Tekintsük a következő rekurziót!

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + 1$$

1. Milyen valós a_1-re ad ez a rekurzió (végtelen) sorozatot?
2. Milyen valós a_1-re lesz a rekurzió által megadott sorozat

a) monoton;
b) korlátos;
c) konvergens?
d) Ha konvergens a sorozat, akkor mi a határértéke?

1.Megoldása:

$n, k, t \in Z^+$

Ha $a_1 = 0$, akkor a sorozat egyetlen egy tagból áll.

Ha $a_1 \neq 0$, akkor a rekurzió nem ad végtelen sorozatot, ha $\exists n(\geq 2): a_n = 0$.

Tegyük fel, hogy $a_n = 0$ és $a_k \neq 0$ bármely $k < n$ esetén. Ekkor $1 + \frac{1}{a_{n-1}} = 0 \Leftrightarrow a_{n-1} = -1$.

Legyen $b_1 = -1$ és $b_{t+1} = \frac{1}{b_t - 1}$, ahol $1 \leq t$. Ekkor $b_t = a_{n-t}$, $1 \leq t \leq n-1$ áll fenn.

1. Állítás $b_t = -\frac{F_t}{F_{t+1}}$, ahol F_t - Fibonacci számsorozat *t*-edik tagja.

(Fibonacci sorozat: $F_0 = 0, F_1 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$)

1. Állítás bizonyítása: teljes indukcióval

Az első lépés, hogy ellenőrizzük az állítást $t = 1$-re: $b_1 = -\frac{1}{1} = -1$, $t = 1$ esetén az állítás igaz.

A második lépés az indukciós lépés. Tegyük fel, hogy az állítás igaz t-re. Ez azt jelenti, hogy $b_t = -\frac{F_t}{F_{t+1}}$. Be kellene látni, hogy ekkor az állítás teljesül $t+1$-re is, azaz $b_{t+1} = -\frac{F_{t+1}}{F_{t+2}}$. A $\{b_t\}$ megadása, az indukciós feltétel és a Fibonacci sorozat definíciója alapján:

$$b_{t+1} = \frac{1}{b_t - 1} = \frac{1}{-\frac{F_t}{F_{t+1}} - 1} = -\frac{F_{t+1}}{F_t + F_{t+1}} = -\frac{F_{t+1}}{F_{t+2}}$$

Vagyis az állítás teljesül $t+1$-re is. Ezzel az állítást beláttuk.

A fentiek alapján $a_1 \in R \setminus \left\{ -\frac{F_n}{F_{n+1}} \mid n \in N \right\}$ **esetén ad ez a rekurzió végtelen sorozatot.**

2. Állítás:

Ha $a_1 \neq -\frac{F_n}{F_{n+1}}$, akkor $a_n = \frac{a_1 \cdot F_n + F_{n-1}}{a_1 \cdot F_{n-1} + F_{n-2}}$, ahol $n \geq 2$

($F_0 = 0, F_1 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$)

2. Állítás bizonyítása: teljes indukcióval

Az első lépés, hogy ellenőrizzük az állítást $n=2$-re: a sorozat definíciója szerint $a_2 = 1+\frac{1}{a_1} = \frac{a_1+1}{a_1} = \frac{1a_1+1}{1a_1+0}$, a 2. állítás szerint $a_2 = \frac{a_1+1}{a_1}$. Tehát $n=2$ esetén az állítás igaz.

A második lépés az indukciós lépés. Tegyük fel, hogy az állítás igaz n-re, azaz $a_n = \frac{a_1 \cdot F_n + F_{n-1}}{a_1 \cdot F_{n-1} + F_{n-2}}$. Be kellene látni, hogy ekkor az állítás teljesül $n+1$-re is:

$a_{n+1} = \frac{a_1 \cdot F_{n+1} + F_n}{a_1 \cdot F_n + F_{n-1}}$. Az $\{a_n\}$megadása, az indukciós feltétel, és a Fibonacci sorozat definíciói alapján: $a_{n+1} = 1+\frac{1}{\frac{a_1 \cdot F_n + F_{n-1}}{a_1 \cdot F_{n-1} + F_{n-2}}} = \frac{a_1 \cdot F_n + F_{n-1} + a_1 \cdot F_{n-1} + F_{n-2}}{a_1 \cdot F_n + F_{n-1}} = \frac{a_1 \cdot F_{n+1} + F_n}{a_1 \cdot F_n + F_{n-1}}$

Tehát az állítás teljesül $n+1$-re is. Ezzel az állítást beláttuk.

Megjegyzés:

A) $a_1 = 1$ esetén $a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$

B) (1) $a_n = \frac{c \cdot L_{n+2} + F_{n+3}}{c \cdot L_{n+1} + F_{n+2}}$, ahol $c = -\frac{a_1 - 2}{3a_1 - 4}$, $n \geq 1$, $a_1 \neq \frac{4}{3}$, $a_1 \neq -\frac{F_n}{F_{n+1}}$

(2) Ha $a_1 = \frac{4}{3}$, akkor $a_n = \frac{L_{n+2}}{L_{n+1}}$, ahol $n \geq 1$

L_n - Lucas számsorozat n-edik tagja; F_n - Fibonacci számsorozat n-edik tagja

($L_1 = 1, L_2 = 3, L_n = L_{n-2} + L_{n-1}\ n \geq 3$)

2. Milyen valós a_1-re lesz a rekurzió által megadott sorozat

a) monoton;

b) korlátos;

c) konvergens?

d) Ha konvergens a sorozat, akkor mi a határértéke?

2. Megoldás:

a) $a_1 \in R \setminus \left\{ -\frac{F_n}{F_{n+1}} \mid n \in N \right\}$

A sorozat definíciója alapján:

(1) $a_{n+2} - a_{n+1} = (a_{n+1} - a_n)\frac{-1}{a_n + 1}$ és (2) $a_{n+3} - a_{n+2} = (a_{n+1} - a_n)\frac{a_n}{(a_n+1)(2a_n+1)}$

Ha $a_n + 1 < 0$, akkor $a_n < 0$ és $2a_n + 1 < 0$. Így (2) miatt $a_{n+3} - a_{n+2}$ és $a_{n+1} - a_n$ különböző előjelűek . Ha $0 < a_n + 1$, akkor az (1) miatt $a_{n+2} - a_{n+1}$ és $a_{n+1} - a_n$ különböző előjelűek.

Tehát a sorozat nem monoton.

b) $a_1 \neq -\frac{F_n}{F_{n+1}}$

$a_n = \frac{a_1 \cdot F_n + F_{n-1}}{a_1 \cdot F_{n-1} + F_{n-2}}$, ahol $n \geq 2$

I. Ha $a_1 < -1$, akkor a második tagtól kezdve a sorozat pozitív tagú $\Rightarrow a_1 \leq a_n$

II. Ha $a_1 > 0$, akkor a sorozat minden tagja pozitív $\Rightarrow 0 \leq a_n$

III. Ha $0 > a_1 > -1$

Tekintsük a $\left\{b_n = -\frac{F_{2n-2}}{F_{2n-1}}\right\}$ és $\left\{c_n = -\frac{F_{2n-1}}{F_{2n}}\right\}$ sorozatokat ($n \in Z^+$). Legyen $a = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}$ $b = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}$!

$$b_{n+1} - b_n = \frac{F_{2n-2} \cdot F_{2n+1} - F_{2n-1} \cdot F_{2n}}{F_{2n-1} \cdot F_{2n}} =$$

$$= \frac{1}{5} \frac{\left\{\frac{2a}{3+\sqrt{5}} - \frac{2b}{3-\sqrt{5}}\right\}\left\{\frac{a \cdot (1+\sqrt{5})}{2} - \frac{b \cdot (1-\sqrt{5})}{2}\right\} - \left\{\frac{2a}{1+\sqrt{5}} - \frac{2b}{1-\sqrt{5}}\right\}\{a-b\}}{F_{2n-1} \cdot F_{2n}} =$$

$$= \frac{1}{5} \frac{a^2\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} - \frac{2}{1+\sqrt{5}}\right\} - ab\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} + \frac{1-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} - \frac{2}{1+\sqrt{5}} - \frac{2}{1-\sqrt{5}}\right\} + b^2\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} - \frac{2}{1-\sqrt{5}}\right\}}{F_{2n-1} \cdot F_{2n}} = \frac{1}{F_{2n-1} \cdot F_{2n}}$$

(1) $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{F_{2n-1} \cdot F_{2n}} > 0 \Rightarrow$ a $\left\{b_n = -\frac{F_{2n-2}}{F_{2n-1}}\right\}$ sorozat szigorúan monoton nő.

(2) $$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} -\frac{F_{2n-2}}{F_{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} -\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}} \cdot \frac{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{2n-2}}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{2n-1}} = -\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$c_{n+1} - c_n = \frac{F_{2n-1} \cdot F_{2n+2} - F_{2n+1} \cdot F_{2n}}{F_{2n+2} \cdot F_{2n}} =$$

$$= \frac{1}{5} \frac{\left\{\frac{2a}{1+\sqrt{5}} - \frac{2b}{1-\sqrt{5}}\right\}\left\{\frac{a \cdot (3+\sqrt{5})}{2} - \frac{b \cdot (3-\sqrt{5})}{2}\right\} - \left\{\frac{a(1+\sqrt{5})}{2} - \frac{b(1-\sqrt{5})}{2}\right\}\{a-b\}}{F_{2n+2} \cdot F_{2n}} =$$

$$= \frac{1}{5} \frac{a^2\left\{\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\} - ab\left\{\frac{3+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} + \frac{3-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\} + b^2\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}}{F_{2n+2} \cdot F_{2n}} = \frac{-1}{F_{2n+2} \cdot F_{2n}}$$

(3) $c_{n+1} - c_n = \frac{-1}{F_{2n+2} \cdot F_{2n}} < 0 \Rightarrow$ a $\left\{c_n = -\frac{F_{2n-1}}{F_{2n}}\right\}$ sorozat szigorúan monoton csökken.

$$(4)\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} -\frac{F_{2n-1}}{F_{2n}} = \lim_{n\to\infty} -\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}} \cdot \frac{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{2n-1}}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{2n}} = -\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

A fentiek miatt $\forall k, t : b_k < \frac{1-\sqrt{5}}{2} < c_t$

Három esetet vizsgálunk: A) $a_1 < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ **, B)** $a_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ **és C)** $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < a_1$

A) Ha $a_1 < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$**,** akkor

(1), (2) miatt $\exists k : a_1 \in \left]b_k ; b_{k+1}\right[$. Ekkor $a_{2k+1} = \frac{F_{2k+1}}{F_{2k}} \cdot \frac{a_1 + \frac{F_{2k}}{F_{2k+1}}}{a_1 + \frac{F_{2k-1}}{F_{2k}}} = -\frac{1}{b_{k+1}} \cdot \frac{a_1 - b_{k+1}}{a_1 - c_k} > 0$ és

$$a_{2k} = \frac{F_{2k}}{F_{2k-1}} \cdot \frac{a_1 + \frac{F_{2k-1}}{F_{2k}}}{a_1 + \frac{F_{2k-2}}{F_{2k-1}}} = -\frac{1}{c_k} \cdot \frac{a_1 - c_k}{a_1 - b_k} < 0.$$

B) Ha $a_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow a_{39} < 0 < a_{40}$

C) Ha $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < a_1$, akkor

(3), (4) miatt $\exists t : a_1 \in \left]c_t ; c_{t+1}\right[$. Ekkor $a_{2t+1} = \frac{F_{2t+1}}{F_{2t}} \cdot \frac{a_1 + \frac{F_{2t}}{F_{2t+1}}}{a_1 + \frac{F_{2t-1}}{F_{2t}}} = -\frac{1}{b_{t+1}} \cdot \frac{a_1 - b_{t+1}}{a_1 - c_t} < 0$ és

$$a_{2t+2} = \frac{F_{2t+2}}{F_{2t+1}} \cdot \frac{a_1 + \frac{F_{2t+1}}{F_{2t+2}}}{a_1 + \frac{F_{2t}}{F_{2t+1}}} = -\frac{1}{c_{t+1}} \cdot \frac{a_1 - c_{t+1}}{a_1 - b_{t+1}} > 0.$$

Az A)B)C) részek alapján kijelenthetjük, hogy bármely $a_1 \neq -\frac{F_n}{F_{n+1}}$ esetén

(5) $\exists N \in Z^+ : ha\ n < N \Rightarrow a_n < 0$ és $n \geq N$ esetén $0 < a_n$. (A sorozatnak a_N-től kezdve minden tagja pozitív.)

Alulról korlátos, alsó korlátja: $\min\{a_1; a_2; ...; a_{N-1}; 0\}$

Állítás: $1 < a_{N+k} < 2$**,** $k \geq 2, k \in Z$

Bizonyítás: k szerinti teljes indukcióval

Az első lépés, hogy ellenőrizzük az állítást $k = 2$-re:

(5) szerint $0 < a_N \Rightarrow 1 < 1 + \frac{1}{a_N} = a_{N+1} \Rightarrow 1 < a_{N+2} = 1 + \frac{1}{a_{N+1}} < 2$

A második lépés az indukciós lépés. Tegyük fel, hogy az állítás igaz k -ra, azaz $1 < a_{N+k} < 2$. Be kellene látni, hogy ekkor az állítás teljesül $k+1$-re is: $1 < a_{N+k} < 2$. Az $\{a_n\}$ megadása, és az indukciós feltétel alapján: $a_{N+k+1} = 1 + \frac{1}{a_{N+k}} > 1 + \frac{1}{2} > 1$ és $a_{N+k+1} = 1 + \frac{1}{a_{N+k}} < 1 + \frac{1}{1} = 2$

Vagyis az állítás teljesül $k+1$-re is. Ezzel az állítást beláttuk.

Tehát a **sorozat felülről korlátos**, felső korlátja: $\max\{a_N; a_{N+1}; 2\}$

A fentiek értelmében a sorozat korlátos.

c-d) $a_1 \neq -\frac{F_n}{F_{n+1}}$

Felhasználva az $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$, a $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, ha esetén $|q| < 1$

összefüggéseket , és a konvergens sorozatokkal végezhető műveletekre vonatkozó tételeket, kapjuk, hogy:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 \cdot F_n + F_{n-1}}{a_1 \cdot F_{n-1} + F_{n-2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}} \cdot \frac{a_1 \cdot \left\{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n\right\} + \frac{2}{1+\sqrt{5}}\left(1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1}\right)}{a_1 \cdot \left\{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1}\right\} + \frac{2}{1+\sqrt{5}}\left(1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-2}\right)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Tehát a sorozat konvergens és a határértéke $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ha $a_1 \neq -\frac{F_n}{F_{n+1}}$ **.**