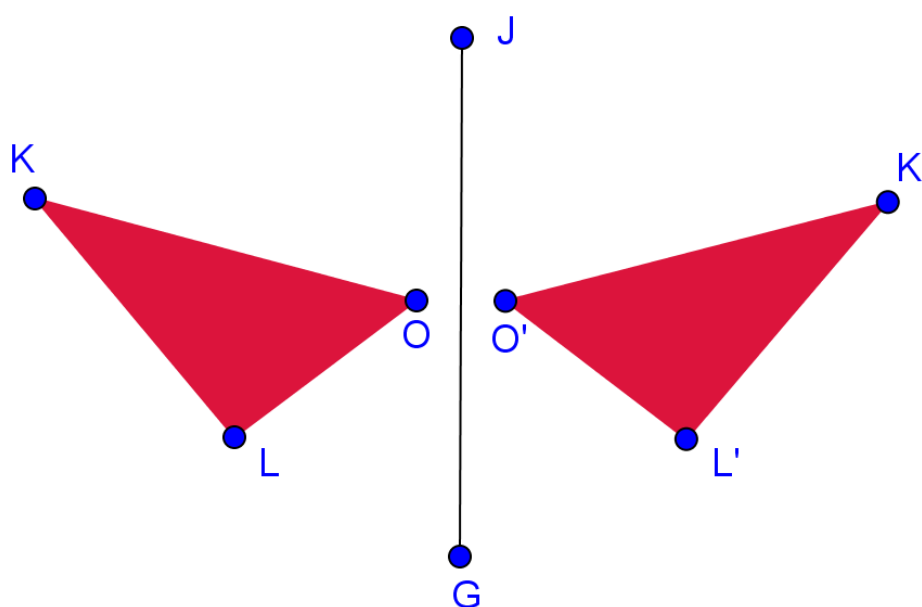


MATEMATICĂ ȘI ȘTIINȚE

clasele VI-VIII



Simetria axială

Manualul Profesorului
Indicații metodologice
de utilizare
Partea a II-a

IV. MODULUL 2: APLICAȚII INTERDISCIPLINARE. REFLEXIA ÎN OGLINZILE PLANE

Materia	Matematică și fizică
Modulul 2	Aplicații interdisciplinare. Reflexia în oglinzile plane
Clasa	a VIII-a
Scurtă descriere a materialului	Acest modul are ca obiectiv explicarea fenomenului reflexiei în oglinzi și a modului de formare a imaginilor prin reflexie. Modulul pune la dispoziție trei aplicații realizate cu <i>GeoGebra</i> .
Cunoștințe științifice / teoretice necesare la începutul lecției	Pentru parcurgerea lecțiilor elevul trebuie să cunoască: <ul style="list-style-type: none"> - modelul razei de lumină în optica geometrică - cazurile de congruență ale triunghiurilor - utilizarea coordonatelor carteziene - calculul ariei unui triunghi
Cuvinte-cheie	Oglinzi plane, Reflexie, Imagine, Optică geometrică, Simetrie axială, Reflexii multiple
Componentele modulului	Determinarea poziției imaginii unui obiect într-o oglindă plană pe baza legilor reflexiei . Rezolvare de probleme Formarea imaginilor multiple în două oglinzi plane perpendiculare Numărul de imagini formate în două oglinzi care formează un unghi de forma $180^\circ/n$. Caleidoscop virtual Generator de figuri cu mai multe axe de simetrie. Determinarea unghiurilor formate de axele de simetrie.
Timp total	50 min

IV.1. Aplicația 4. Formarea imaginilor în oglinzile plane

Obiectiv	Utilizarea cunoștințelor geometrice pentru înțelegerea unor fenomene optice
Durata în timp pentru utilizarea la clasă	30 min

Descrierea conținutului	În descrierea de mai jos
Reprezentare vizuală a lecției la care se referă aplicația (capturi de ecran)	În descrierea de mai jos
Instrucțiuni de utilizare	În descrierea de mai jos
Tipul de itemi de învățare	Text, Imagini, Simulare, Rezolvare de probleme

Descrierea aplicației ”Formarea imaginilor în oglinzile plane”

Această aplicație are rolul de a explica corelația dintre pozițiile imaginilor formate în una sau două oglinzi plane și noțiunea de simetrie axială. Primul cadru al aplicației prezintă o fotografie a unei oglinzi așezate perpendicular pe planul mesei. Sunt vizibile patru triunghiuri de hârtie colorată, așezate pe masă, precum și imaginile lor în oglindă (Figura 38). Dacă este posibil, recomandăm ca elevilor să li se ofere materialele necesare pentru a realiza ei înșiși configurații asemănătoare. Elevii trebuie să observe că imaginile formate în oglinzi sunt simetricele obiectelor reale față de dreapta de intersecție dintre planul oglinzii și planul mesei.

Următorul cadru (Figura 39) oferă o reprezentare schematizată a situației surprinse în fotografia anterioară. Elevii sunt solicitați să caute o explicație a faptului că imaginea fiecărui punct în oglindă este simetricul acelui punct față de oglindă.

Formarea imaginilor în oglinzile plane

În fotografia alăturată observăm patru triunghiuri diferite colorate și imaginile lor într-o oglindă a cărei suprafață este perpendiculară pe planul în care sunt așezate triunghiurile.

Ce observi? Ce poți spune despre imaginile formate?

Pentru a avansa, deplasează spre dreapta cursorul.

1

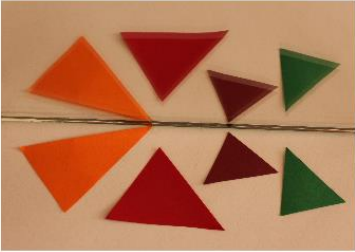


Figura 1. Imagini într-o oglindă plană

Simetria axială

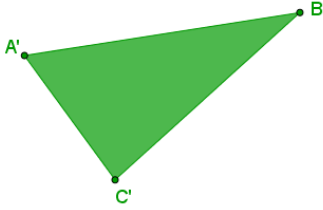

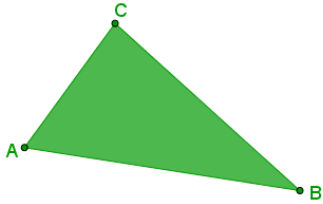
<p>În fotografia anterioară ai putut observa că imaginea fiecărui triunghi este simetricul acelui triunghi față de dreapta de intersecție dintre planul oglinzii și planul triunghiului.</p> <p>Situația este prezentată schematic în imaginea alăturată.</p>	
<p>Cum explici faptul că imaginea unui punct într-o oglindă plană este simetricul acelui punct față de suprafața oglinzii?</p> <p>Pentru a avansa, deplasează spre dreapta cursorul.</p> <p>2</p> 	

Figura 2. Imaginea în oglindă și simetria axială


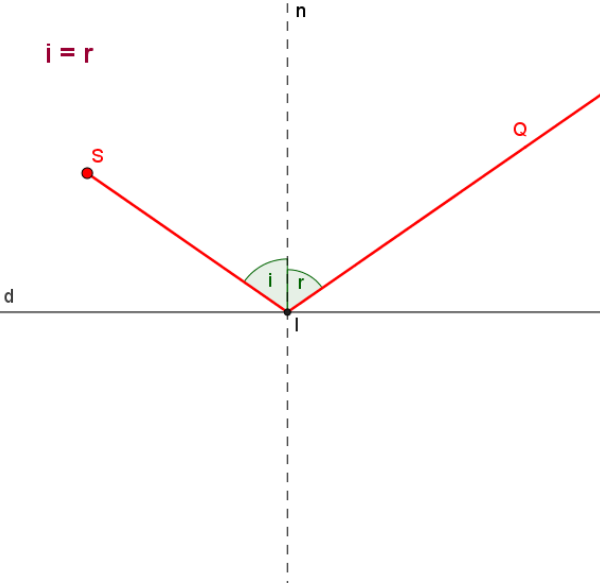
<p>Explicația fenomenului are la bază legea reflexiei: o rază de lumină care intersectează suprafața unei oglinzi este reflectată astfel încât să formeze cu normala la suprafața oglinzii un unghi egal cu cel format de raza inițială cu normala.</p> <p>d - suprafața oglinzii S - sursa de lumină SI - raza incidentă I - punct de incidență IQ - raza reflectată n - normala (perpendiculara) la suprafața oglinzii i - unghiul de incidență r - unghiul de reflexie</p> <p>3</p> 	
--	---

Figura 3. Modelul razei de lumină reflectate

Explicația va fi descoperită cu ajutorul elevilor, pe baza legilor reflexiei. Mai întâi se definesc noțiunile necesare: normala la suprafața oglinzii, rază incidentă, rază reflectată, unghi de incidență, unghi de reflexie (Figura 40). Se precizează că un observator percepe imaginea obiectului în oglindă pe prelungirea razelor reflectate care ajung la ochiul său. Elevii vor fi solicitați să indice traseul unei alte raze de lumină, care se reflectă în oglindă într-un punct E (Figurile 41-42). Imaginea obiectului S se va forma în punctul de intersecție a prelungirilor celor două raze reflectate în punctele I și respectiv E (Figura 43). Elevii pot demonstra că punctul de intersecție este chiar simetricul lui S față de oglinda reprezentată prin dreapta d .

Simetria axială

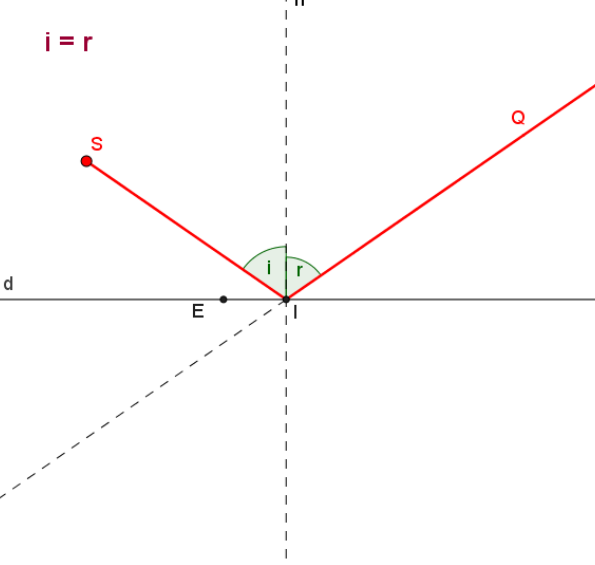
<p>Dacă ochiul unui observator este plasat în punctul Q, acesta va percepe imaginea obiectului ca fiind situată undeva pe semidreapta opusă razei reflectate, IQ.</p> <p>Imaginează-ți o altă rază de lumină care pornește de la sursa S și se reflectă în oglindă în punctul E.</p> <p><input type="checkbox"/> Afișează raza care se reflectă în oglindă în punctul E</p> <p style="text-align: center;">4</p>	
--	--

Figura 4. Formarea imaginii

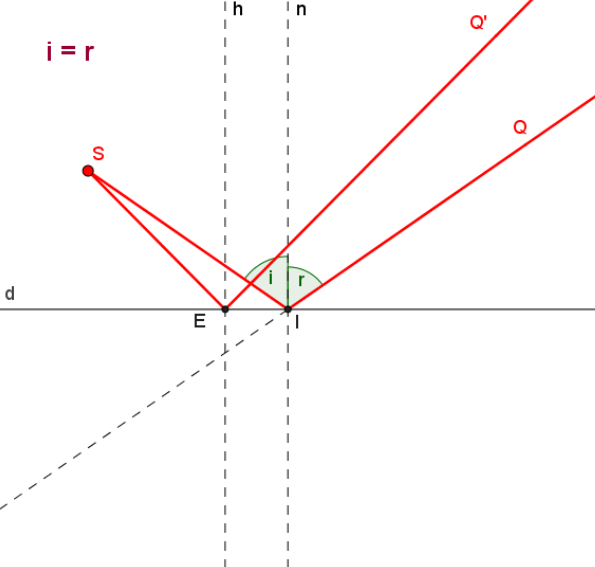
<p>Dacă ochiul unui observator este plasat în punctul Q, acesta va percepe imaginea obiectului ca fiind situată undeva pe semidreapta opusă razei reflectate, IQ.</p> <p>Imaginează-ți o altă rază de lumină care pornește de la sursa S și se reflectă în oglindă în punctul E.</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Afișează raza care se reflectă în oglindă în punctul E</p> <p>Ce reprezintă punctul de intersecție dintre prelungirile celor două raze reflectate, IQ și EQ'?</p> <p style="text-align: center;">4</p>	
--	---

Figura 5. Două raze reflectate

Pentru a demonstra că punctul de intersecție a prelungirilor a două raze reflectate este simetricul obiectului S față de dreapta d , elevul va arăta, folosind legea reflexiei, că triunghiurile ISE și $IS'E$ sunt congruente (Figura 43). Aplicația poate oferi indicații de rezolvare, după bifarea casetei corespunzătoare (Figura 44).


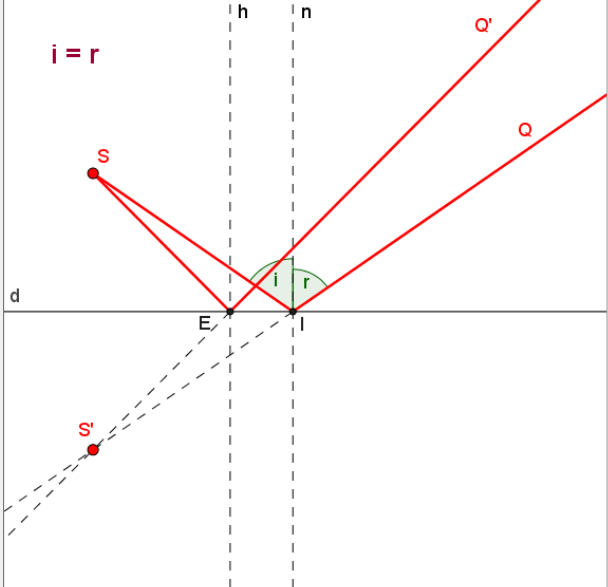
<p>Dacă notăm cu S' punctul de intersecție al prelungirilor razelor reflectate, IQ și EQ', demonstrăm că triunghiurile SEI și $S'EI$ sunt congruente, apoi că punctul S' este chiar simetricul lui S față de dreapta d.</p> <p><input type="checkbox"/> Indicație</p> <p>Observatorul va vedea imaginea obiectului S în oglinda d la intersecția prelungirilor razelor reflectate, adică în punctul S', simetricul lui S față de d.</p> <p style="text-align: center;">5</p> 	
---	--

Figura 6. Poziționarea imaginii. Problematizare


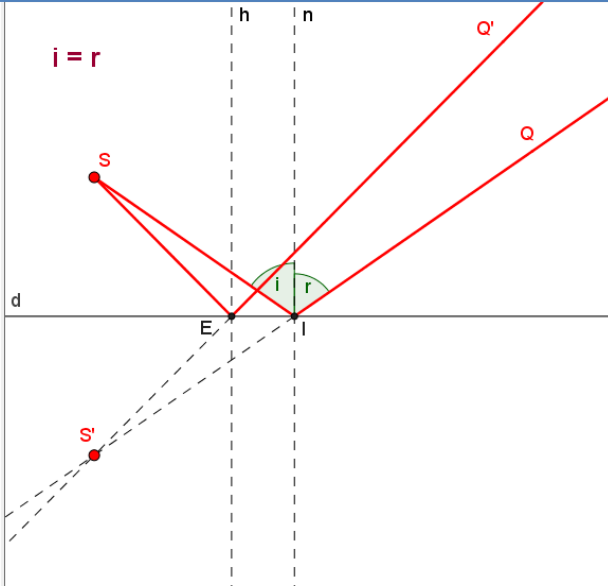
<p>Dacă notăm cu S' punctul de intersecție al prelungirilor razelor reflectate, IQ și EQ', demonstrăm că triunghiurile SEI și $S'EI$ sunt congruente, apoi că punctul S' este chiar simetricul lui S față de dreapta d.</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Indicație</p> <p>Aplică legea reflexiei, teorema unghiurilor opuse la vârf și cazul de congruență ULU.</p> <p>Pentru a arăta apoi că S' este simetricul lui S față de dreapta d, observă că IE este bisectoare în triunghiul isoscel ISS', prin urmare dreapta d va fi mediatoarea segmentului (SS').</p> <p>Observatorul va vedea imaginea obiectului S în oglinda d la intersecția prelungirilor razelor reflectate, adică în punctul S', simetricul lui S față de d.</p> <p style="text-align: center;">5</p> 	
---	---

Figura 7. Poziționarea imaginii. Indicații de rezolvare

În continuare, va fi studiat fenomenul reflexiilor multiple în două oglinzi perpendiculare. Acest moment al lecției începe cu prezentarea unei noi fotografii, care ilustrează sistemul optic format din două oglinzi plane, perpendiculare pe planul mesei și perpendiculare în același timp una pe cealaltă (Figura 45). Între cele oglinzi, pe masă, sunt așezate două triunghiuri din hârtie colorată. Se observă că pentru fiecare triunghi s-au format câte trei imagini. Recomandăm ca elevilor să li se ofere sisteme optice asemănătoare, pentru a realiza experimentul ei înșiși.

În figura 46 este prezentată schematizat situația din fotografia anterioară. Se face distincția între imaginile primare și secundare. Imaginile *primare* se formează direct, în fiecare din cele două oglinzi, așa cum s-a explicat anterior. Pentru a înțelege modul de

formare a imaginii secundare, va fi urmărit traseul unei raze de lumină care se reflectă în ambele oglinzi (Figura 47). Imaginea *secundară*, notată cu P'' , se află pe prelungirea razei reflectate a doua oară, în punctul J . Astfel punctul P'' va fi imaginea imaginii primare P' în oglinda OB . Aplicația reprezintă două raze dublu reflectate (Figura 48). Elevii pot demonstra că imaginea secundară P'' , care se află la intersecția prelungirilor razelor reflectate, este chiar simetricul punctului P' față de dreapta OB .

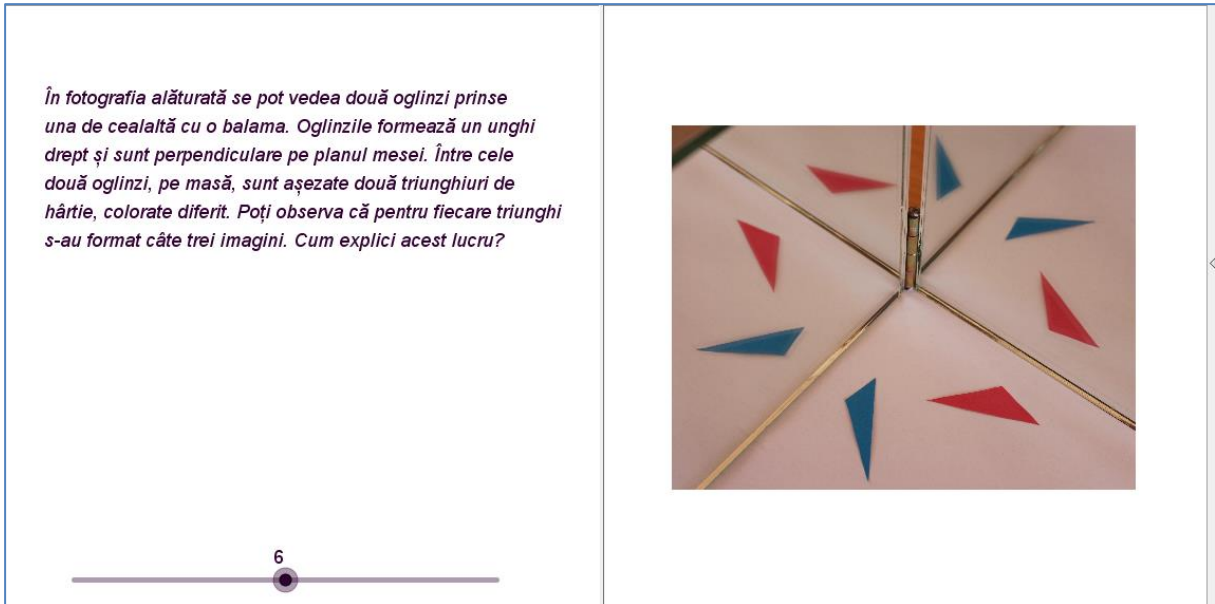


Figura 8. Imagini în două oglinzi perpendiculare

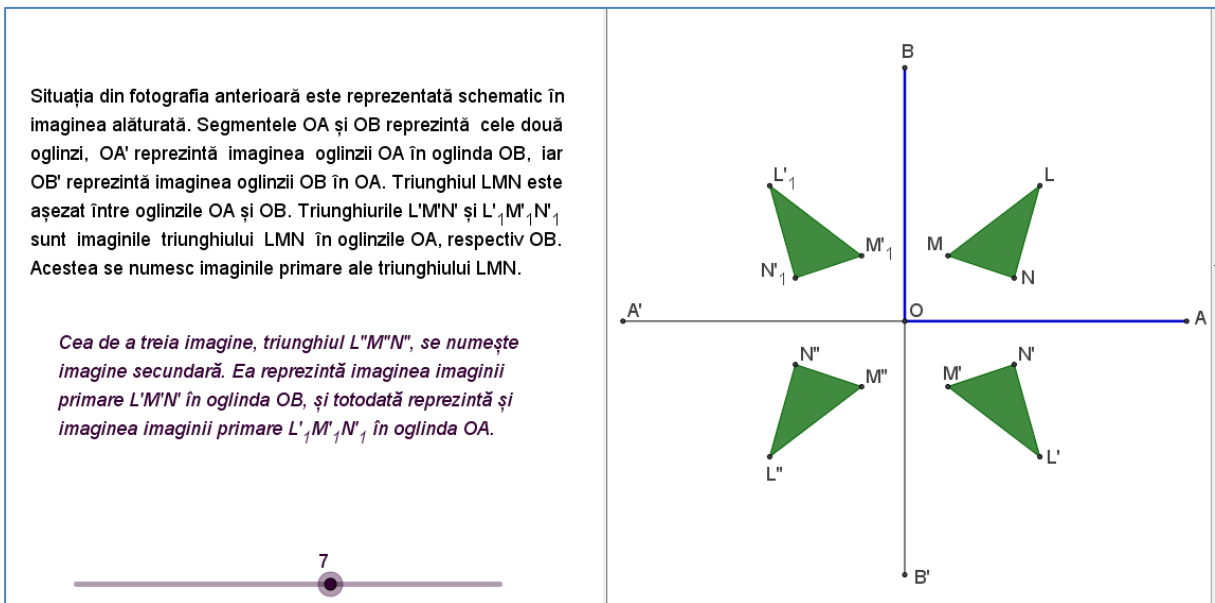


Figura 9. Modelul imaginilor multiple

Simetria axială

<p>Pentru a înțelege fenomenul reflexiilor multiple, să urmărim traseul unei raze care se reflectă în cele două oglinzi perpendiculare. O rază de lumină care pornește din P și se reflectă în punctul I pe oglinda OA, se reflectă a doua oară în punctul J pe oglinda OB. Dacă ochiul unui observator este în Q, acesta va vedea imaginea secundară a obiectului P ca fiind plasată undeva pe prelungirea razei JQ.</p> <p>Care este traseul unei raze incidente la oglinda OA în punctul E?</p> <p><input type="checkbox"/> Arată traseul razei incidente în E</p> <p>Observatorul va vedea imaginea secundară a obiectului P în punctul P'' de intersecție a prelungirilor razelor reflectate, JQ și KI.</p> <p>Demonstrează că punctul P'' este simetricul punctului P față de dreapta OB?</p> <div style="text-align: center; margin-top: 10px;"> 8 </div>	
--	--

Figura 10. Formarea imaginilor multiple

<p>Pentru a înțelege fenomenul reflexiilor multiple, să urmărim traseul unei raze care se reflectă în cele două oglinzi perpendiculare. O rază de lumină care pornește din P și se reflectă în punctul I pe oglinda OA, se reflectă a doua oară în punctul J pe oglinda OB. Dacă ochiul unui observator este în Q, acesta va vedea imaginea secundară a obiectului P ca fiind plasată undeva pe prelungirea razei JQ.</p> <p>Care este traseul unei raze incidente la oglinda OA în punctul E?</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Arată traseul razei incidente în E</p> <p>Observatorul va vedea imaginea secundară a obiectului P în punctul P'' de intersecție a prelungirilor razelor reflectate, JQ și KI.</p> <p>Demonstrează că punctul P'' este simetricul punctului P față de dreapta OB?</p> <div style="text-align: center; margin-top: 10px;"> 8 </div>	
---	--

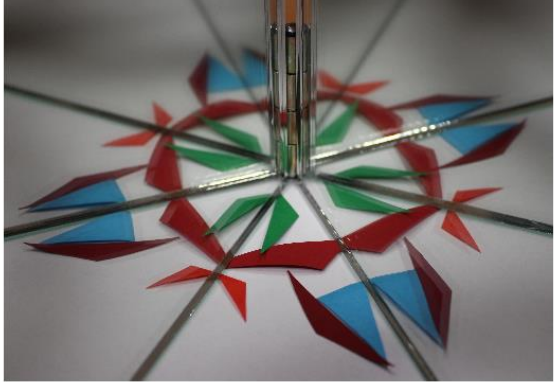
Figura 11. Localizarea imaginii secundare

Urmează momentul de evaluare: aplicația prezintă două fotografii în care cele două oglinzi sunt perpendiculare pe planul mesei, dar nu mai sunt perpendiculare una pe cealaltă, ci formează un unghi ascuțit (Figurile 49, 51). Observând numărul de imagini formate, elevii pot determina valoarea unghiului format de cele două oglinzi. Aplicația afișează răspunsurile corecte, după bifarea casetelor corespunzătoare (Figurile 50, 52). Rezolvarea acestor probleme oferă prilejul de a discuta noțiunea de unghi plan al unui diedru, precum și noțiunea de perpendicularitate a planelor.

Simetria axială

Ce unghi formează cele două oglinzi cu balama în fotografia alăturată? Câte imagini se formează prin reflexii succesive în cele două oglinzi?

Răspuns



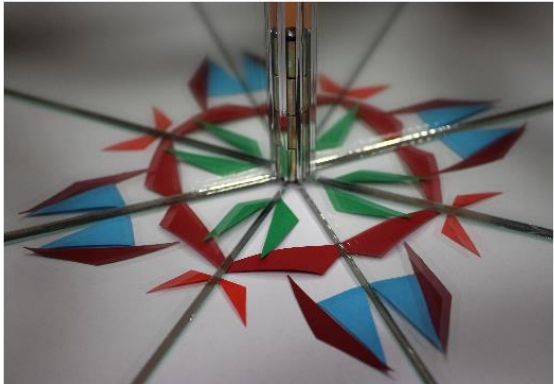
9

Figura 12. Imagini multiple. Problema 1

Ce unghi formează cele două oglinzi cu balama în fotografia alăturată? Câte imagini se formează prin reflexii succesive în cele două oglinzi?

Răspuns

Cele două oglinzi formează un unghi de 45° .
Fiecare piesă are câte 7 imagini.



9

Figura 13. Problema 1. Răspuns

Simetria axială

Ce unghi formează cele două oglinzi cu balama în fotografia alăturată? Câte imagini se formează prin reflexii succesive în cele două oglinzi?

Răspuns

10




Figura 14. Imagini multiple. Problema 2

Ce unghi formează cele două oglinzi cu balama în fotografia alăturată? Câte imagini se formează prin reflexii succesive în cele două oglinzi?

Răspuns

Oglinzile formează un unghi de 36° .
Fiecare piesă are câte 9 imagini.

10




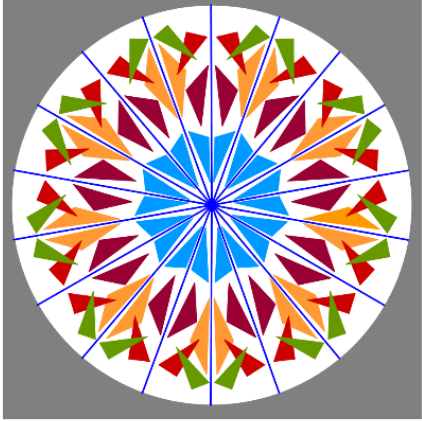
Figura 15. Problema 2. Răspuns

În cadrul final al aplicației, este propusă o problemă asemănătoare, legată de o imagine generată cu ajutorul unui caleidoscop virtual (Figurile 53-54). Acesta va putea fi accesat de elevi prin deschiderea următoarei aplicații a modulului.

În panoul alăturat poți vedea una dintre imaginile generate cu ajutorul caleidoscopului virtual, simulat prin următorul applet. Poți obține și tu imagini multicolore, cu numere diferite de axe de simetrie, cu ajutorul applet-ului.

*Ce unghi formează oglinzile caleidoscopului din reprezentarea alăturată?
Câte imagini s-au format pentru fiecare triunghi?*

Răspuns



11


Figura 16. Caleidoscop virtual. Problema 3

În panoul alăturat poți vedea una dintre imaginile generate cu ajutorul caleidoscopului virtual, simulat prin următorul applet. Poți obține și tu imagini multicolore, cu numere diferite de axe de simetrie, cu ajutorul applet-ului.

*Ce unghi formează oglinzile caleidoscopului din reprezentarea alăturată?
Câte imagini s-au format pentru fiecare triunghi?*

Răspuns

Oglinzile formează un unghi de 20° .
Fiecare piesă are câte 17 imagini.



11

Figura 17. Problema 3. Răspuns

IV.2. Aplicația 5. Caleidoscop virtual

Obiectiv	Recunoașterea axelor de simetrie ale unei figuri geometrice
Durata în timp pentru utilizarea la clasă	10 min

Descrierea conținutului	În descrierea de mai jos
Reprezentare vizuală a lecției la care se referă aplicației (capturi de ecran)	În descrierea de mai jos
Instrucțiuni de utilizare	În descrierea de mai jos
Tipul de itemi de învățare	Text, Imagini, Simulare, Rezolvare de probleme

Descrierea aplicației "Caleidoscop virtual"

În primul cadru al aplicației se descrie modul de manevrare a triunghiurilor care vor genera imaginile caleidoscopice. Fiecare triunghi are două puncte de control: unul poate fi folosit pentru a roti triunghiul, iar celălalt pentru a-l translați (Figura 55).

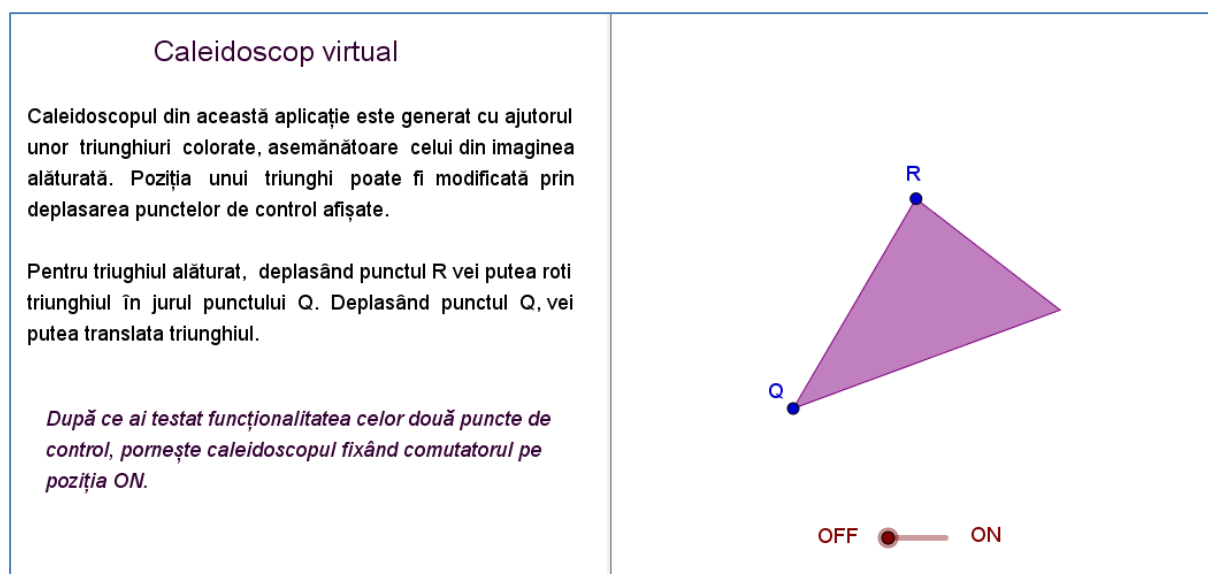
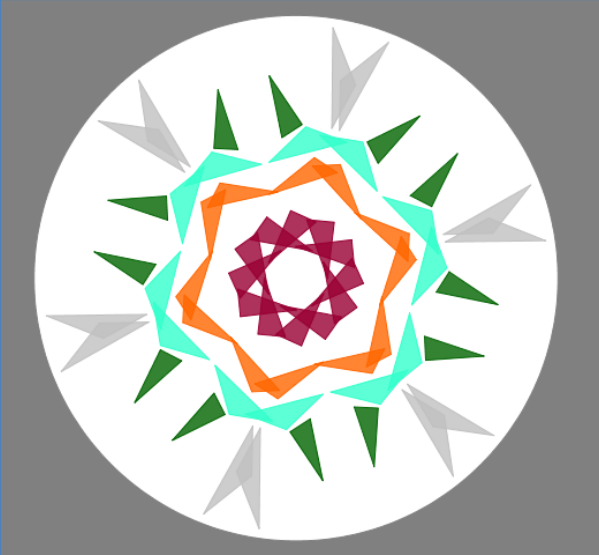


Figura 18. Caleidoscop virtual. Introducere

După plasarea comutatorului pe poziția ON este afișată o figură geometrică multicoloră cu mai multe axe de simetrie (Figura 56). Elevii sunt invitați să descopere axele de simetrie ale figurii și să determine numărul acestora. După bifarea casetei corespunzătoare, aplicația afișează axele de simetrie, iar răspunsul elevilor va fi verificat. Dacă elevii bifează a doua casetă de validare, aplicația afișează punctele de control ale triunghiurilor. Cu ajutorul acestora, triunghiurile pot fi deplasate astfel încât să se formeze noi figuri (Figura 57). Cea de a doua întrebare propusă elevilor se referă la determinarea unghiului format de două axe de simetrie consecutive. Elevii vor observa că acesta poate fi aflat prin împărțirea unghiului alungit în m părți egale, unde m reprezintă numărul axelor de simetrie.

Simetria axială

Cu ajutorul dispozitivului format din două oglinzi și a unor triunghiuri din hârtie colorată, elevii pot obține imagini asemănătoare. (Figura 58). Recomandăm utilizarea în paralel a unui dispozitiv real și a caleidoscopului virtual, pentru observarea analogiilor.



Câte axe de simetrie are figura alăturată?

Ce măsură are unghiul dintre două axe consecutive de simetrie?

Cu ajutorul cursorului m poți modifica numărul axelor de simetrie.

Dacă bifezi caseta pentru afișarea punctelor de control, vei putea schimba poziția celor cinci triunghiuri colorate.

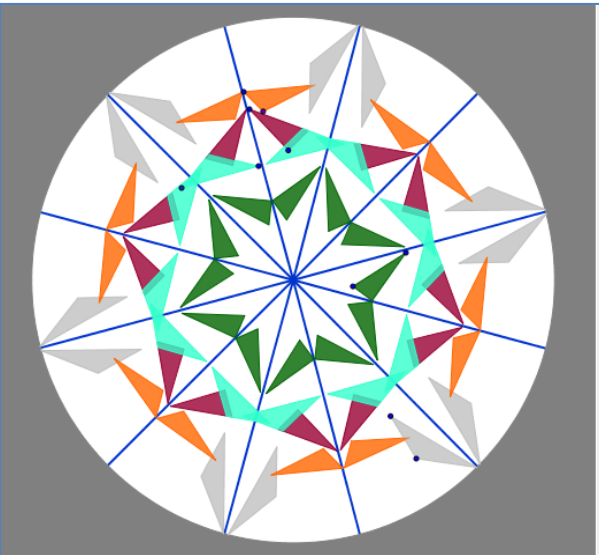
$$u = \frac{180^\circ}{m}$$

$m = 6$

Arată axele de simetrie Arată punctele de control

OFF —● ON

Figura 19. Caleidoscop virtual. Problematizare



Câte axe de simetrie are figura alăturată?

Ce măsură are unghiul dintre două axe consecutive de simetrie?

Cu ajutorul cursorului m poți modifica numărul axelor de simetrie.

Dacă bifezi caseta pentru afișarea punctelor de control, vei putea schimba poziția celor cinci triunghiuri colorate.

$$u = \frac{180^\circ}{m}$$

$m = 6$

Arată axele de simetrie Arată punctele de control

OFF —● ON

Figura 20. Caleidoscop virtual. Interactivitate

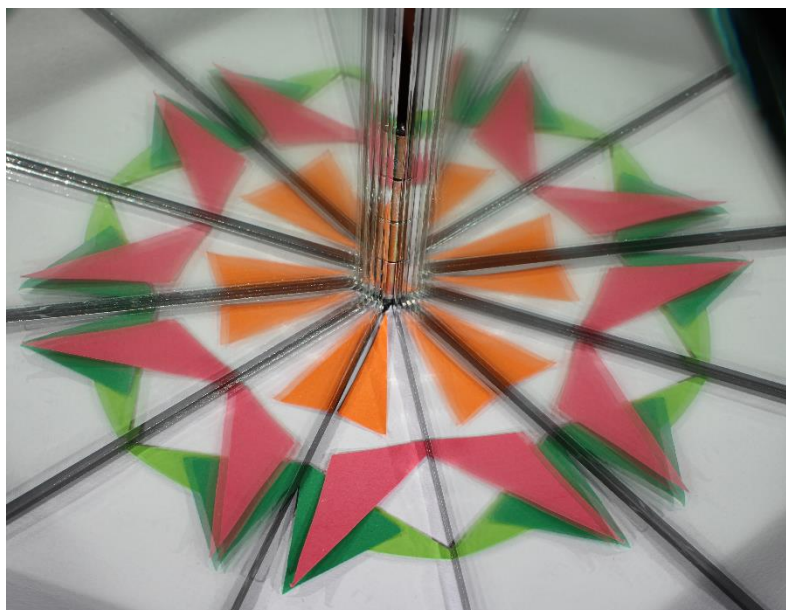


Figura 21. Imagine obținută prin reflexii succesive în două oglinzi plane

IV.3. Aplicația 6. Figuri cu mai multe axe de simetrie

Obiectiv	Determinarea numărului de axe de simetrie ale unei figuri geometrice
Durata în timp pentru utilizarea la clasă	10 min
Descrierea conținutului	În descrierea de mai jos
Reprezentare vizuală a lecției la care se referă aplicația (capturi de ecran)	În descrierea de mai jos
Instrucțiuni de utilizare	În descrierea de mai jos
Tipul de itemi de învățare	Text, Imagini, Simulare, Animație, Rezolvare de probleme

Descrierea aplicației ”Figuri cu mai multe axe de simetrie”

Această aplicație generează aleatoriu figuri geometrice cu n axe de simetrie ($n \geq 2$). Pot fi afișate succesiv figuri diferite, cu același număr de axe de simetrie, prin acționarea butonului *Play* din colțul stânga-jos al panoului (Figura 59). Pentru a modifica numărul axelor de simetrie se poziționează comutatorul roșu al aplicației pe poziția 1. Vor fi afișate două cursoare: unul dintre ele permite modificarea numărului axelor de simetrie, iar celălalt permite modificarea numărului vârfurilor liniei poligonale ce va fi reflectată în axele de simetrie (Figura 60). Numărul axelor de simetrie nu este afișat,

Simetria axială

elevii fiind solicitați să îl determine. Elevii vor introduce numărul găsit în caseta de preluare de date a aplicației. După acționarea butonului "Verificare", aplicația oferă feedback (Figurile 61-62).

Generator de figuri geometrice cu mai multe axe de simetrie

În panoul alăturat este afișată o figură geometrică cu 5 axe de simetrie. Poți porni/opri animația care afișează și alte figuri cu 5 axe de simetrie, generate aleatoriu, cu ajutorul butonului "Play/Pause" din colțul din partea stângă-jos a panoului.

Pentru a genera figuri cu un alt număr de axe de simetrie, schimbă comutatorul de mai jos pe poziția 1.

Cu ajutorul cursorului care va fi afișat, vei putea modifica numărul axelor de simetrie.

0

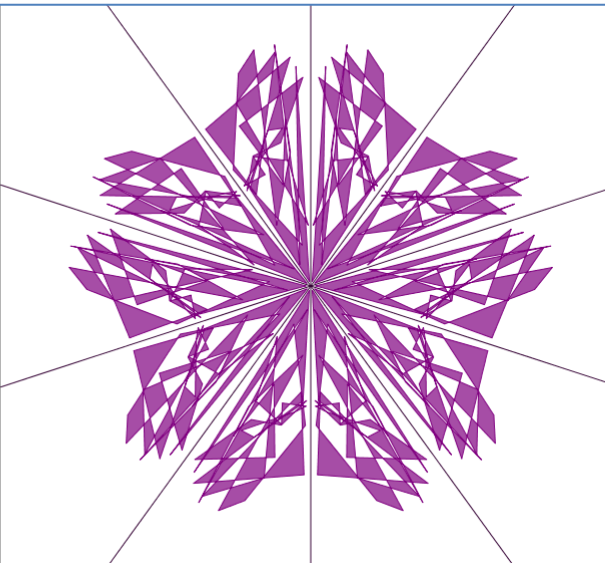


Figura 22. Generator de figuri cu axe de simetrie

Câte axe de simetrie are figura geometrică din panoul alăturat?

Introdu răspunsul în caseta de mai jos, apoi acționează butonul "Verificare".

0

Numărul de vârfuri

21

Modifică numărul axelor de simetrie cu ajutorul cursorului:

1

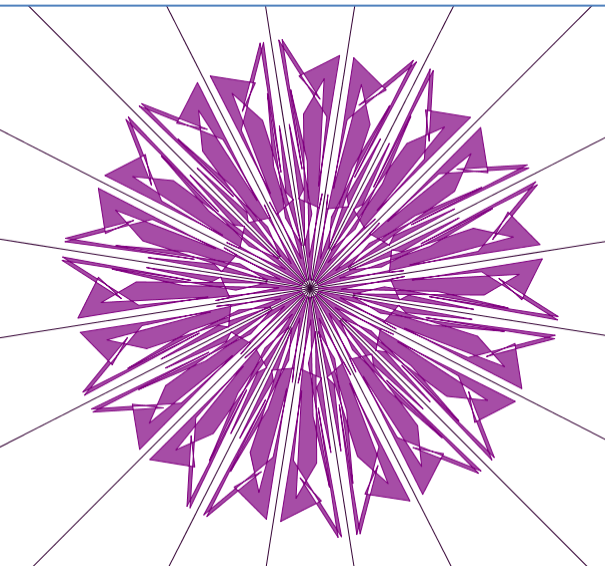


Figura 23. Modificarea numărului de axe de simetrie

Simetria axială

Câte axe de simetrie are figura geometrică din panoul alăturat?

Introdu răspunsul în caseta de mai jos, apoi acționează butonul "Verificare".

11 Verificare

Numărul de vârfuri Mai încearcă!

21

Modifică numărul axelor de simetrie cu ajutorul cursorului:

1

Figura 24. Utilizarea casetei pentru introducerea răspunsului

Câte axe de simetrie are figura geometrică din panoul alăturat?

Introdu răspunsul în caseta de mai jos, apoi acționează butonul "Verificare".

10 Verificare

Numărul de vârfuri Răspuns corect!

21

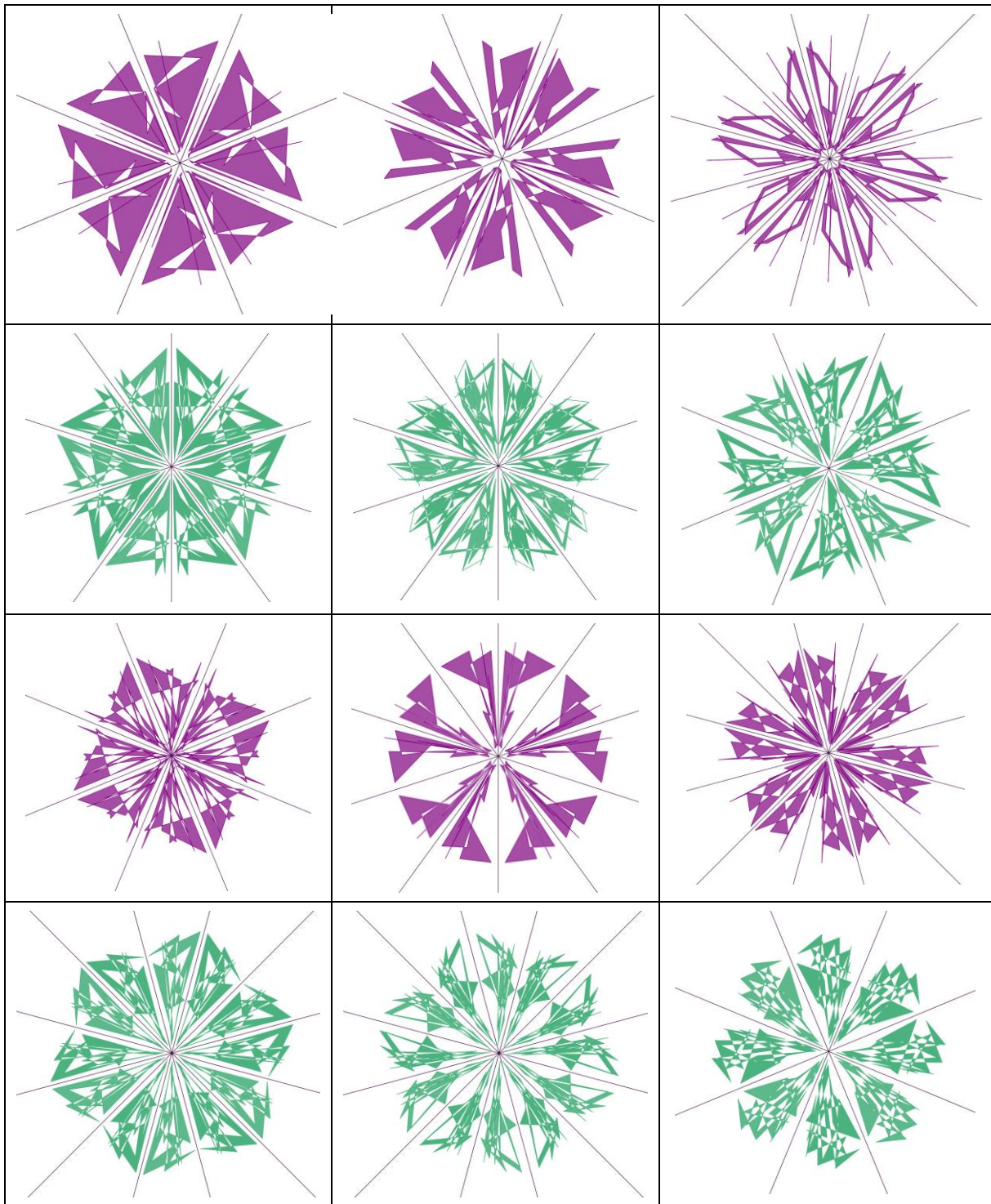
Modifică numărul axelor de simetrie cu ajutorul cursorului:

1

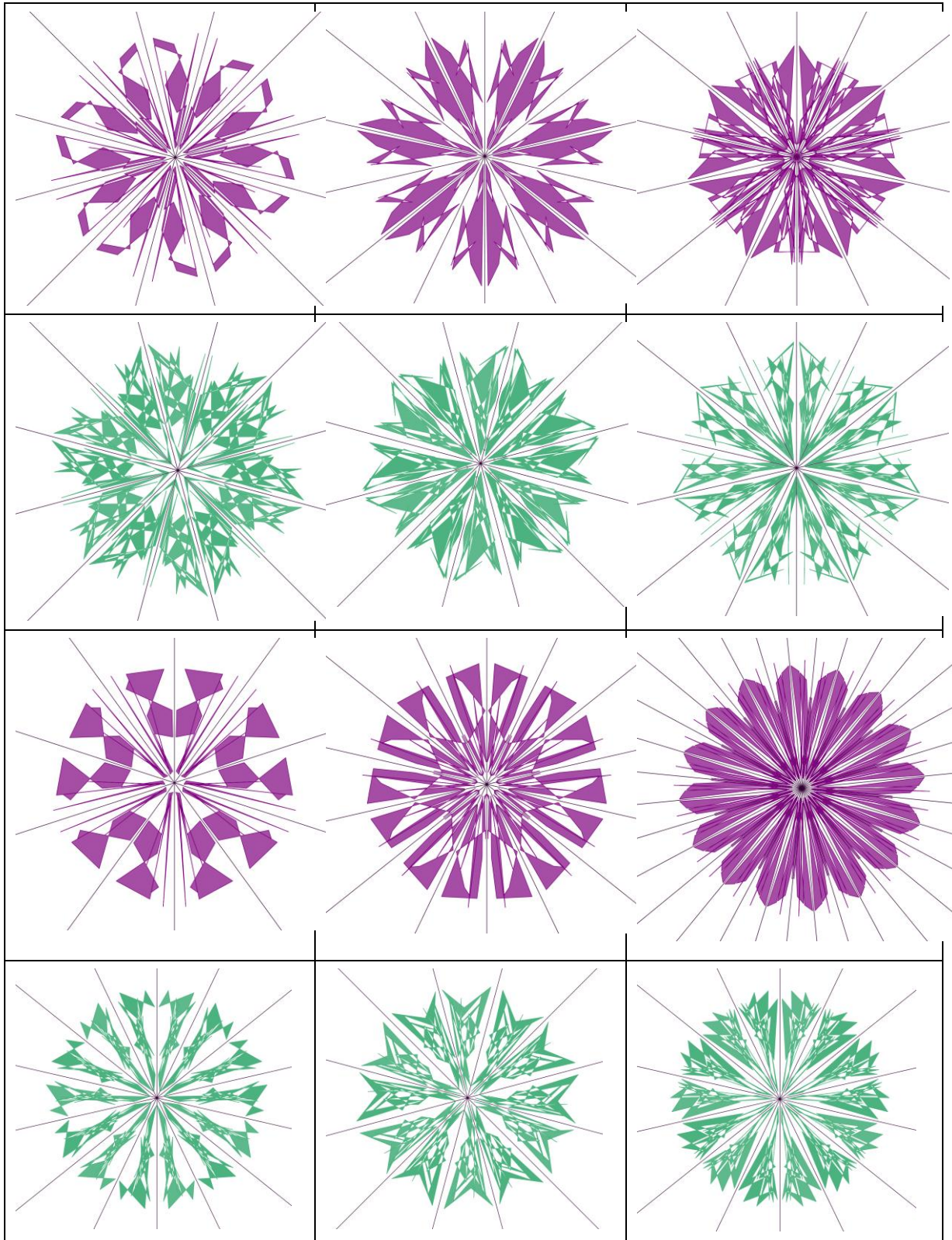
Figura 25. Feedback-ul aplicației la introducerea răspunsului corect

La fiecare deplasare a cursoroarelui se generează alte imagini. Tabelul de mai jos cuprinde câteva imagini obținute cu ajutorul aplicației. Elevii pot selecta imaginile preferate, pentru a realiza afișe sau alte lucrări.

Simetria axială



Simetria axială



Simetria axială

