Ejercicios Unidad 15.1 - Campos vectoriales

En los ejercicios 21 a 30, hallar el campo vectorial conservativo para la función potencial, encontrando su gradiente

21) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$

$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\,i + f_y(x,y)\,j$

$= 2x + 4y$

$\nabla f = 2x\,i + 4y\,j$

23) $g(x,y) = 5x^2 + 3xy + y^2$

$\nabla g(x,y) = g_x(x,y)\,i + g_y(x,y)\,j$

$= (10x + 3y)\,i + (3x + 2y)\,j$

En los ejercicios 31 a 34, verificar que el campo vectorial es conservativo.

31) $\vec{F}(x,y) = \underbrace{xy^2}_{M}\,i + \underbrace{x^2y}_{N}\,j$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy$

$\therefore \vec{F}(x,y)$ es conservativo,,

$\frac{\partial N}{\partial x} = 2xy$

En los ejercicios 39 a 48, determinar si el campo vectorial es conservativo. Si lo es, calcular una función potencial para él.

41) $\vec{F}(x,y) = \underbrace{2xy}_{M}\, i + \underbrace{x^2}_{N}\, J$

Probar si el campo es conservativo

$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x \quad ; \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2x \quad \checkmark$

$\therefore$ el campo vectorial es conservativo

Ahora calcular función potencial.

$f = \int f_x\, dx = \int 2xy\, dx = 2y \int x\, dx = 2y \cdot \frac{x^2}{2} = x^2 y + C(y)$

$f = \int f_y\, dy = \int x^2\, dy = x^2 \int dy = x^2 y + C(x)$

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = x^2 y + K$

43) $\vec{F}(x,y) = \underbrace{15y^3}_{M}\, i - \underbrace{5xy^2}_{N}\, J$

Determinar si el Campo es Conservativo

$\dfrac{\partial N}{\partial x} = 5y^2 \quad ; \quad \dfrac{\partial M}{\partial y} = 45y^2$

no es Conservativo el Campo $\partial N/\partial x \neq \partial M/\partial y$

En los ejercicios 49 a 52, calcular el rotacional del Campo vectorial en el Punto dado.

49) $\vec{F}(x,y,z) = xyz\,i + xyz\,J + xyz\,K \qquad (2,1,3)$

$\vec{F}(x,y,z) = M i + N J + P K$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right) i - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) J + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) K$$

$= (xz - xy)\,i + (yz - xy)\,J + (yz - xz)\,K$

$= ((2)(3) - (2)(1))\,i - ((1)(3) - (2)(1))\,J + ((1)(3) - (2)(3))\,K$

$= (6 - 2)\,i - (3 - 2)\,J + (3 - 6)\,K$

$= 4i - 1J - 3K$

$= 4i - J - 3K$ //

En los ejercicios 57 a 62, determinar si el Campo vectorial F es Conservativo. si lo es, Calcular una función Potencial Para él.

$$57)\ \vec{F}(x,y,z) = \overbrace{xy^2z^2}^{M}\, i + \overbrace{x^2yz^2}^{N}\, J + \overbrace{x^2y^2z}^{P}\, K$$

Determinar si el Campo es vectorial

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}\ ;\ \frac{\partial P}{\partial y} = 2x^2yz;\ \frac{\partial N}{\partial z} = 2x^2yz \checkmark$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2xy^2z\ ;\ \frac{\partial M}{\partial z} = 2xy^2z \checkmark$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2xyz^2\ ;\ \frac{\partial M}{\partial y} = 2xyz^2 \checkmark$$

$\therefore$ El Campo vectorial es Conservativo

Buscar función Potencial

$$f = \int f_x\,dx = \int xy^2z^2\,dx = y^2z^2\int x\,dx = y^2z^2 \cdot \frac{x^2}{2} + C(y,z)$$

$$f = \int f_y\,dy = x^2z^2\int y\,dy = x^2z^2\frac{y^2}{2} + C(x,z)$$

$$f = \int f_z\,dz = x^2y^2\int z\,dz = x^2y^2\frac{z^2}{2} + C(x,y)$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} x^2 y^2 z^2 + K$$

En los ejercicios 63 a 66, calcular la divergencia del campo vectorial $\vec{F}$

63) $\vec{F}(x,y) = x^2 i + 2y^2 j$

$$\operatorname{div} \vec{F}(x,y) = \nabla \cdot \vec{F}(x,y) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial N}{\partial y} = 4y \qquad \mp \qquad 2x + 4y$$

$$\operatorname{div} \vec{f}(x,y) = 2x + 4y$$