

Arbeitsblätter zur Vertiefung

Vierfeldertafel, Bedingte Wahrscheinlichkeit, Stochastische Unabhängigkeit

Ergänzende Hinweise:

Zur Bearbeitung wird das Applet „Vierfeldertafel und bedingte Wahrscheinlichkeit“ benötigt.

Voraussetzungen:

- Teil 1: Vierfeldertafel und Bedingte Wahrscheinlichkeit
- Teil 2: zusätzlich Stochastische Unabhängigkeit

Ziele:

- Festigung, Übung und Vertiefung der Themenbereiche Vierfeldertafel, Bedingte Wahrscheinlichkeit sowie Stochastische Unabhängigkeit,
- Vertieftes inhaltliches Verständnis des Zusammenhangs zwischen Vierfeldertafel und den zugehörigen Baumdiagrammen mithilfe eines dynamischen GeoGebra-Applets,
- Nutzung des Applets als Werkzeug
- Veranschaulichung der Verhältnigleichheit in der Vierfeldertafel im Kontext stochastischer Unabhängigkeit

Teil 1 Vertiefung zu Vierfeldertafel und Bedingte Wahrscheinlichkeit

An einem Gymnasium haben in der neunten Jahrgangsstufe die Schüler als Profulfach entweder NWT (N) oder Spanisch (S). Als zweite Fremdsprache kommen entweder Französisch (F) oder Latein (L) in Frage. Folgendes ist bereits bekannt.

	N	S	
F	40		50
L		70	
	120		200

	N	S	
F			
L			

- 1) Vervollständige die Vierfeldertafel und erstelle eine weitere mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten.
- 2) Erstelle ein mögliches Baumdiagramm **ohne** relative Häufigkeiten auf den Ästen.
- 3) Begründe, warum es zwei mögliche Baumdiagramme gibt.

Nutze jetzt das **GeoGebra-Applet „VierfeldertafelBedingteWahrscheinlichkeiten.ggb“**:

- 4) Erkunde zunächst die Funktionsweise des Applets.
- 5) Stelle die Schieberegler so ein, dass die angezeigten Wahrscheinlichkeiten zum bei b) erstelltem Baumdiagramm passen.
- 6) Ermittle aus dem fertigen Baumdiagramm die Wahrscheinlichkeit,
... dass ein Schüler der Spanisch gewählt hat, unter der Bedingung, dass er bereits Französisch im Unterricht hat,
... dass ein Schüler der Latein gewählt hat, unter der Bedingung, dass er auch Spanisch im Unterricht hat.
- 7) Beschreibe, wie man nur mithilfe der Vierfeldertafel diese Wahrscheinlichkeiten ermitteln kann.
- 8) Bearbeite die folgende Aufgabe unter Zuhilfenahme des **Applets als Werkzeug**.

Von den 90 Personen einer Zeitungsredaktion benötigen $\frac{2}{3}$ eine Lesebrille. Die Hälfte der 36 Männer liest mit Brille.

- a) Erstelle die zugehörige Vierfeldertafel.
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewählter Redakteur dieser Zeitung weiblich?
- c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewähltes Mitglied der Redakteur Träger eine Lesebrille, wenn es weiblich ist?
- d) Eine Lesebrille wurde gefunden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gehört sie einem Mann?
- e) Erläutere, warum eine Vierfeldertafel zum Lösen der Teilaufgaben b)-d) besser geeignet ist als ein Baumdiagramm.

Teil 2 Vertiefung zur Stochastische Unabhängigkeit

An einer anderen Schule sieht die Verteilung auf die Fächer wie folgt aus.

	N	S	
F	0,15	0,1	0,25
L	0,45	0,3	0,75
	0,6	0,4	1

- 1) Weise rechnerisch nach, dass die Ereignisse „Schülerin oder Schüler wählt NWT (N)“ und „Schülerin oder Schüler wählt Französisch (F)“ in diesem Fall stochastisch unabhängig sind.
- 2) Stelle die Schieberegler im GeoGebra-Applet entsprechend ein. Beschreibe, wie man am Baumdiagramm die stochastische Unabhängigkeit erkennen kann.
- 3) Aktiviere das Kontrollkästchen „Flächen anzeigen“. Die Vierfeldertafel ist jetzt in vier farbig markierte Rechtecke unterteilt. Erläutere die Bedeutung der Flächengrößen in der Vierfeldertafel.

Man kann zeigen, dass bei stochastischer Unabhängigkeit in der Vierfeldertafel alle Quotienten zeilen- und spaltenweise gleich sind.

- 4) Erläutere, wie man dies an der farbigen Darstellung „Flächen anzeigen“ der Vierfeldertafel auf dem Applet erkennen kann.
Hinweis: Verwende diese Darstellung auch für die Werte der ersten Schule, bei der keine Stochastische Unabhängigkeit vorliegt.
- 5) Bearbeite die folgende Aufgabe unter Zuhilfenahme des **Applets als Werkzeug**.

Lampen eines Herstellers weisen zum Teil Fehler im Leuchtsystem oder Fehler im Schraubmechanismus auf. Für eine zufällig ausgewählte Lampe beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Fehler im Schraubmechanismus vorliegt, 2%, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Fehler vorliegen, 0,1% und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens einer der beiden Fehler vorliegt, 6,9%.

- a) Untersuche, ob die beiden Fehler stochastisch unabhängig sind.
- b) Erläutere, woran man in der Vierfeldertafel des Geogebra-Applets schnell erkennen kann, ob die beiden Fehler stochastisch unabhängig sind.

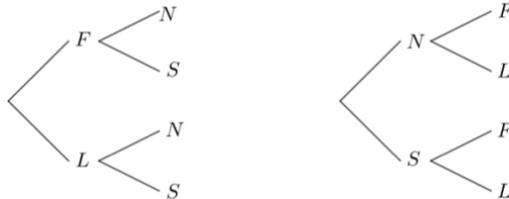
Lösungshinweise Teil 1

1)

	N	S	
F	40	10	50
L	80	70	150
	120	80	200

	N	S	
F	0,2	0,05	0,25
L	0,4	0,35	0,75
	0,6	0,4	1

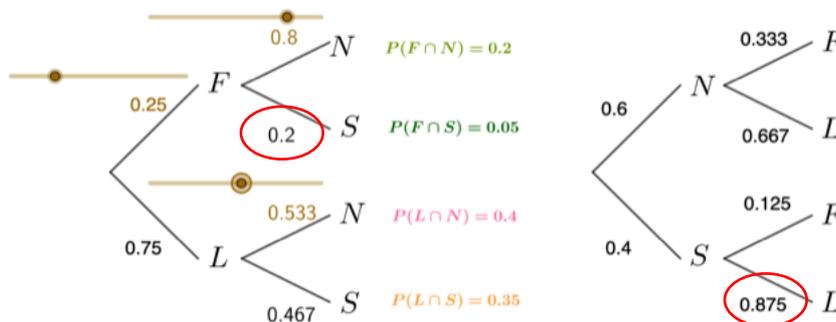
2) Mögliche Baumdiagramme



3) Je nachdem, welches Ereignis man als erste Stufe wählt, sind zwei Baumdiagramme möglich.

4) und 5) wird am Applet bearbeitet

6) Man kann die gesuchten bedingten Wahrscheinlichkeiten an den Wahrscheinlichkeiten in der zweiten Stufe am Baumdiagramm ablesen.



7) Mithilfe der Vierfeldertafel kann man die gesuchten bedingten Wahrscheinlichkeiten rechnerisch ermitteln:

$$P_F(S) = \frac{P(F \cap S)}{P(F)} = \frac{0,05}{0,25} = 0,2$$

$$P_S(L) = \frac{P(S \cap L)}{P(S)} = \frac{0,35}{0,4} = 0,875$$

8) a) L: Lesebrille; M: Mann

	L	\bar{L}	
M	18	18	36
\bar{M}	42	12	54
	60	30	90

b) $P(\bar{M}) = \frac{54}{90} = \frac{3}{5}$

c) $P_{\bar{M}}(L) = \frac{42}{54} = \frac{7}{9}$

d) $P_L(M) = \frac{18}{60} = \frac{3}{10}$

e) Zum Lösen der Aufgabe würde man in der Regel zwei Baumdiagramme benötigen.

Lösungshinweise Teil 2

1)

$$P(F \cap N) = 0,15$$

$$P(F) \cdot P(N) = 0,25 \cdot 0,6 = 0,15$$

2) In der zweiten Stufe des Baumdiagramms stimmen mithilfe der beiden Schiebreglern eingestellten Wahrscheinlichkeiten überein.

3) Die Maßzahl der Fläche entspricht Wahrscheinlichkeit an.

4) Im Fall der stochastischen Unabhängigkeit schneiden sich die grauen Strecken in einem Punkt.

5) L: Fehler im Leuchtsystem; S: Fehler im Schraubmechanismus

	L	\bar{L}	
S	18	18	36
\bar{S}	42	12	54
	60	30	90

Damit $P_L(S) = \frac{0,001}{0,05} = 0,02 = P(S)$, d.h. L und S sind stochastisch unabhängig.