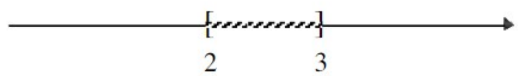
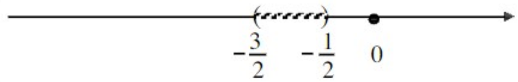
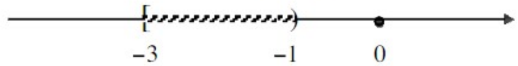
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LANÚS
DEPARTAMENTO DE DESARROLLO PRODUCTIVO Y TECNOLÓGICO
GESTIÓN AMBIENTAL URBANA
TURISMO

TEORÍA DE CURVAS
Parte I
Intervalos de la recta real

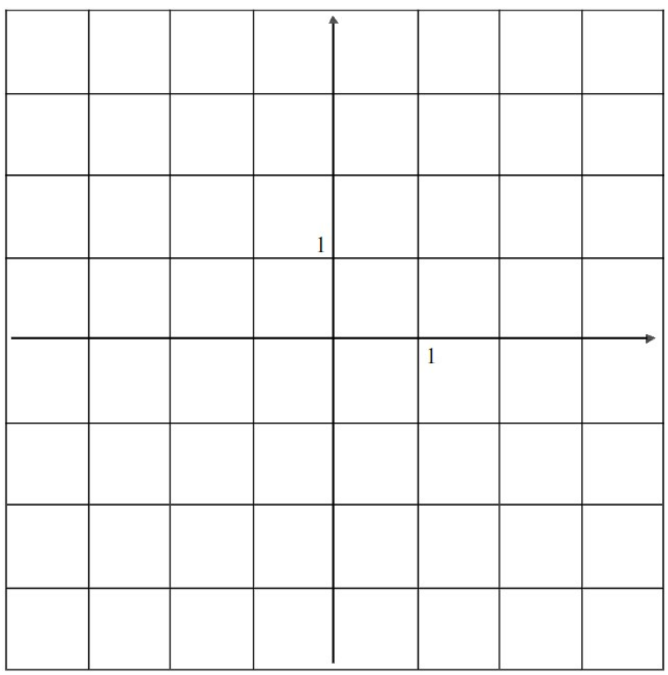
Complete siguiendo el modelo.

Notación de intervalos	*Representación en la recta*	*Representación algebraica y/o conjuntista*
$[2,3]$		$2 \le x \le 3$
$(2,3)$		
$(-\infty,2)$		
		$x \ge 2$
$[1,1]$		
$(1,1)$		
$(-2,2]$		
		$-2 < x < 2$
		R
$[2,3)\cup(3,4]$		
$[2,4]-\{3\}$		
$[2,4]-(3,3)$		
$[0,1]-(-2,2)$		
$[2,4]\cup[3,5]$		
$[2,4]\cap[3,5]$		
$(2,3)\cup(1,4]$		
$(2,3)\cap(1,4]$		
$(1,2)\cap(2,3)$		
$(1,2)\cap[2,3)$		

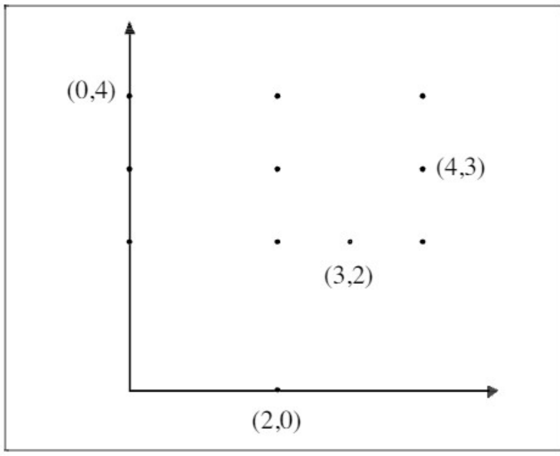
<table>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$1 < x < 2$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$x > 1 \quad y \quad x < 2$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$x > 1 \quad o \quad x < 2$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$1 < x \leq 2$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$1 < x < 2 \quad o \quad x = 3$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$1 < x < 2 \quad y \quad x > 3$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$1 < x < 2 \quad o \quad x > 3$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$x < 3 \quad o \quad x > 3$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$x \neq 3$</td></tr>
</table>

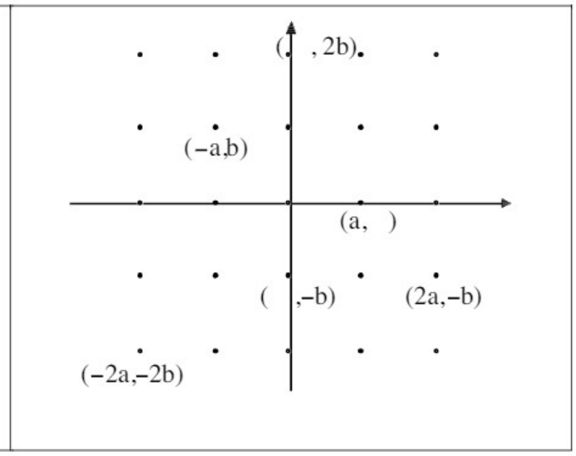
Parte II
Pares ordenados y plano real

Complete las escalas de los ejes y luego represente los siguientes pares ordenados como puntos del plano cartesiano. $(2,1)$, $(1,2)$, $(0,0)$, $(-1,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,1)$, $(2,3)$, $(2,-3)$, $(-3,2)$, $(2,-2)$, $(-2,2)$, $(2,2)$, (e,π). (Pregunte a su profesor quienes son e y π y cómo obtenerlos con la calculadora).

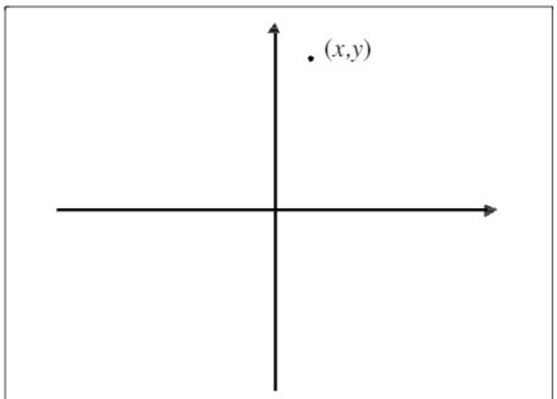


Póngale las coordenadas a los puntos.

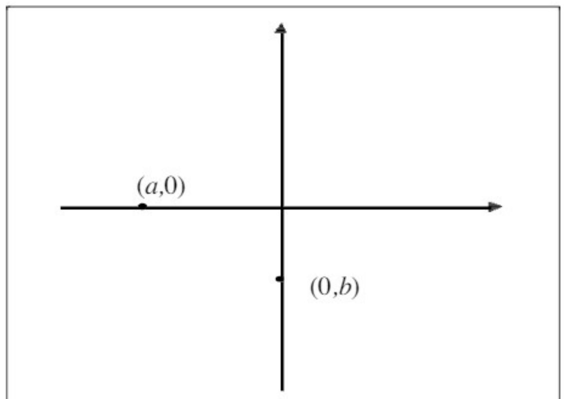




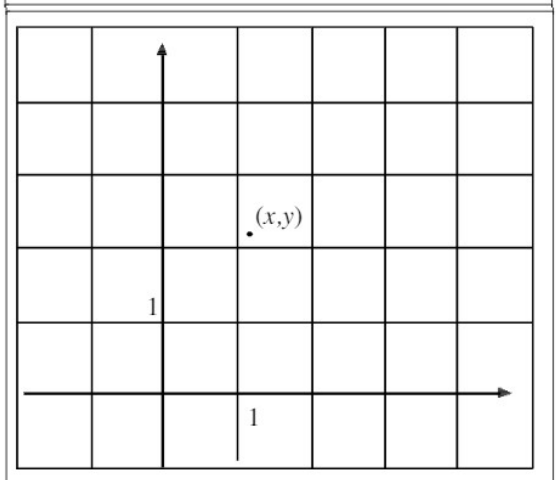
Sitúe, como puntos, los pares ordenados y escriba al lado de cada punto el par correspondiente. Debe hacerlo respetando las escalas.



$(x,-y), (-x,y), (-x,-y), (y,x)$

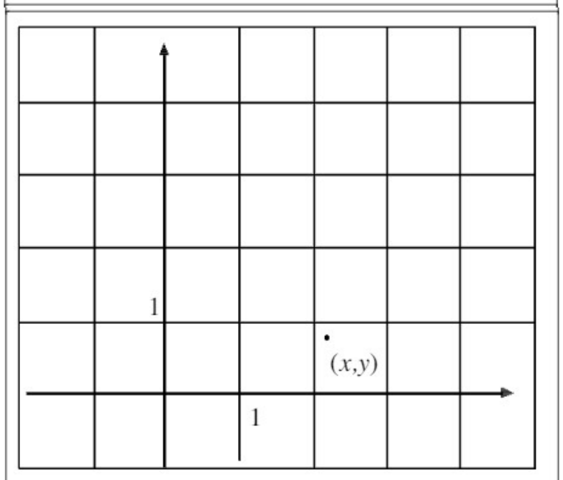


$(b,0), (b,b), (a,a), (-a,-b), (a,-a), (-b,-b)$



$(x-2,y), (x+2,y), (x,y-2)$

$(x,y+2), (x-2,y-2), (x+2,y+2)$



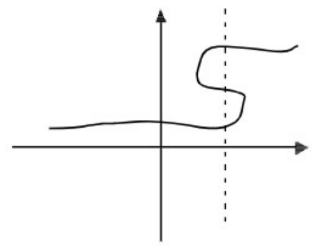
$(2x,y), (x,2y), (\frac{x}{2},y), (x,\frac{y}{2}), (2x,-y), (\frac{x}{2},\frac{y}{2})$

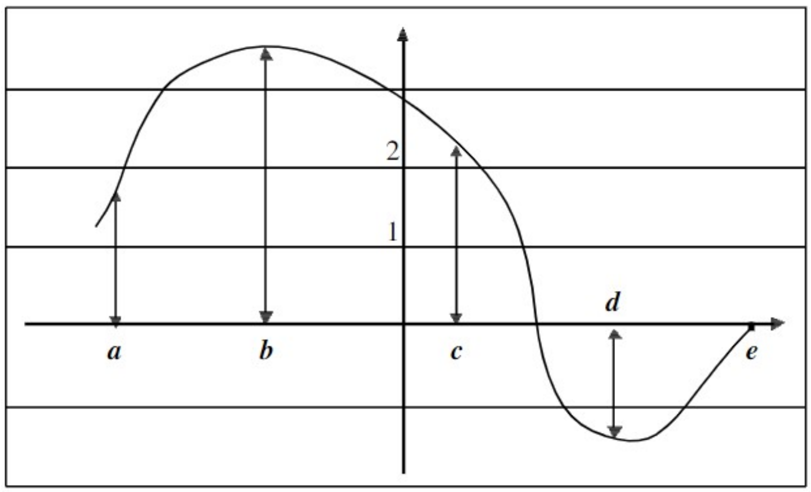
Parte III
El concepto de curva

CURVAS.

CONVENCION.

Las curvas que se van a estudiar en este libro serán sólo aquellas que <u>tienen no más de un punto en cada vertical.</u>
Un ejemplo de curva que no sirve aparece en la figura: en punteado hay una vertical y esa vertical corta la curva en más de un punto (la corta en tres puntos).





Altura de una curva en un punto dado

La comprensión de lo anterior nos permitirá abordar el siguiente planteamiento en relación a la figura de arriba:

Primera columna de preguntas Referente a la los puntos *a, b, c, d* y *e* en el eje *x*	Segunda columna de preguntas Referente al resto de puntos en el eje *x*
¿ En cuál la curva tiene altura mayor que 2?	¿Existe algún punto diferente de e, para el cual la altura de la curva es cero? ¿Cuál?.
¿En cuales la curva tiene altura menor que 2?	¿Existe algún punto para el cuál la curva tenga altura 6?
¿En cuales la altura es positiva?	¿En donde la curva es "más alta"?
¿En cuales la altura es negativa?	¿En donde la curva es "más baja"?
¿En cuales la altura es mayor que 1?	¿3 es mayor que todas las posibles alturas de la curva?
¿Puede decir cuál es la altura de la curva en e?	¿2 es mayor que cualquiera de las alturas de la curva?
¿La altura en a es mayor que la altura en b?	¿-1 es menor que cualquiera de las alturas de la curva?
¿La altura en a es mayor que la altura en c?	¿-2 es menor que cualquiera de las alturas de la curva?

Nota: Los puntos suspensivos en los gráficos indican que la curva se prolonga "en la dirección que ellos señalan". A veces para indicar que el extremo de una curva no es parte de la curva se rematará la curva con un pequeño círculo del lado en que se quiere no incluir el extremo. (Ver el ejemplo 6, de la página que sigue).

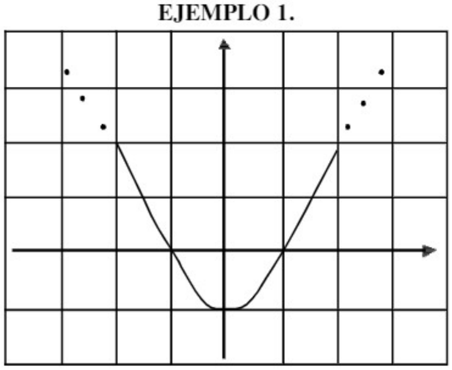
A continuación presentaremos seis ejemplos de curvas. Todos los conceptos que aprenderemos en esta guía serán aplicados a estos ejemplos, cada uno tiene su número que lo identifica.

El concepto de *altura de una curva en un punto* es fundamental para entender lo que sigue, cualquier duda que tenga, no dude en preguntar al profesor.

EJEMPLOS DE CURVAS.

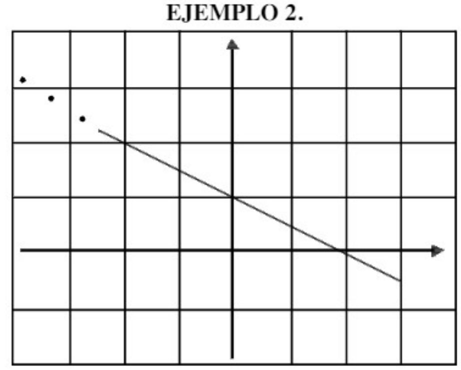
Complete de acuerdo a lo que observa en cada curva. $alt(-2)$ significa altura de la curva en $x=-2$. Cuando aparece $alt(\quad)=-2$, hay que poner en el paréntesis el x (en caso de que exista) donde la altura de la curva es -2.

EJEMPLO 1.



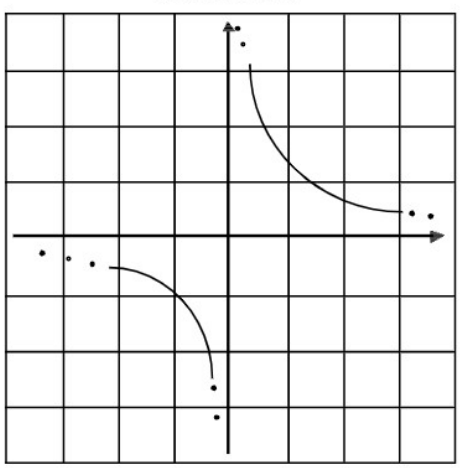
$alt(-2)=$	$alt(\quad)=-2$
$alt(0)=$	$alt(\quad)=-1$

EJEMPLO 2.



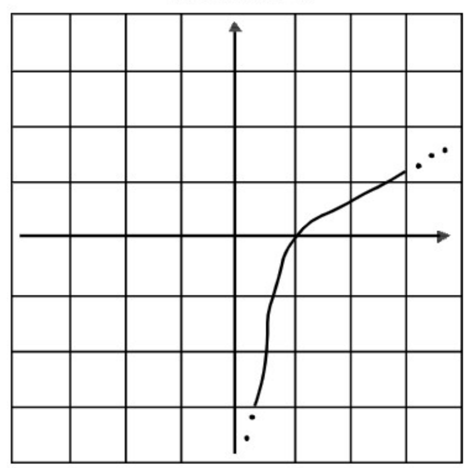
$alt(-1)=$	$alt(\quad)=0$
$alt(3)=$	$alt(\quad)=2$

EJEMPLO 3.



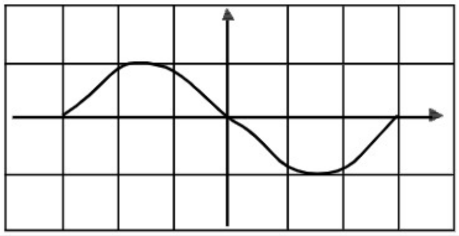
$alt(-2)=$	$alt(1)=$
$alt(0)=$	$alt(\quad)=2$

EJEMPLO 4.



$alt(1)=$	$alt(-1)=$
$alt(\frac{1}{4})=$	$alt(\quad)=0$

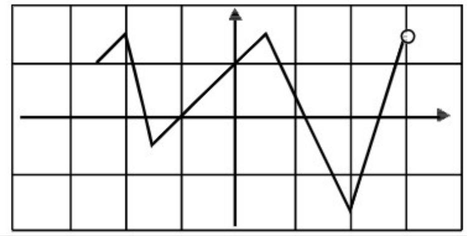
EJEMPLO 5.



$alt(\frac{1}{2}) =$ $\qquad$ $alt(\quad) = \frac{1}{2}$

$alt(\quad) = 2$ $\qquad$ $alt(\quad) = \frac{1}{2}$

EJEMPLO 6.

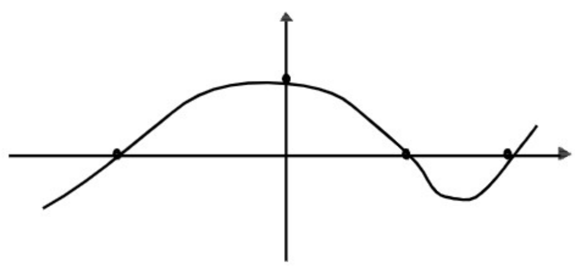


$alt(-1.5) =$ $\qquad$ $alt(3.5) =$

$alt(0) =$ $\qquad$ $alt(\quad) = 3$

Puntos de corte de la curva con los ejes

Los puntos "gruesos" que aparecen sobre la curva y los ejes de la figura reciben el nombre de puntos de corte de la curva con los ejes.

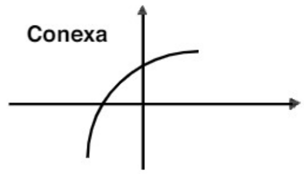


Complete en base a las curvas que aparecen en la página de ejemplos. (página anterior).

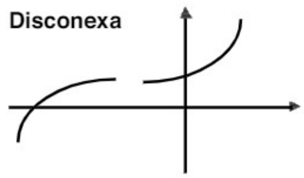
Ejemplos	Puntos de corte con el eje x.	Puntos de corte con el eje y.
1		
2		
3		
4		
5		
6		

CONEXAS o DISCONEXAS.

Conexa

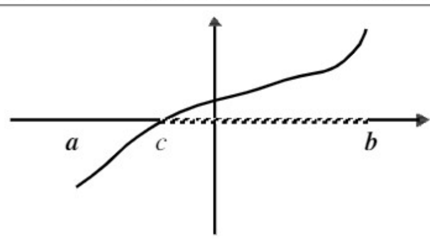
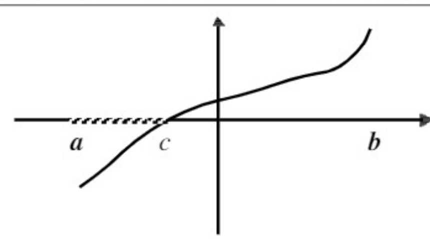


Disconexa



Ejemplos	Conexa o disconexa.
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Parte positiva y parte negativa de una curva

PARTE POSITIVA	PARTE NEGATIVA
Parte del eje x donde las alturas de la curva son positivas. (Donde la curva está por **encima** del eje x)	Parte del eje x donde las alturas de la curva son negativas. (Donde la curva está por **debajo** del eje x)
	
$(c,b]$	$[a,c)$

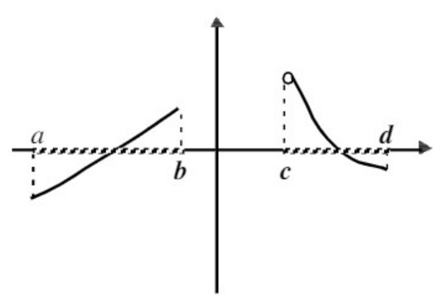
Ejemplos	Parte positiva.	Parte negativa.
1	$(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$	$(-1,1)$
2		
3		
4		
5		
6		

Nota: Para determinar la parte positiva primero se ubican el o los trozos de curva que están por encima del eje x y luego se determinan sobre cual o cuales intervalos del eje x están esos trozos.

Es importante notar y recordar que cada concepto que trabajamos se refiere a puntos en el plano cartesiano, o a intervalos de la recta real. Por eso lo fundamental de estos conceptos.

Dominio y rango (imagen)

DOMINIO

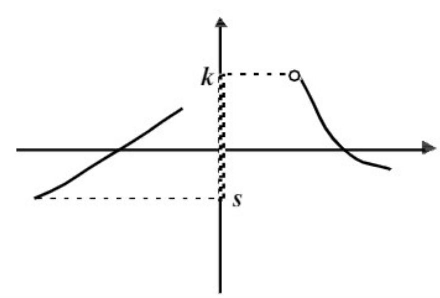


Parte del eje x desde donde mirando verticalmente, hacia arriba o hacia abajo, se ve la curva.

$[a,b]\cup(c,d]$

Proyección de la curva sobre el eje x.

RANGO



Parte del eje y desde donde mirando horizontalmente, hacia la derecha o hacia la izquierda, se ve la curva.

$[s,k)$

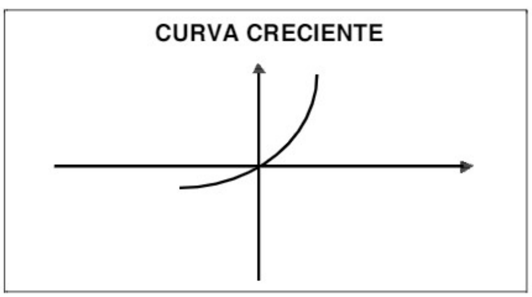
Proyección de la curva sobre el eje y.

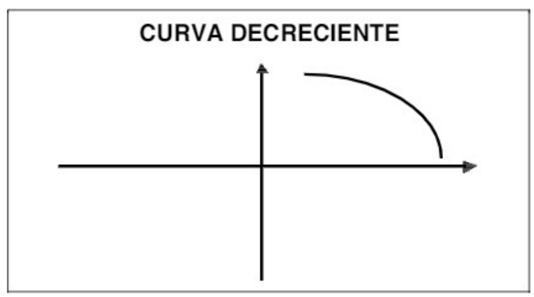
Es importante ver a este par de conceptos desde los ejemplos cotidianos; por ejemplo: si la curva a la que nos referimos es un “modelo” de la distribución de temperaturas durante los meses del año, los meses son el dominio y el rango (o imagen) el intervalo en el eje y de los correspondientes valores de temperatura.

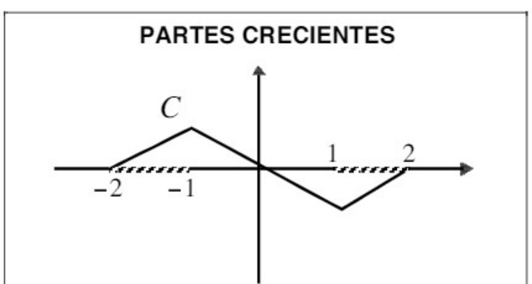
Ejemplos	Dominio	Rango
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Nota: Para ayudarse a reconocer el **dominio**, puede tratar de imaginarse un muñeco que va caminando por el eje x y mira hacia arriba y hacia abajo. Si en un punto no ve curva, ese punto no está sobre el dominio. Si ve curva desde el punto, el punto pertenece al dominio. Para el **rango** ponga a caminar el muñeco por el eje y y que mire a la izquierda y a la derecha. Si desde el punto ve curva es que está parado sobre un punto del rango, si no ve es que el punto no pertenece al rango.

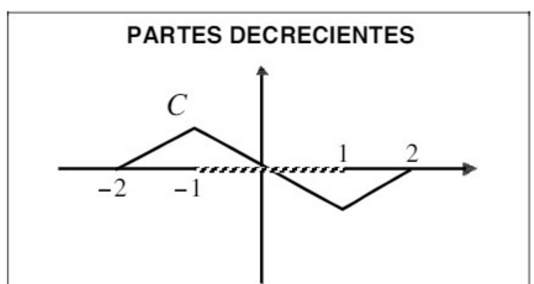
Partes crecientes y decrecientes de una curva







C crece en $(-2,-1)$ y $(1,2)$



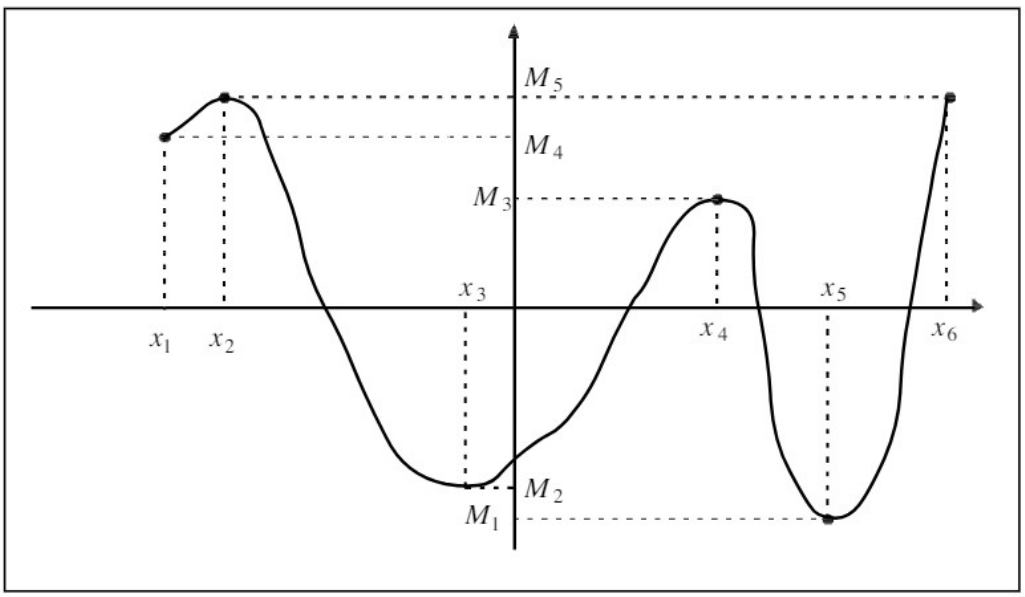
C decrece en $(-1,1)$

En este concepto, las partes crecientes y decrecientes **son siempre subconjuntos (intervalos) del eje *x*.**

Ejemplos	Crece en	Decrece en
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Nota: Al desplazar un punto de izquierda a derecha sobre el eje x, si la curva "sube" se dice que la curva es creciente en esa parte del eje x. Si la curva "baja" se dice que es decreciente (en esa parte del eje x).

Máximos y mínimos



El **Máximo absoluto** o **global** es la mayor altura alcanzada por la curva en todo su dominio; el **Mínimo absoluto** o **global**, es la menor altura alcanzada en todo su dominio.

El **Máximo relativo** o **local** es el máximo alcanzado en un intervalo abierto del eje *x*, igualmente, el **Mínimo relativo** o **local** es el mínimo alcanzado en un intervalo abierto del eje *x*.

Complete de acuerdo a la figura y las definiciones que se acaban de dar.

M_1 es el mínimo global. Es alcanzado en x_5.

M_2 es ______________________ . Es alcanzado en ________

M_3 es ______________________ . Es alcanzado en ________

M_4 es ______________________ . Es alcanzado en ________

M_5 es ______________________ . Es alcanzado en ________

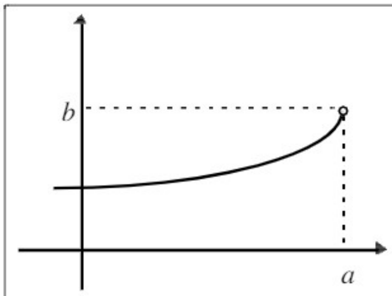
Complete en base a las curvas de la página de ejemplos.

Ejemplos	Max.Abs	Alcanzado en	Max.Rels	Alcanzados en
1				
2				
3				
4				
5				
6				

Ejemplos	Min.Abs	Alcanzado en	Min.Rel	Alcanzados en
1				
2				
3				
4				
5				
6				

Punto delicado.

Comprender que en un abierto puede no haber máximo (o mínimo).

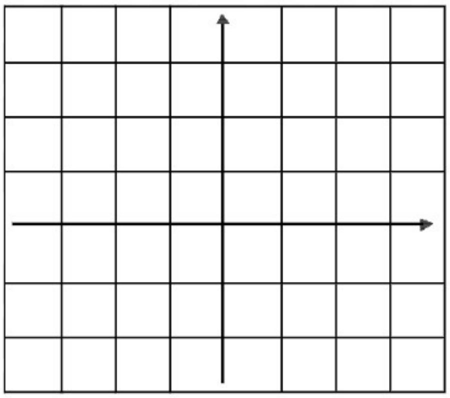


¿Porqué b no puede ser el máximo de la curva?

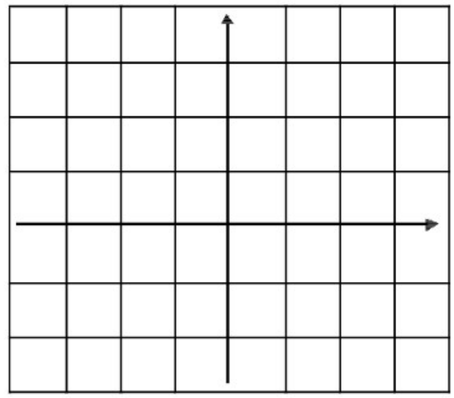
¿Porqué la curva del gráfico no tiene máximo?

Parte IV
Ejercicios

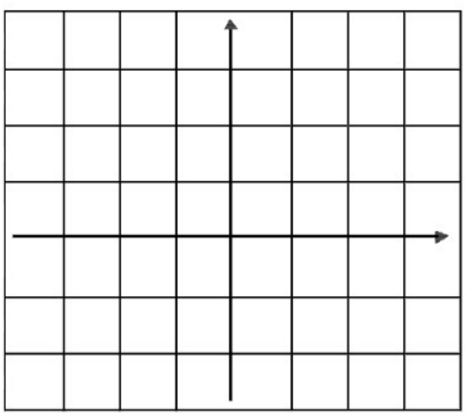
Complete con una curva que cumpla las especificaciones. Cuando no se especifica donde es creciente o positiva o acotada.... se sobreentenderá que es sobre todo el dominio.



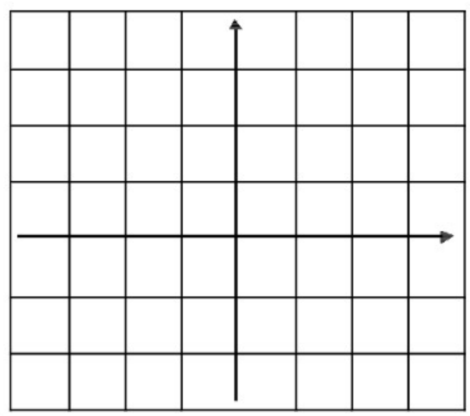
$Dominio = [0,3]$, *creciente*



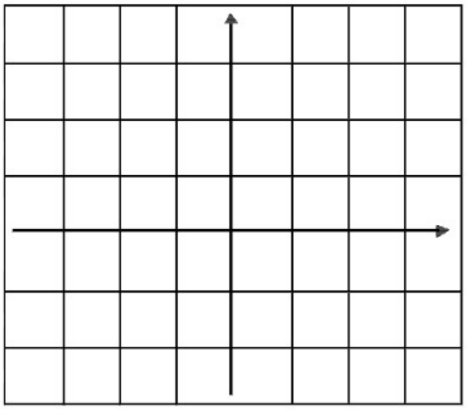
$Dominio = [0,3]$, *creciente*, *máximo* 2



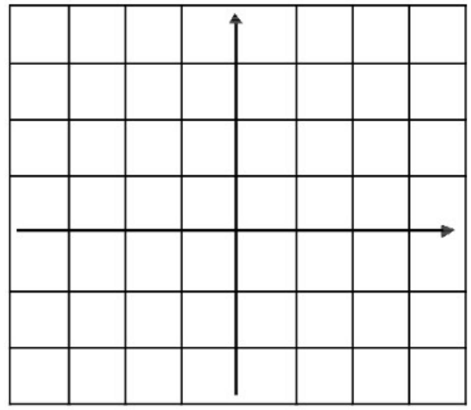
$Dominio = [0,3]$, *creciente*, *mínimo* 2



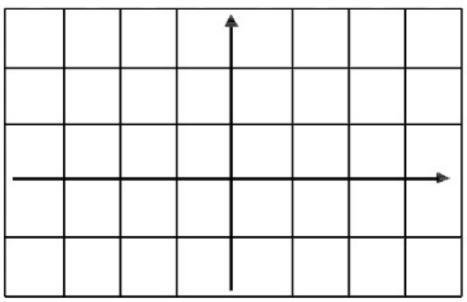
$Dominio = R$, *creciente*



$Dominio = R$, $creciente$, $positiva$

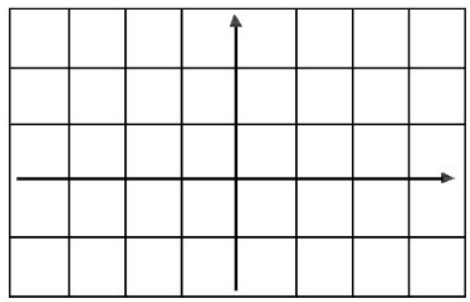


$Dominio = R$, $creciente$, $negativa$



$Dominio = [-1, 2]$, $conexa$

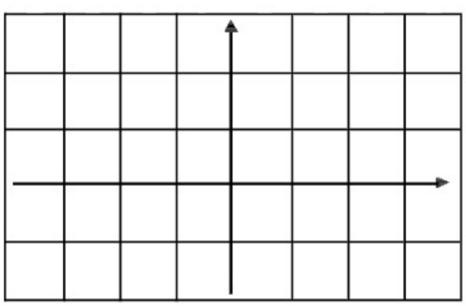
Tiene dos puntos de corte con el eje x



$Dominio = [-1, 2]$, $conexa$

Tiene dos puntos de corte con el eje x

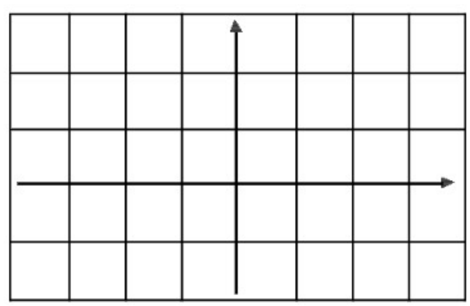
Máximo absoluto alcanzado solo en -1



$Dominio = [-1, 2]$, $conexa$

Tiene dos puntos de corte con el eje x

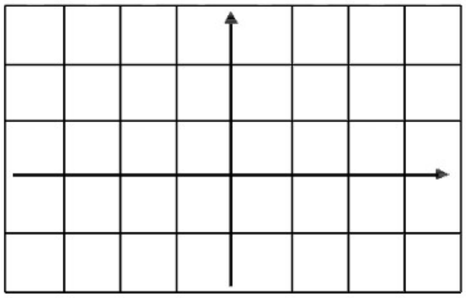
Máximo absoluto alcanzado solo en -1 y 2



$Dominio = (-1, 2)$, $conexa$

Tiene dos puntos de corte con el eje x

Máximo absoluto alcanzado solo en 0

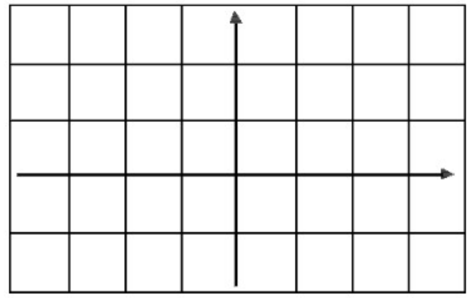


$Dominio = [-1, 2]$, *conexa*

Tiene dos puntos de corte con el eje x

Máximo absoluto alcanzado solo en 0

Mínimo absoluto alcanzado solo en -1

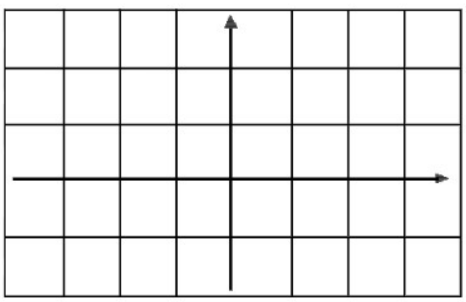


$Dominio = (-1, 2)$, *conexa*

negativa

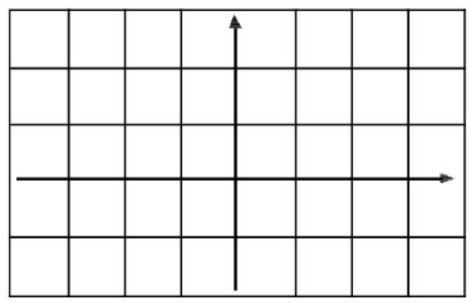
creciente en $(-1, 1)$

decreciente en $(1, 2)$



$Dominio = (-1, 2)$, *conexa*

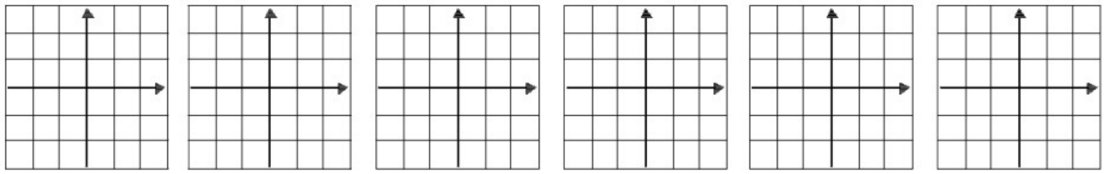
decreciente, *positiva*



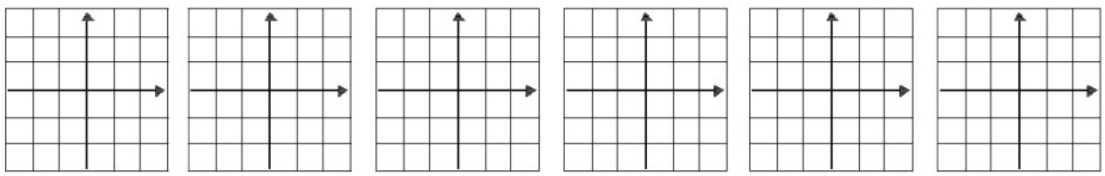
$Dominio = [0, \infty)$, *disconexa*,

creciente, *acotada superiormente por* 2

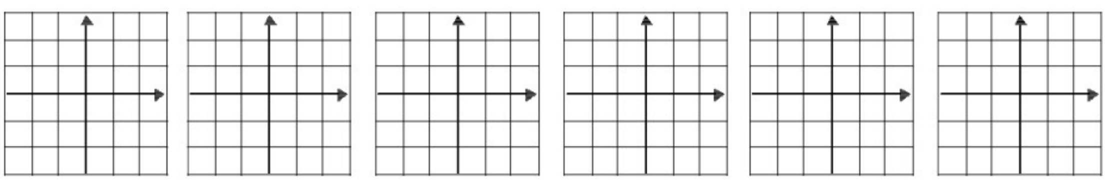
Complete cada recuadro con una curva f conexa que cumpla las tres condiciones señaladas.



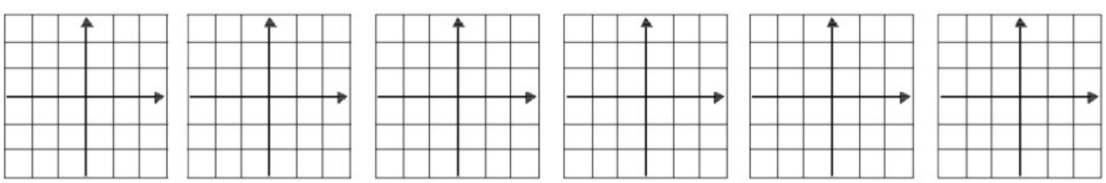
$f(-2)=-2$ $f(1)=1$ $f(2)=2$	$f(-2)=-2$ $f(1)=1$ $f(2)=1$	$f(-2)=1$ $f(1)=1$ $f(2)=1$	$f(-2)=1$ $f(1)=-2$ $f(2)=1$	$f(-2)=1$ $f(1)=2$ $f(2)=1$	$f(-1)=2$ $f(2)=0$ $f(0)=-1$



$f(-1)=1$ $f(0)=0$ $f(1)=1$	$f(-1)=-1$ $f(0)=0$ $f(1)=-1$	$f(-2)=2$ $f(0)=0$ $f(2)=2$	$f(-1)=0$ $f(0)=1$ $f(1)=0$	$f(-1)=0$ $f(0)=-1$ $f(1)=0$	$f(-1)<0$ $f(0)=0$ $f(1)<0$

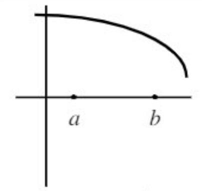
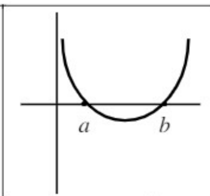
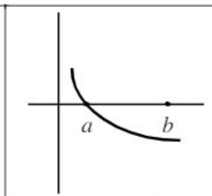
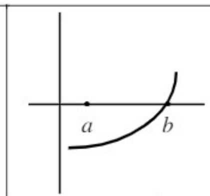
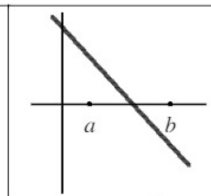


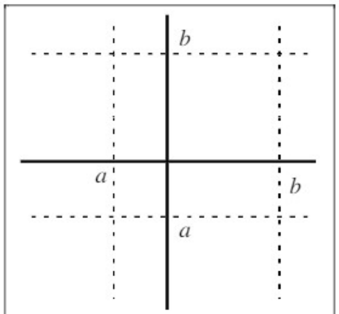
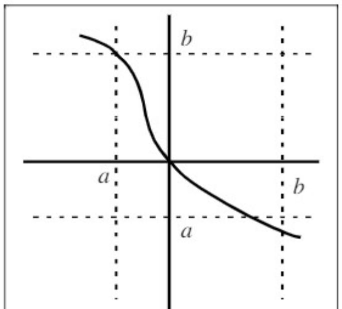
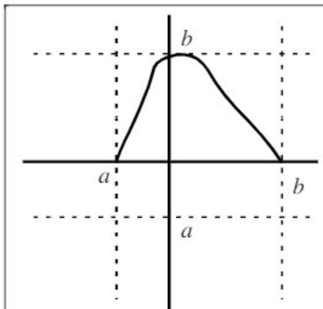
$f(-1)<0$ $f(0)<0$ $f(1)<0$	$f(-1)<0$ $f(0)<0$ $f(1)>0$	$f(-1)>0$ $f(0)<0$ $f(1)<0$	$f(-1)<0$ $f(0)>0$ $f(1)<0$	$f(-1)=0$ $f(0)<0$ $f(1)>0$	$f(-1)<0$ $f(0)>0$ $f(1)=0$



$f(-1)>0$ $f(0)<0$ $f(1)=0$	$f(-1)=0$ $f(0)>0$ $f(1)<0$	$f(-1)>0$ $f(0)=0$ $f(1)>0$	$f(-1)=1$ $f(0)>0$ $f(1)<0$	$f(-1)>0$ $f(0)>0$ $f(1)>0$	$f(-1)=0$ $f(0)=0$ $f(1)=0$

Para cada expresión simbólica, si la expresión se cumple para la curva del comienzo de la columna escriba sí en el recuadrito adyacente. En caso contrario escriba no. (Se supone que todas las curvas de esta página tienen por nombre f).

				
$f(a) > f(b)$ ☐	$f(a) > f(b)$ ☐	$f(a) > f(b)$ ☐	$f(a) > f(b)$ ☐	$f(a) > f(b)$ ☐
$f(a) < f(b)$ ☐	$f(a) < f(b)$ ☐	$f(a) < f(b)$ ☐	$f(a) < f(b)$ ☐	$f(a) < f(b)$ ☐
$f(a) \leq f(b)$ ☐	$f(a) \leq f(b)$ ☐	$f(a) \leq f(b)$ ☐	$f(a) \leq f(b)$ ☐	$f(a) \leq f(b)$ ☐
$f(a) \geq f(b)$ ☐	$f(a) \geq f(b)$ ☐	$f(a) \geq f(b)$ ☐	$f(a) \geq f(b)$ ☐	$f(a) \geq f(b)$ ☐
$f(a) = f(b)$ ☐	$f(a) = f(b)$ ☐	$f(a) = f(b)$ ☐	$f(a) = f(b)$ ☐	$f(a) = f(b)$ ☐

		
$f(b) > f(a)$ ☐	$f(b) > f(a)$ ☐	$f(b) > f(a)$ ☐
$f(a) > f(b)$ ☐	$f(a) > f(b)$ ☐	$f(a) > f(b)$ ☐
$f(a) > a$ ☐	$f(a) > a$ ☐	$f(a) > a$ ☐
$f(a) > b$ ☐	$f(a) > b$ ☐	$f(a) > b$ ☐
$f(b) > a$ ☐	$f(b) > a$ ☐	$f(b) > a$ ☐
$f(b) > b$ ☐	$f(b) > b$ ☐	$f(b) > b$ ☐
$f(a) = a$ ☐	$f(a) = a$ ☐	$f(a) = a$ ☐
$f(b) = b$ ☐	$f(b) = b$ ☐	$f(b) = b$ ☐
$f(a) = b$ ☐	$f(a) = b$ ☐	$f(a) = b$ ☐
$f(b) = a$ ☐	$f(b) = a$ ☐	$f(b) = a$ ☐

Preparado por el profesor Luis Millán
Imágenes y textos tomados del libro
Métodos de Graficación
del profesor Pedro Alson
Buenos Aires 08/10/2019