Historische Aspekte der Analysis – dynamisch visualisiert

Hans-Jürgen Elschenbroich

Es werden historische Zugänge zur Analysis als Infinitesimalrechnung, dem Rechnen mit infinitesimalen Objekten, thematisiert und visualisiert. LEIBNIZ, PASCAL und CAVALIERI dachten in und rechneten mit Differenzialen und Indivisiblen. Ihre Arbeiten und auch die LEIBNIZ'schen Schreibweisen gaben damals der Mathematik einen enormen Schub, sind aber heute weitgehend vergessen und werden meist als unexakt angesehen. Ihre Ansätze sollen hier mit Hilfe von GeoGebra-Lernumgebungen dynamisch visualisiert und unterrichtlich nutzbar gemacht werden.

Kann man unendlich Kleines darstellen?

Etwas unendlich Kleines auf Papier und Bildschirm darzustellen, erscheint auf den ersten Blick als Widerspruch. Dabei haben wir uns längst schon daran gewöhnt, mathematische Objekte wie Punkte, gerade Linien und Funktionsgraphen zu ‚sehen', obwohl niemand im Sinne Euklids einen Punkt oder eine Gerade gesehen hat und je sehen wird:

*„1. Ein **Punkt** ist, was keine Teile hat.*
*2. Eine **Linie** breitenlose Länge.*
3. Die Enden einer Linie sind Punkte.
*4. Eine **gerade Linie (Strecke)** ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleich mäßig liegt.*
*5. Eine **Fläche** ist, was nur Länge und Breite hat." (*EUKLID*)*

Die Zeiten, wo die Mathematiklehrer noch verlangten, dass ein Punkt mit einem sehr spitzen Bleistift durch ein kleines Kreuz markiert wird, sind lange vorbei. Heute werden auf dem Bildschirm Punkte rot, grün oder blau dargestellt, dicker oder dünner, kreisförmig, viereckig oder kreuzförmig. Genau so können auch Geraden und Ebenen farbig und unterschiedlich dick dargestellt werden (in GeoGebra unter *Eigenschaften/Darstellung*).

Die Untersuchung der Steigung von Geraden mit Steigungsdreiecken ist einfach, weil diese unabhängig der Größe des Dreiecks immer den gleichen Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ haben. Zu Beginn der Differenzialrechnung beschäftigte man sich mit der Frage, wie man an gekrümmten Kurven eine Steigung ermitteln kann, wie man ein beliebig kleines Steigungsdreieck darstellen/ veranschaulichen kann.

Differenziale, Differenzialquotient und charakteristisches Dreieck

Differenziale wurden zu LEIBNIZ Zeiten als beliebig kleine, aber von Null verschiedene Objekte verstanden, aus denen dann das Verhältnis, der Differenzialquotient gebildet wurde. So wurde die Steigung der Tangente als Quotient aus derartigen Differenzialen bestimmt, die Existenz der Tangente (im heutigen Sinne: die Eigenschaft der Differenzierbarkeit) wurde damals einfach unterstellt. Die Differenziale *dx* und *dy* als Katheten und *ds* als Hypotenuse bildeten an einem Punkt *P* des Graphen von *f* ein infinitesimales Dreieck, das die Steigung der Kurve bzw. der Tangente festlegte und charakteristisches Dreieck genannt wurde. Dieses infinitesimale Dreieck versuchte schon LEIBNIZ in Verallgemeinerung einer Idee von PASCAL sichtbar machen, indem er es längs der Tangente vergrößert zeichnete und über die Normale ein ähnliches Dreieck bis zur *x*-Achse konstruierte (Abb. 1, Abb. 2).

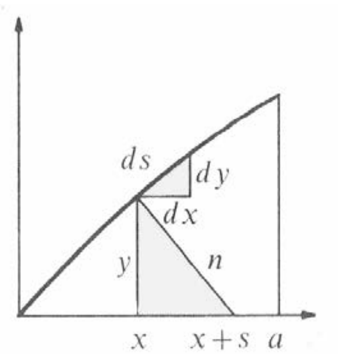


Abb. 1: Das charakteristische Dreieck bei LEIBNIZ (WALTER, 2004, S. 234)

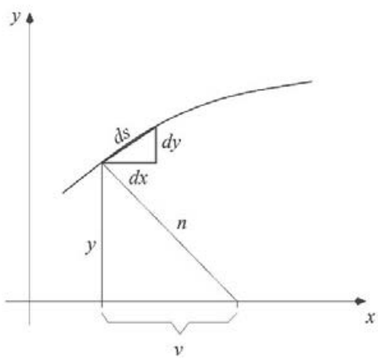


Abb. 2: Das charakteristische Dreieck bei LEIBNIZ (SONAR, 2016, S. 113)

Die Fallstricke dieser statischen Visualisierung offenbaren sich erst auf den zweiten Blick. In beiden Abbildungen ist die Kurve so schwach gekrümmt, dass der Unterschied zwischen dy und Δy, zwischen dem Differenzenquotienten-Dreieck Δx-Δy-Δs an der Sekante und dem Differenzialquotienten-Dreieck dx-dy-ds an der Tangente, nicht augenfällig ist.

Das ist auch in der Originalabbildung von LEIBNIZ so (Abb. 3), der Unterschied zwischen dy und Δy geht in der Strichdicke unter.

Und bei der Abb. 2 von SONAR sieht man noch, dass (entgegen der Ausführung in seinem Text) das Dreieck y-v-n offensichtlich *nicht* ähnlich zum Dreieck dx-dy-ds ist (und auch nicht ähnlich zum Dreieck Δx-Δy-Δs). Der Fehler liegt wohl darin, dass die Strecke n hier nicht orthogonal zur Tangente ist, also keine Normale ist.

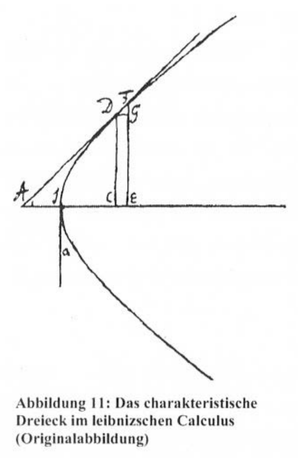


Abb. 3: Das charakteristische Dreieck bei LEIBNIZ (WITZKE, 2009, S. 72)

Mit den Möglichkeiten dynamischer Software (hier GeoGebra) kann man diese statischen Visualisierungen dynamisieren und die wesentlichen Aspekte und Unterschiede einblendbar machen. Hierbei wird als Black Box genutzt, dass man mit dem Werkzeug GeoGebra an differenzierbare Funktionen an passender Stelle eine Tangente zeichnen kann. Dies entspricht in moderner Form der seinerzeitigen intuitiven (und aus heutiger Sicht naiven) Annahme, dass Tangenten an Kurven immer existieren.

In der dynamischen Visualisierung kann man die Funktion *f*, den Punkt *P* und Δx verändern. Damit können wir

- entlang der Tangente eine Vergrößerung des infinitesimalen charakteristischen Dreiecks *dx-dy-ds* zeichnen (orange gefüllt),
- im (vergrößerten) charakteristischen Dreieck ein Sekantendreieck einzeichnen (magenta schraffiert),
- und die Vergrößerung/ Verkleinerung über einen Schieberegler Δx steuern (ELSCHENBROICH, 2018).

Dabei wird dann sowohl der Unterschied zwischen den Dreiecken Δx-Δy-Δs und *dx-dy-ds* sichtbar (für große Δx, Abb. 4) als auch die Annäherung des Dreiecks Δx-Δy-Δs an *dx-dy-ds* (für kleine Δx, Abb. 5). Hierbei ist die Funktionenlupe (ELSCHENBROICH 2015) sehr hilfreich zur Visualisierung.

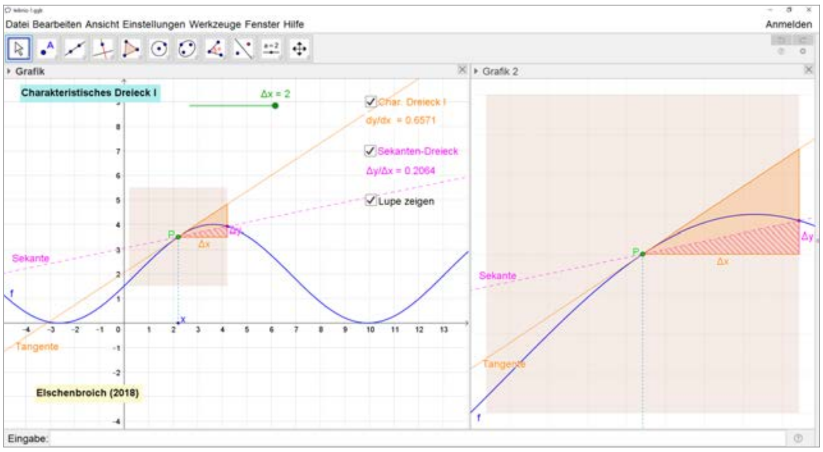


Abb. 4: Charakteristisches Dreieck und Sekantendreieck für $\Delta x = 2$

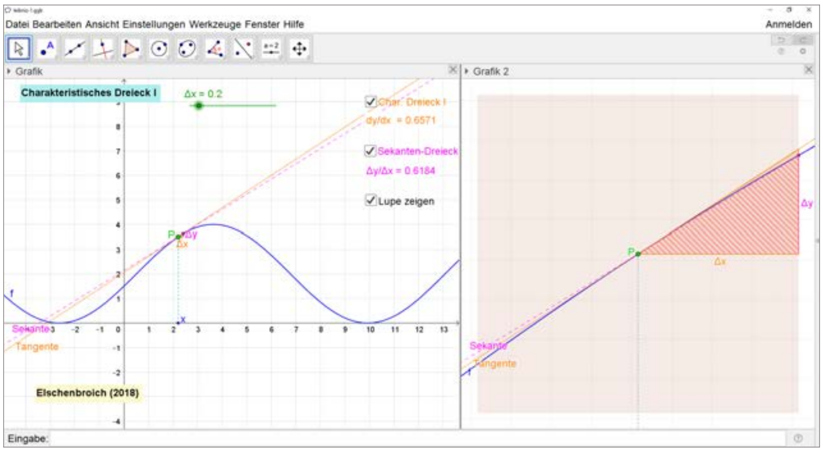


Abb. 5: Charakteristisches Dreieck und Sekantendreieck für $\Delta x = 0.2$

In der klassischen statischen Visualisierung können wir wie in Abb. 1 das charakteristische Dreieck entlang der Normalen bis zur x-Achse vergrößern, so dass es nun bei Verkleinerung von Δx unverändert bleibt (Abb. 6).

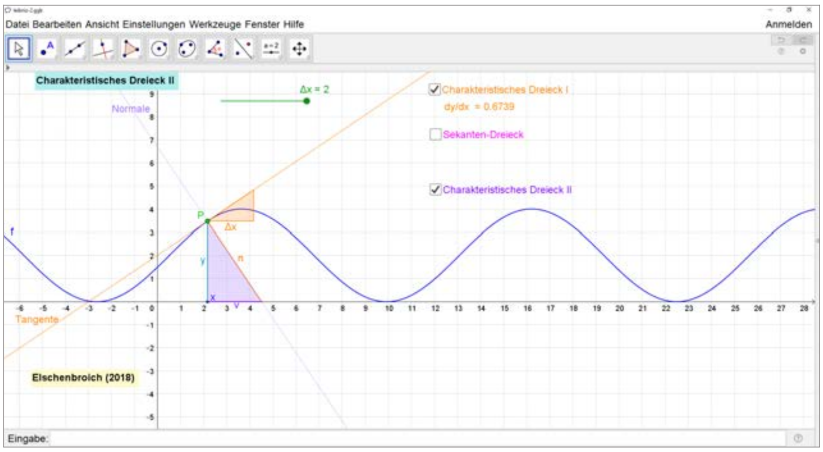


Abb. 6: Charakteristisches Dreieck *y*-*v*-*n*

Gleichgültig, ob das charakteristische Dreieck mit der Funktionenlupe modern dynamisch nach Abb. 4 oder klassisch nach Abb. 6 visualisiert worden ist, haben wir so die Möglichkeit, etwas infinitesimal Kleines zu veranschaulichen, uns vorzustellen. In Kombination mit dem Schieberegler Δx bietet der Ansatz aus Abb. 5 mit der Funktionenlupe auch die Möglichkeit, den Grenzprozess $\Delta x \to 0$ zu visualisieren. Natürlich wird mathematisch kein echter Grenzprozess $\Delta x \to 0$ durchgeführt, denn der Schieberegler endet bei einem kleinen Wert für Δx, hier $\Delta x \to 0 = 0.0001$. Dies ist aber völlig ausreichend, um bei Schülern ein anschauliches Grundverständnis aufzubauen. Und es ist nach meinem Dafürhalten deutlich anschaulicher als die ‚Unendlichkeitsbrille' der Nonstandard-Analysis, wo mit einem infiniten Faktor vergrößert werden muss (BAUMANN & KIRSKI, 2016, S. 10).

Indivisible und Flächeninhalt

Die Vorstellung, dass Objekte aus ‚Indivisiblen', aus unteilbar kleinsten Größen bestehen, stammt von den antiken Atomisten und wurde in der Entwicklung der Integralrechnung insbesondere von CAVALIERI vertreten, woran LEIBNIZ anknüpfte:

> *„Die Indivisiblen sind unendlich dünne Gebilde, die eine um Eins kleinere Dimension besitzen als das von ihnen in ihrer Gesamtheit gebildete stetige Ganze."* (WUSSING, 1979, S. 159).

Dabei stehen wir nun vor dem Problem, nicht nur beliebig kleine Objekte darzustellen, sondern auch noch beliebig viele davon. In der Visualisierung arbeiten wir dann mit ‚ziemlich vielen' und ‚ziemlich kleinen' Objekten.

Wir stellen uns Flächen aus unendlich vielen, unendlich dünnen parallelen ‚rechteckigen Streifen' zusammengesetzt vor. Bei Flächen unter Funktionsgraphen hat ein solcher ‚rechteckiger Streifen' das Differenzial *dx* als ‚Breite' und f(x) als ‚Höhe' und infolgedessen dann den ‚Flächeninhalt' $dy = f(x) \cdot dx$. Summiert man alle diese Streifen auf, erhält man die gesamte Fläche (Abb. 7, Abb. 8). Die Indivisiblen haben ein Janus-Gesicht:

> *„Each of the indivisibles is simultaneously viewed as a one-dimensional line segment and as an infinitesimally thin two-dimensional rectangle. The indivisible at point x has height f(x) and width dx (using what would be Leibniz' notation from the late 1600s). Therefore it had area f(x)dx." (OTERO 2000)*

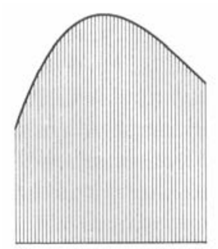


Abb. 7: CAVALIERIS Indivisiblen-methode (WALTER, 2004, S. 193)

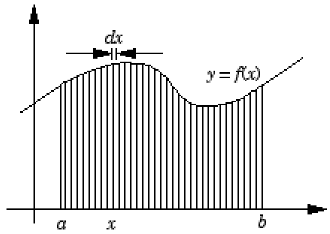


Abb. 8: CAVALIERIS Indivisiblenmethode (OTERO, 2000)

Die Dynamisierung von Abb. 7, Abb. 8 führen wir hier am Beispiel eines halben Einheitskreises und der Funktion f mit $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, -1 ≤ x ≤ 1, durch (natürlich können auch andere Funktionen eingegeben werden). Um das Prinzip zu verstehen, gibt es eine Anzahl n der Unterteilungen, die automatisch den Wert Δx festlegt, und wir betrachten n Rechtecke $f(x)\cdot\Delta x$, zunächst für kleine n und zugehörige große Δx. Die Dynamisierung erfolgt dadurch, dass dieser Wert von n verändert, insbesondere vergrößert werden kann. Man sieht für zunächst kleine n deutlich, dass wir hier äquidistante Mittensummen haben (Abb. 9). Links und rechts am Rande des Definitionsbereichs ist $f(x)=0$. Einen besonderen Effekt können wir neben dem Erhöhen von n auch noch dadurch erzielen, dass wir den Halbkreis dynamisch von links nach rechts füllen lassen (ELSCHENBROICH & SEEBACH, 2018, S. 91).

Eine andere Möglichkeit, sich einen Kreis aus indivisiblen Objekten zusammengesetzt vorzustellen, besteht darin, konzentrische Kreislinien der ‚Breite' *dx* zu wählen (Abb. 10).

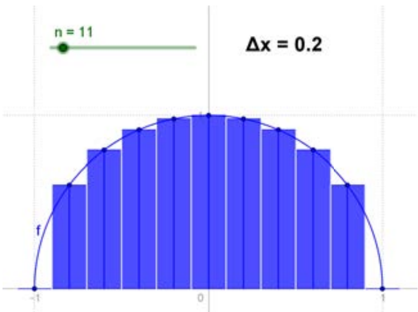


Abb. 9: Halbkreis und achsenparallele Streifen als Indivisible

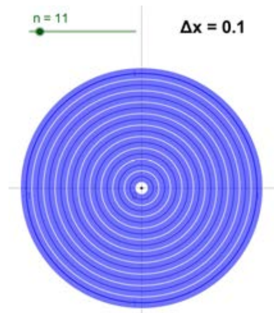


Abb. 10: Vollkreis und konzentrische Kreislinien als Indivisible

Solche nichtparallelen Objekte können aber auch Probleme mit sich bringen, wie aus klassischen Paradoxien bekannt ist (TOEPLITZ 1949, S. 57-58). Dass man dies hier korrekt durchführen kann, erklärt sich anschaulich dadurch, dass man die Kreisringe ‚aufschneiden' kann und nebeneinander ‚aufgestellt' als senkrechte parallele Indivisible zu einer Funktion g mit $g(x)=2\pi x$ sehen kann. Allgemein kann sagen, dass man auf einigermaßen sicherem Terrain ist, wenn die Indivisiblen parallel sind und man mit dem gleichen Inkrement arbeitet.

CAVALIERI und LEIBNIZ navigierten in einer Mischung aus Erfahrung und Intuition durch unsicheres Gelände. So schrieb TOEPLITZ über CAVALIERI und seinen Umgang mit Indivisiblen: „Er blieb auf seinen ‚guten Instinkt' angewiesen." (TOEPLITZ, S. 58) und WUSSING formulierte: „LEIBNIZ war sich der Unbestimmtheiten und logischen Widersprüchlichkeiten seines Differentialbegriffs und des Umgangs mit ‚unendlich kleinen Größen' sehr wohl bewußt." (WUSSING S. 174). Das war nicht jedem ihrer Zeitgenossen gegeben. Dass aber LEIBNIZ sehr wohl wusste, was er tat, zeigt sein erst 2016 veröffentlichter Text von 1676, in dem er schon die Grundidee der modernen Epsi-lontik vorwegnahm. Er formulierte dort, dass sich der Wert der Rechtecksumme vom Wert des Integrals „um eine Quantität unterscheidet, die kleiner ist als eine beliebige gegebene." (LEIBNIZ, zitiert nach ULLRICH 2017, S. 24).

Noch mehr Indivisible

So wie man bei den parallelen Strecken-Indivisiblen als Bildmetapher an einen Boden mit Dielen denken kann, so kann man bei einer Linie und Punkt-Indivisiblen an eine Kette aus Perlen denken und bei Körpern und Flächen-Indivisiblen an einen Stapel Papier. Auch ist eine Computertomographie ein modernes Beispiel, wo ein Kopf in 2 mm dicken parallelen Schichten aufgenommen wird und diese dann zusammen ein dreidimensionales Bild ergeben.

Wenn wir die Indivisiblen aus Abb. 9 um die *x*-Achse rotieren lassen, entstehen aus den ‚Streifen' $f(x)\cdot dx$ durch die Rotation um die *x*-Achse zylindrische ‚Scheiben' $\pi f^2(x)\cdot dx$ (die zwangsläufig parallel sind) als neue Indivisible für die Kugel (Abb. 11).

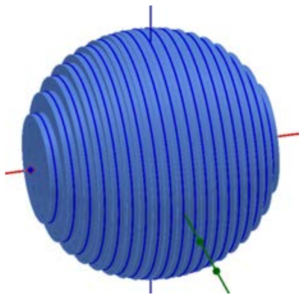


Abb. 11: Kugel und zur *x*-Achse orthogonale ‚Scheiben' $\pi f^2(x)\cdot dx$ als Indivisible

So erhalten wir für das Volumen der Einheitskugel in der Summe all dieser Indivisiblen $\sum\limits_{omn.} \pi f^2(x)\cdot dx = \int\limits_{-1}^{1} \pi\left(1-x^2\right)dx = \frac{4}{3}\pi$. In der Schreibweise lassen wir uns dabei von LEIBNIZ und CAVALIERI inspirieren und schreiben in der Summation *omnia* (*omn.*). LEIBNIZ rechnete mit Differenzialen wie mit reellen Zahlen, insbesondere Quotienten (SONAR, S. 406), Produkten und Summen.

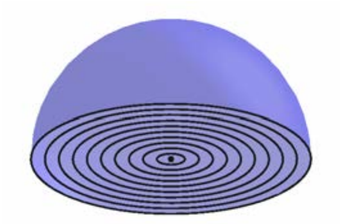


Abb. 12: Halbkugel und konzentrische Sphären *dx* als Indivisible

Ein anderer Ansatz, sich die Kugel aus nicht-parallelen Indivisiblen bestehend vorzustellen, ist eine Verallgemeinerung von Abb. 10. Als Indivisible nehmen wir hier konzentrische Sphären, Kugelschalen der Dicke *dx*. Damit man aber etwas sehen kann, beschränken wir uns auf die halbe Einheitskugel und schauen von unten auf die Grundfläche (Abb. 12). Damit erhalten wir für das Volumen: $\sum_{omn.} 2\pi x^2 \cdot dx = \int_0^1 2\pi x^2 dx = \frac{2}{3}\pi$.

Das Potential der LEIBNIZschen Schreibweise und Denkweise zeigt sich besonders schön bei der Berechnung der Kurvenlänge. Den Graphen von f stellen wir uns dazu aus indivisiblen Kurvenstückchen $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$ bestehend vor (COLERUS 1934, S. 267), die alle aufsummiert die Kurve ergeben.

$$\sum_{omn.} ds = \sum_{omn.} \sqrt{dx^2+dy^2} = \sum_{omn.} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \; .$$

Mit Differenzialen & Indivisiblen rechnen

LEIBNIZ schuf Schreibweisen und Bezeichnungen für den Differenzialquotienten und das Integral, die sich über Jahrhunderte erhalten und bewährt haben. Er strebte nach einer formalen Universalsprache und hat durch geniale Wahl seiner Symbole ein Kalkül geschaffen, „so dass das Rechnen mit den Symbolen fast von selbst funktioniert“ (SONAR 2016, S. 406).

> *„Bei den Bezeichnungen ist darauf zu achten, daß sie für das Erfinden bequem sind. Dies ist am meisten der Fall, so oft sie die innerste Natur der Sache mit Wenigem ausdrücken und gleichsam abbilden. So wird nämlich auf wunderbare Weise die Denkarbeit vermindert."* (LEIBNIZ, zitiert nach WUSSING, S. 173)

Der LEIBNIZsche Kalkül bietet die Möglichkeit, einfach und intuitiv Ableitungsregeln und Integrationsregeln zu formulieren. Beispielhaft seien hier genannt:

Summenregel: $d(u \pm v) = du \pm dv$,

Kettenregel: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$, Ableitung der Umkehrfunktion: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$,

Substitutionsregel: $\int f(u) \cdot \frac{du}{dx} dx = \int f(u) du$.

Differenziale & Indivisible heute und ihr didaktisches Potential

Differenziale und Indivisible als Objekte sind wegen des nebulösen und nicht unproblematischen Umgangs mit dem Unendlichen heute weitgehend aus Analysis in Schule und Hochschule verschwunden.

Zwar ist in der englischsprachigen Literatur das Symbol $\frac{dy}{dx}$ für die Ableitung/Steigung gängig, es findet sich auch im Menü des CAS-Programms TI-Nspire (Abb. 13). Aber heute wird in der Regel dem Differenzialquotienten die Quotienten-Eigenschaft abgesprochen, indem man ihn als *ein* unteilbares Symbol, als bloße Schreibfigur sieht. Deswegen soll er „auch nicht als Bruch von zwei reellen Zahlen verstanden werden, sondern ist nur als Ganzes sinnvoll. $\frac{dy}{dx}$ wird auch nicht ‚*dy durch dx*' gelesen, sondern ‚*dy nach dx*' " (KRONFELLNER, S. 81).

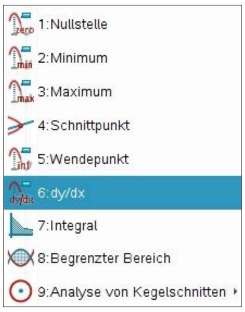
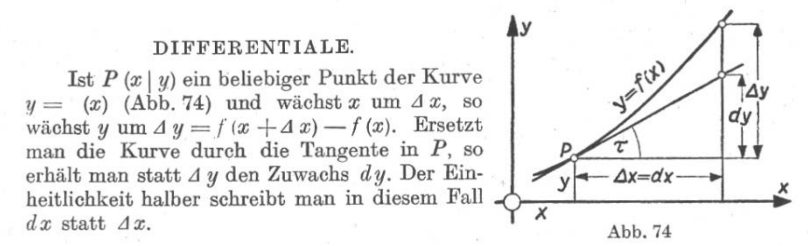


Abb. 13: TI-Nspire: Menü Graph analysieren

Beim Integral ist es ähnlich. Den Ausdrücken $f(x)\cdot dx$ wird die Produkt-Eigenschaft abgesprochen und das Symbol $\int f(x)\,dx$ wird als *Integral von* f *nach* dx gelesen. Hier wird eine Pseudoexaktheit exerziert, die oberflächlich mehr Korrektheit bringt, aber nicht mehr Klarheit und Verständnis.

Wie kann man Differenzialen und Indivisiblen auch heute mathematisch und didaktisch Sinn geben?

Früher wurde von Differenzialen ausgehend der Differenzialquotient und damit die Steigung der Tangente, der Wert $f'(x)$ bestimmt. Wenn man heute in der Näherungsrechnung mit Differenzialen arbeitet, so erhält man von der Ableitung $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ ausgehend $dy = f'(x)\cdot dx$ (Abb. 14).


DIFFERENTIALE.

Ist $P\,(x \mid y)$ ein beliebiger Punkt der Kurve $y =\ (x)$ (Abb. 74) und wächst x um Δx, so wächst y um $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Ersetzt man die Kurve durch die Tangente in P, so erhält man statt Δy den Zuwachs dy. Der Einheitlichkeit halber schreibt man in diesem Fall dx statt Δx.

Abb. 74

Abb. 14: Differenziale (LAMBACHER & SCHWEIZER 1950, S. 102)

Weiter ist dann $dx = \Delta x$ und wir können damit $\frac{dy}{dx}$ tatsächlich als Quotienten von diesen Differenzialen handhaben (MANGOLDT & KNOPP 1968, S. 68f). Diese Differenziale sind dann aber nicht mehr ‚unendlich klein'. Für immer kleineres Δx nähert sich dann Δy immer mehr dy an.

Für die Indivisiblen kann man die RIEMANNsche Integral-Definition mit ‚passenden' Zwischenpunkten ξ_i für Zerlegungen Z des Intervalls [a, b] aufgreifen. Hier hätten wir die spezielle Situation, dass die Zerteilung äquidistant ist und die ξ_i immer in der Mitte des Intervalls sitzen (Abb. 15).

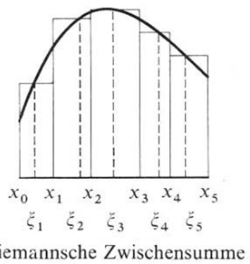


Abb. 15: RIEMANNsche Zwischensummen (WALTER 2004, S. 203)

Die Denkweise von LEIBNIZ hat auch heute noch ein didaktisches Potential:

a) Sie ist geistesgeschichtlich und mathematikgeschichtlich interessant:
   - Woher haben Differenzialrechnung und Differenzialquotient ihren Namen?
   - Woher kommt die Differenzial- und die Integral-Schreibweise?

b) Sie ermöglicht in der dynamischen Visualisierung einen genetischen Zugang zu Grundvorstellungen und zentralen Ideen der Analysis.

c) Man kann damit einfach Ableitungs- und Integrationsregeln finden.

Zu guter Letzt

Ich greife historische Ideen und Ansätze auf, insbesondere von LEIBNIZ und CAVALIERI, und versuche sie mit digitalen Werkzeugen für den modernen Unterricht nutzbar zu machen. Dies hat nicht den Exaktheits-Anspruch eines mathematikhistorischen Aufsatzes, sondern ist mehr ein Crossover.

Ich danke Frau Dr. CHARLOTTE WAHL von der Gottfried Wilhelm Leibniz Bibliothek für wichtige und hilfreiche Hinweise, die ich hier nicht vorenthalten möchte:

I. LEIBNIZ' Monaden sind zwar unteilbar kleinste Teilchen, aber seine Differenziale (und auch Produkte, die dann infinitesimal schmale Flächenelemente ergeben) sind es nicht, denn die sind teilbar (man kann 0.5dx schreiben). Hier unterscheiden sich CAVALIERI und LEIBNIZ.

II. Paradoxien im Umgang mit Indivisiblen entstehen, wenn man wie CAVALIERI keine Breite annimmt. Wenn man aber wie LEIBNIZ eine infinitesimale, aber wohlbestimmte Breite *dx* annimmt, dann rechnet man mit Flächeninhalten und hat das Problem nicht.

III. Meine Schreibweise $\sum\limits_{omn.}$ ist ein mathematikhistorisches Medley. Das Summenzeichen geht auf EULER zurück. Die Abkürzung *omn.* für *omnia* stammt von CAVALIERI. LEIBNIZ hat das große Sigma nicht als Summenzeichen verwendet, sondern anfangs nur das Wort *omn.* Er hat auch nicht "*omn.*" in Zusammenhang mit "*dx*" verwendet, sondern "*omn. l*" für "alle Linien l" geschrieben. Später hat LEIBNIZ für die Summation dann das lange stilisierte S für *summa*, das Integralzeichen $\int$, entwickelt.

IV. Ich habe beim Ausdruck $f(x)\cdot dx$ sowohl die Sichtweise von CAVALIERIs Indivisiblen als auch von LEIBNIZ‘ Differentialen gesehen und dazwischen gewechselt. LEIBNIZ‘ Differentiale (oder auch ihre Produkte) sind genau genommen keine Indivisiblen, weil sie im Gegensatz zu CAVALIERIs Größen teilbar sind. LEIBNIZ hat sie auch selbst nicht so genannt und nur einmal nennt er sie eine unendlich kleine Größe „*minima seu indivisibilis*“.

V. Man muss unterscheiden zwischen CAVALIERIs Definition, wo Indivisible Linien in einer Fläche sind, und späteren Definitionen, wo Indivisiblen (besser spricht man dann von Infinitesimalen) eine unendlich kleine Breite zugestanden wird. CAVALIERI war mit den Indivisiblen sehr bewusst umgegangen, nur ganz bestimmte Operationen waren erlaubt. Ist man weniger vorsichtig, wie seine

Nachfolger und Kritiker, dann stößt man schnell auf Paradoxien. Deshalb ist man dann zu Infinitesimalen übergegangen. Der Vorteil einer Breite - auch wenn sie unendlich klein ist - ist, dass man sie z. B. halbieren kann.

Literatur

Baumann, P. & Kirski, T. (2016): Analysis mit hyperreellen Zahlen. In: Mitteilungen der GDM 100. https://didaktik-der-mathematik.de/pdf/gdm-mitteilungen-100.pdf

Elschenbroich, H.-J. (2018): Leibniz Calculus. GeoGebra Book. https://www.geogebra.org/m/hymsqdyg

Elschenbroich, H.-J. (2015): Die interaktive Funktionenlupe - Ein neuer Vorschlag zur visuellen Vermittlung von Grundvorstellungen der Analysis. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2015. https://eldorado.tu-dortmund.de/ bitstream/2003/34522/1/BzMU_2015_Band_1.pdf

Elschenbroich, H.-J. & Seebach, G. (2018): Funktionen erkunden. Ideenreiche Arbeitsblätter mit GeoGebra. Friedrich Verlag, Velber

Euklid: Die Elemente. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Band 235 (1997). Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt a. M.

Kronfellner, M. (1998): Historische Aspekte im Mathematikunterricht. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien

Lambacher, T. & Schweizer, W. (1950): Lambacher-Schweizer Teil III/I, Analysis. Klett, Stuttgart

v. Mangoldt, H. & Knopp, K. (1968): Eine Einführung in die höhere Mathematik. Zweiter Band. 13. Auflage. Hirzel, Stuttgart

Otero, D. E. (2000): Buonaventura Cavalieri. http://cerebro.xu.edu/math/math147/ 02f/cavalieri/cavintro.html

Sonar, T. (2016): Der Prioritätsstreit zwischen Leibniz und Newton. In: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Akademievorlesungen Februar – März 2016. Band 1 (Hamburger Akademievorträge). http://hup.sub.uni-hamburg.de/volltexte/2017/ 171/chapter/HamburgUP_ADW_01_Leibniz_Sonar_Prioritaetsstreit.pdf

Toeplitz, O. (1949): Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Erster Band. Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg

Ullrich, P. (2017): Das Manuskript von Leibniz aus dem Jahre 1676 über Infinitesimalrechnung. In: Der Mathematikunterricht Heft 3/ 2017. Friedrich Verlag, Velber

Walter, W. (2004): Analysis 1. 7. Auflage, Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg

Witzke, I. (2009): Die Entwicklung des Leibnizschen Calculus. Verlag Franzbecker, Berlin, Hildesheim.

Wußing, H. (1979): Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften