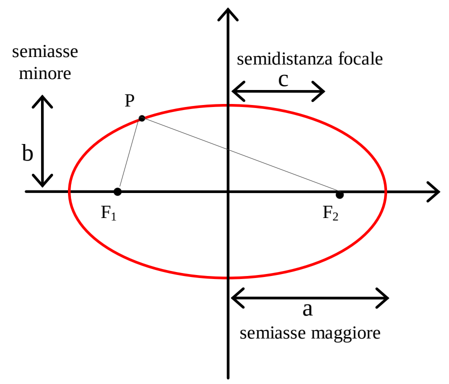
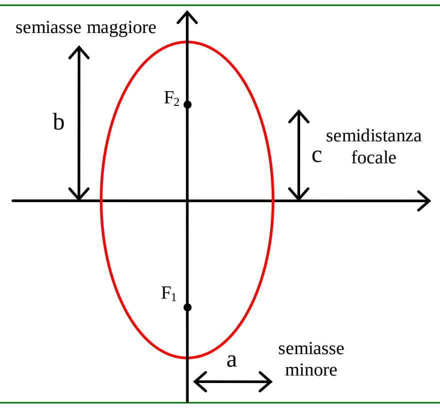
Ellisse

definizione

L'ellisse è il luogo geometrico dei punti del piano tali che la somma delle distanze da due punti fissi F_1 e F_2 detti fuochi è costante, cioè: $\boldsymbol{PF_1 + PF_2 = costante}$





ellisse di centro l'origine e fuochi sull'asse delle x	ellisse di centro l'origine e fuochi sull'asse delle y
$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$	$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2b$

equazione canonica

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$a > b$	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$a < b$

lunghezza asse maggiore, lunghezza asse minore e distanza focale

$2a$	$2b$	$2c$	$2b$	$2a$	$2c$

relazione tra i parametri a, b, c

$a^2 = b^2 + c^2$	$b^2 = a^2 - c^2$ $c^2 = a^2 - b^2$	$b^2 = a^2 + c^2$	$a^2 = b^2 - c^2$ $c^2 = b^2 - a^2$

coordinate dei fuochi

$F_1(-c;\ 0)$	$F_2(c;\ 0)$	$F_1(0; -c)$	$F_2(0\,; c)$

eccentricità

$e = \dfrac{c}{a}$	$0 < e < 1$	$e = \dfrac{c}{b}$	$0 < e < 1$

se $\boldsymbol{a = b}$ l'ellisse degenera in una circonferenza di centro l'origine e raggio a di equazione $\boldsymbol{x^2 + y^2 = a^2}$

ricerca dell'equazione di una ellisse

equazione dell'ellisse noti i fuochi ed il semiasse maggiore

$PF_1 + PF_2 = 2a$	• si applica la definizione di ellisse ricordando che la costante è uguale a $2a$
$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$	• si calcolano le due distanze PF_1 e PF_2
$(x+c)^2 + y^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$	• si isola il primo radicale e si elevano al quadrato entrambi i membri
$\left[a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}\right]^2 = (a^2 - cx)^2$	• si sviluppano i calcoli isolando il radicale rimasto e di nuovo si elevano al quadrato entrambi i membri
$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$	• si sviluppano i calcoli e si ottiene l'equazione dell'ellisse in forma non canonica

Ellisse

equazione dell'ellisse passante per due punti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$	
$\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$	• nell'equazione dell'ellisse in forma canonica si sostituiscono $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a^2}} = \boldsymbol{\alpha}$ e $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{b^2}} = \boldsymbol{\beta}$
$\alpha {x_1}^2 + \beta {y_1}^2 = 1$ *passaggio per A* $\alpha {x_2}^2 + \beta {y_2}^2 = 1$ *passaggio per B*	• si sostituiscono uno alla volta le coordinate dei punti nell'equazione precedente
$\begin{cases} \alpha {x_1}^2 + \beta {y_1}^2 = 1 \\ \alpha {x_2}^2 + \beta {y_2}^2 = 1 \end{cases}$	• si risolve il sistema di primo grado nelle incognite α e β
$\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$	• si sostituiscono i valori ottenuti nell'equazione iniziale ottenendo così l'equazione richiesta

in generale

per trovare l'equazione di una ellisse è necessario:

- avere due condizioni (scelte tra: fuoco, semiassi, passaggio per un punto, eccentricità, retta tangente)
- trasformare ogni condizione in una equazione
- ottenere il sistema delle due equazioni nelle incognite a^2 e b^2
- risolvere il sistema e trovare i valori di a^2 e b^2
- sostituire i valori ottenuti nell'equazione dell'ellisse, ottenendo l'equazione cercata

nota che nella ricerca dell'equazione dell'ellisse:

- le incognite sono a^2 e b^2 **e non** a e b
- conviene imporre le condizioni date a partire dall'equazione dell'ellisse in forma non canonica $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

ricerca delle equazioni delle rette tangenti all'ellisse

equazioni delle rette tangenti condotte da un punto $P_0(x_0, y_0)$ **esterno** all'ellisse	
$y - y_0 = m(x - x_0)$	• si scrive l'equazione del fascio di rette proprio di centro $P_0(x_0, y_0)$
$y = y_0 + m(x - x_0)$	• si ricava la y dell'equazione del fascio
$b^2x^2 + a^2[y_0 + m(x - x_0)]^2 = a^2b^2$	• si sostituisce la y nell'equazione dell'ellisse in forma non canonica $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$
$y - y_0 = m_1(x - x_0)$ $y - y_0 = m_2(x - x_0)$	• si sviluppano i calcoli e si ordina l'equazione rispetto alla x • si ricava il Δ e lo si impone uguale a 0 (condizione di tangenza tra retta ed ellisse) • si risolve l'equazione di secondo grado nell'incognita m ricavando i valori m_1 ed m_2 • si sostituiscono m_1 ed m_2 nell'equazione del fascio ottenendo le equazioni delle rette tangenti

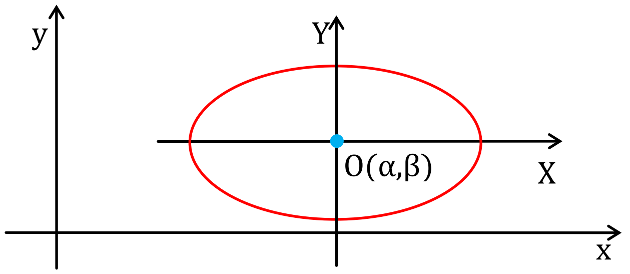
equazione della retta tangente nel punto $P_0(x_0, y_0)$ **dell'**ellisse: <u>formula di sdoppiamento</u>	
$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$	• si scrive l'equazione dell'ellisse in forma non canonica • si pone $\boldsymbol{x^2 = x_0 \cdot x}$ e $\boldsymbol{y^2 = y_0 \cdot y}$
$b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$	• si sostituiscono le incognite sdoppiate nella equazione dell'ellisse • sviluppando i calcoli si ottiene l'equazione della retta tangente nel punto $P_0(x_0, y_0)$

Ellisse

equazione delle rette tangenti di coefficiente angolare **m** assegnato	
$y = \boldsymbol{m}x + q$	• si scrive l'equazione del fascio di rette improprio con **m** assegnato
$b^2x^2 + a^2[mx+q]^2 = a^2b^2$	• si sostituisce la y nell'equazione dell'ellisse in forma non canonica $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$
$y = mx + q_1$ $y = mx + q_2$	• si sviluppano i calcoli e si ordina l'equazione rispetto alla x • si ricava il Δ e lo si impone uguale a 0 (condizione di tangenza tra retta ed ellisse) • si risolve l'equazione di secondo grado nell'incognita q ricavando i valori di q_1 e q_2 • si sostituiscono q_1 e q_2 nell'equazione iniziale del fascio ottenendo le equazioni delle rette tangenti
in alcuni problemi $\boldsymbol{m}$ si ricava nota la retta parallela o perpendicolare alla retta tangente	

ellisse traslata

l'ellisse si dice traslata se gli assi X e Y del suo sistema di riferimento sono paralleli agli assi cartesiani x e y



$\boldsymbol{O(\alpha,\beta)}$	coordinate del centro dell'ellisse
$\dfrac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha})^2}{\boldsymbol{a}^2} + \dfrac{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\beta})^2}{\boldsymbol{b}^2} = \mathbf{1}$	equazione dell'ellisse riferita al sistema XOY

ricerca dell'equazione dell'ellisse traslata note le coordinate del centro $O(\alpha,\beta)$	
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	• data l'equazione dell'ellisse in forma canonica
$\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$	• si sostituisce a $\boldsymbol{x \to x - \alpha}$ e a $\boldsymbol{y \to y - \beta}$ (traslazione di centro $O(\alpha,\beta)$) • si sviluppano i calcoli e si ottiene l'equazione dell'ellisse traslata

area e lunghezza di una ellisse

misura dell'area	
$\boldsymbol{\mathcal{A} = \pi ab}$	osserva che se $a = b$ l'ellisse diventa una circonferenza e la formula si riduce a quella dell'area del cerchio $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \boldsymbol{\pi r^2}$

misura della lunghezza	
$\boldsymbol{l = \pi\left[3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)}\right]}$	osserva che la lunghezza si calcola solo come sviluppo in serie di un integrale curvilineo. Un buon valore approssimato è dato dalla formula qui riportata del matematico indiano Ramanujan