma caixa de cada vez**.

1.3. Identifica o lugar geométrico dos pontos definidos pela interseção do plano de equação $x = 0$ com a superfície esférica.

Nota: Rodando o referencial pode ajudar na visualização.

1.4. Considera os planos de equação $z = k, k \in \mathbb{R}$. Descobre os valores de k de modo que a interseção da superfície esférica com esses planos seja:

a) o conjunto vazio;

b) um ponto.

Explora de forma semelhante o recurso Geogebra para responderes às seguintes questões. Para cada esfera/superfície esférica seleciona o centro e o raio com a ajuda dos seletores $\boldsymbol{a, b, c}$ e $\boldsymbol{r}$.

2. Considera agora, num referencial ortonormado $Oxyz$, as esferas E_1 e E_2 definidas pelas condições:

$$E_1 : x^2 + (y-4)^2 + (z+1)^2 \leq 25 \quad \text{e} \quad E_2 : (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 \leq 9.$$

2.1. Investiga quais equações dos planos tangentes à esfera:

a) E_1 e paralelos a xoy.

b) E_2 e paralelos a xoz.

2.2. Descreve, por palavras tuas, como se podem obter as equações dos planos tangentes a uma superfície esférica ou esfera e paralelos aos planos coordenados.

2.3. Caracteriza o lugar geométrico dos pontos definidos pela interseção da esfera E_1 com o plano de equação $y = 8$.

2.4. Considera os planos de equação $x = k, k \in \mathbb{R}$. Descobre para que valores de k a interseção da esfera E_2 com esses planos é um círculo.

2.5. Comenta a seguinte afirmação: “A interseção da esfera E_1 com o plano $y = 1$ é uma circunferência.”

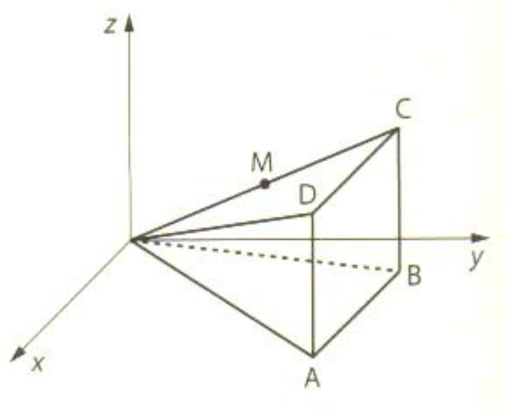
3. Num referencial o.n. do espaço considera os planos definidos pelas equações $z = 1$ e $z = 7$.
Qual das equações seguintes define uma superfície esférica tangente aos dois planos?
Explica porque rejeitaste as outras três opções. Apresenta uma justificação por cada opção rejeitada.

(A) $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 36$ **(C)** $x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 36$
(B) $x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 9$ **(D)** $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 9$

4. Considera, fixado um referencial ortonormado do espaço, a esfera E definida pela condição
$$x^2 + (y-2)^2 + z^2 \leq 9.$$
Qual das equações seguintes **não define** um plano que divide a esfera E em dois sólidos com o mesmo volume?

(A) $y = 2$ **(B)** $x = 0$ **(C)** $z = 0$ **(D)** $y = 0$

5. Na figura está representada uma pirâmide quadrangular regular cuja base pertence ao plano de equação $y = 8$ e o vértice V coincide com a origem do referencial.
Sabe-se ainda que:
- a área da base é 49.
- M é o ponto médio de $[VC]$.



5.1. Determina as coordenadas dos vértices da base.
Sugestão: Para visualizares, convenientemente, a pirâmide explora o recurso Geogebra e seleciona apenas a opção "Mostrar pirâmide". Podes esconder a superfície esférica considerando $r = 0$ no seletor "r".
5.2. Define analiticamente a linha descrita pelo ponto A quando a pirâmide dá uma volta completa em torno de Oy.
5.3. Identifica e calcula a área da secção produzida na pirâmide por um plano paralelo ao plano ABC e que passa por M.