Rette in $\mathbb{R}^3$

Generalizziamo a $\mathbb{R}^3$ il concetto di vettore introdotto in $\mathbb{R}^2$.

Un **vettore** di $\mathbb{R}^3$ è un segmento orientato con punto iniziale l'origine. Di conseguenza il vettore $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ può essere identificato con il punto P.

La lunghezza, o **norma** di un vettore è la lunghezza del corrispondente segmento:

$$\| \mathbf{v} \| = \| P \| = \overline{OP} = \sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}$$

Le operazioni basilari tra vettori sono:

- **Prodotto per uno scalare**. Dato un vettore $\mathbf{v} = P = (x_P, y_P, z_P)$ e uno scalare (numero) t, il prodotto $t\,\mathbf{v} = tP = (tx_P, ty_P, tz_P)$ è un vettore con la stessa direzione di $\mathbf{v}$, norma $|t| \cdot \| \mathbf{v} \|$ e verso concorde a $\mathbf{v}$ se $t > 0$ o opposto a $\mathbf{v}$ se $t < 0$.
- **Somma di vettori**. Dati due vettori $\mathbf{v} = A = (x_A, y_A, z_A)$ e $\mathbf{w} = B = (x_B, y_B, z_B)$, la somma $\mathbf{v}+\mathbf{w} = A+B$ è il vettore che dal punto di vista algebrico è ottenuto come somma delle componenti $\mathbf{v} + \mathbf{w} = A + B = (x_A + x_B,\ y_A + y_B,\ z_A + z_B)$ e dal punto di vista geometrico si ottiene con la regola del parallelogramma.
  Di conseguenza si ottiene la differenza di vettori: dati due vettori, o punti, A e B, il vettore differenza è $C = B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$. Ad esso corrisponde anche il segmento orientato **AB** che ha stessa direzione, lunghezza e verso di C, ma punto iniziale A e punto finale B.

Dati due vettori, o punti, A e B si chiama **combinazione lineare** di A e B ogni vettore del tipo $t\,A + s\,B$ con $s, t \in \mathbb{R}$.

Generalizzando quanto visto in $\mathbb{R}^2$, si può osservare che, dato un punto, o vettore, P, i punti del tipo tP, con $t \in \mathbb{R}$, descrivono la retta r passante per P e per l'origine, ovvero una retta per l'origine di direzione $\mathbf{v_r} = P$, mentre i punti del tipo $P_0 + tP$, con $t \in \mathbb{R}$, descrivono la retta r passante per P_0 e di direzione $\mathbf{v_r} = P$.

Di consegnueza l'**equazione parametrica** della retta di $\mathbb{R}^3$ passante per il punto $P_o(x_0, y_0, z_o)$ e direzione $\mathbf{v_r} = P(x_P, y_P, z_P)$ è

$$r:\ (z, y, z) = P_0 + tP \qquad \text{ovvero} \qquad r: \begin{cases} x = x_o + x_P t \\ y = y_0 + y_P t \\ z = z_0 + z_P t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Per esempio la retta r passante per l'origine e direzione $\mathbf{v_r} = (1, 2, 3)$ ha equazione parametrica:

$$r:\ (z, y, z) = (0, 0, 0) + t(1, 2, 3) \qquad \text{ovvero} \qquad r: \begin{cases} x = 0 + 1t \\ y = 0 + 2t \\ z = 0 + 3t \end{cases} \qquad r: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Per ogni valore di t otteniamo un punto di r e ogni punto di r può essere ottenuto per un opportuno valore di t.

Invece la retta r' passante per $P_0(2, -1, 5)$ e direzione $v_r = (1, 2, 3)$ ha equazione parametrica:

$$r':\ (z, y, z) = (2, -1, 5) + t(1, 2, 3) \qquad \text{ovvero} \qquad r': \begin{cases} x = 2 + 1t \\ y = -1 + 2t \\ z = 5 + 3t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

È evidente che due rette r e r' sono parallele se e solo se hanno vettori direzione $\mathbf{v_r}$ e $\mathbf{v_{r'}}$ con la stessa direzione, cioè uno multiplo dell'altro: $\mathbf{v_r} = \lambda \mathbf{v_{r'}}$ per un opportuno $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ricordiamo che, date due rette r_1 e r_2 in $\mathbb{R}^3$, sono possibili tre differenti posizioni reciproche:

- le rette sono **incidenti**, cioè hanno un punto in comune. In questo caso le rette sono **complanari**.
- le rette sono **parallele**, cioè hanno la stessa direzione. In questo caso le rette (se sono distinte) non hanno nessun punto in comune e sono complanari.
- le rette sono **sghembe**, cioè non sono parallele e non hanno punti in comune. In questo caso le rette non sono complanari.