Die Funktion f, mit

$$f(x) = -\frac{1}{10}x^3 + \frac{13}{10}x^2 - 3x$$

besitzt einen Hochpunkt H.

Die lineare Funktion t_H ist die Tangente am Graphen der Funktion f durch den Punkt H.

Die beiden Punkte A und B befinden sich ebenfalls auf dem Graphen von f.

Für die x-Koordinate von A gilt

$$x_A = x_H - a, a \in \mathbb{R}^+$$

Für die x-Koordinate von B gilt

$$x_B = x_H + a, a \in \mathbb{R}^+$$

Die lineare Funktion t_A ist die Tangente am Graphen der Funktion f durch den Punkt A.

Die lineare Funktion t_B ist die Tangente am Graphen der Funktion f durch den Punkt B.

a) Bestimmen Sie rechnerisch den Hochpunkt von f. Zur Kontrolle und zum Weiterrechnen: $H = \left(\frac{\sqrt{79}+13}{3}, \frac{79\sqrt{79}+442}{135}\right)$ $\approx (7.296064805772, 8.475313770133)$	1 f(x):=-1/10*x^3+13/10x^2-3x $\rightarrow f(x) := \frac{-1}{10} x^3 + \frac{13}{10} x^2 - 3x$ 2 f'(x)=0 $\rightarrow \frac{-3}{10} x^2 + \frac{13}{5} x - 3 = 0$ 3 Löse($2,x) $\rightarrow \left\{ x = \frac{-\sqrt{79}+13}{3}, x = \frac{\sqrt{79}+13}{3} \right\}$ 4 $3 $\approx \{x = 1.3706018609, x = 7.2960648058\}$ 5 f'({1,2,8}) $\rightarrow \left\{ \frac{-7}{10}, 1, \frac{-7}{5} \right\}$

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Punkte A und B durch

$$A := \left(\frac{-3\,a+\sqrt{79}+13}{3}, \frac{27\,a^3-27\,a^2\,\sqrt{79}+158\,\sqrt{79}+884}{270}\right)$$

$$B := \left(\frac{3\,a+\sqrt{79}+13}{3}, \frac{-27\,a^3-27\,a^2\,\sqrt{79}+158\,\sqrt{79}+884}{270}\right)$$

gegeben sind.

c) Bestimmen Sie rechnerisch die Funktionsgleichungen der Tangenten t_H, t_A, t_B.

Zur Kontrolle und zum Weiterrechnen:

$$t_H(x) := \frac{1}{135}\left(79\,\sqrt{79}+442\right)$$

$$t_A(x) := \frac{-1}{5}\,a^3-\frac{3}{10}\,a^2\,x-\frac{1}{10}\,a^2\left(-2\,\sqrt{79}-13\right)+\frac{1}{5}\,\sqrt{79}\,a\,x-\frac{1}{15}\,a\left(13\,\sqrt{79}+79\right)-\frac{1}{135}\left(-79\,\sqrt{79}-442\right)$$

$$t_B(x) := \frac{1}{5}\,a^3-\frac{3}{10}\,a^2\,x+\frac{1}{10}\,a^2\left(2\,\sqrt{79}+13\right)-\frac{1}{5}\,\sqrt{79}\,a\,x+\frac{1}{15}\,a\left(13\,\sqrt{79}+79\right)+\frac{1}{135}\left(79\,\sqrt{79}+442\right)$$

12 T(x_0,x):=f(x_0)+f'(x_0)*(x-x_0)

$$\rightarrow\ T(x_0,x) := \frac{1}{5}\,x_0^3-\frac{3}{10}\,x_0^2\,x-\frac{13}{10}\,x_0^2+\frac{13}{5}\,x_0\,x-3\,x$$

13 t_H(x):=T(x(H),x)

$$\rightarrow\ t_H(x) := \frac{1}{135}\left(79\,\sqrt{79}+442\right)$$

14 t_A(x):=T(x_A,x)

$$\rightarrow\ t_A(x) := \frac{-1}{5}\,a^3-\frac{3}{10}\,a^2\,x-\frac{1}{10}\,a^2\left(-2\,\sqrt{79}-13\right)+\frac{1}{5}\,\sqrt{79}\,a\,x-\frac{1}{15}\,a\left(13\,\sqrt{79}+79\right)-\frac{1}{135}\left(-79\,\sqrt{79}-442\right)$$

15 t_B(x):=T(x_B,x)

$$\rightarrow\ t_B(x) := \frac{1}{5}\,a^3-\frac{3}{10}\,a^2\,x+\frac{1}{10}\,a^2\left(2\,\sqrt{79}+13\right)-\frac{1}{5}\,\sqrt{79}\,a\,x+\frac{1}{15}\,a\left(13\,\sqrt{79}+79\right)+\frac{1}{135}\left(79\,\sqrt{79}+442\right)$$

d) Bestimmen Sie rechnerisch die Schnittpunkte S_1 von t_A und t_H und S_3 von t_B und t_H. Zur Kontrolle und zum Weiterrechnen: $S_1 := \left(\frac{-6a^2+6a\sqrt{79}+39a-26\sqrt{79}-158}{9a-6\sqrt{79}}, \frac{79\sqrt{79}+442}{135}\right)$ $S_3 := \left(\frac{6a^2+6a\sqrt{79}+39a+26\sqrt{79}+158}{9a+6\sqrt{79}}, \frac{79\sqrt{79}+442}{135}\right)$	Löse(t_A(x)=t_H(x)) 16 $\rightarrow \left\{x = \frac{-6a^2-\left(-6\sqrt{79}-39\right)a-26\sqrt{79}-158}{9a-6\sqrt{79}}\right\}$ S_1:=Ersetze((x, t_H(x)),$16) 17 $\rightarrow S_1 := \left(\frac{-6a^2+6a\sqrt{79}+39a-26\sqrt{79}-158}{9a-6\sqrt{79}}, \frac{79\sqrt{79}+442}{135}\right)$ Löse(t_B(x)=t_H(x)) 18 $\rightarrow \left\{x = \frac{6a^2+\left(6\sqrt{79}+39\right)a+26\sqrt{79}+158}{9a+6\sqrt{79}}\right\}$ S_3:=Ersetze((x, t_H(x)),$18) 19 $\rightarrow S_3 := \left(\frac{6a^2+6a\sqrt{79}+39a+26\sqrt{79}+158}{9a+6\sqrt{79}}, \frac{79\sqrt{79}+442}{135}\right)$
e) Auch die Tangenten t_A und t_B haben einen gemeinsamen Schnittpunkt. (1) Bestimmen Sie rechnerisch den Schnittpunkt S_2 der beiden Tangenten t_A und t_B.	Löse(t_A(x)=t_B(x)) 20 $\rightarrow \left\{x = \frac{\sqrt{79}}{79}a^2+\frac{\sqrt{79}+13}{3}\right\}$ Vereinfache(Ersetze(t_A(x),$20)) 21 $\rightarrow -3\cdot\frac{\sqrt{79}}{790}a^4+\frac{\sqrt{79}}{10}a^2+\frac{79\sqrt{79}+442}{135}$ S_2:=Ersetze((x, $21),$20) 22 $\rightarrow S_2 := \left(\frac{3a^2\sqrt{79}+79\sqrt{79}+1027}{237}, \frac{-81a^4\sqrt{79}+2133a^2\sqrt{79}+12482\sqrt{79}+69836}{21330}\right)$

(2) Die Punkte S_1, S_2 und S_3 bilden für bestimmte Werte von a ein Dreieck oberhalb des Graphen von t_H. S_2 oberhalb vom Graphen von t_H liegt.	21 $\rightarrow -3 \cdot \frac{\sqrt{79}}{790} a^4 + \frac{\sqrt{79}}{10} a^2 + \frac{79\sqrt{79}+442}{135}$ 22 S_2:=Ersetze((x, $21),$20) $\rightarrow S_2 := \left(\frac{3 a^2 \sqrt{79} + 79\sqrt{79} + 1027}{237}, \frac{-81 a^4 \sqrt{79} + 2133 a^2 \sqrt{79} + 12482 \sqrt{79} + 69836}{21330} \right)$ 23 $21 = t_H(0) $\rightarrow \frac{-3}{790} \sqrt{79} a^4 + \frac{1}{10} \sqrt{79} a^2 + \frac{1}{135} (79\sqrt{79} + 442) = \frac{1}{135} (79\sqrt{79} + 442)$ 24 Löse($23) $\rightarrow \left\{ a = \frac{-\sqrt{237}}{3}, a = 0, a = \frac{\sqrt{237}}{3} \right\}$ 25 Element($24,3) $\rightarrow a = \frac{\sqrt{237}}{3}$ 26 Numerisch($25) $\rightarrow a = 5.1316014394$
f) Der Flächeninhalt des entstandenen Dreiecks ist eine Funktion des Parameters a. Bestimmen Sie rechnerisch die Funktionsgleichung der Funktion A_Δ, die jedem Wert des Parameters a den Flächeninhalt des Dreiecks zuordnet. Zur Kontrolle und zum Weiterrechnen: $A_\Delta(a) = \frac{-9a^7 + 474a^5 - 6241a^3}{45\sqrt{79}a^2 - 1580\sqrt{79}}$	26 A_Δ:=1/2*g*h $\rightarrow A_\Delta := \frac{1}{2} g h$ 27 g = Ersetze(x,$18) - Ersetze(x,$16) $\rightarrow g = \frac{12a^3 - 316a}{9a^2 - 316}$ 28 h = $21 - t_H(0) $\rightarrow h = \frac{-3}{790}\sqrt{79}a^4 + \frac{1}{10}\sqrt{79}a^2$ 29 AA_Δ(a):=Ersetze(A_Δ,{$27, $28}) $\rightarrow AA_\Delta(a) := \frac{-9a^7 + 474a^5 - 6241a^3}{45\sqrt{79}a^2 - 1580\sqrt{79}}$

g) Bestimmen Sie rechnerisch den maximal möglichen Flächeninhalt des Dreiecks oberhalb des Graphen von t_H. Auf die Untersuchung der Randwerte darf verzichtet werden.

Zur Kontrolle und zum Weiterrechnen:
Für $a = 3.6856933601$ ist der Flächeninhalt mit $A \approx 8{,}506426608$ maximal.

30 AA'_Δ(a):=Ableitung(AA_Δ(a),a)

$$\rightarrow \mathrm{AA}'_{\Delta}(a) := \frac{-2025\,a^8 + 163530\,a^6 - 4025445\,a^4 + 29582340\,a^2}{2025\sqrt{79}\,a^4 - 142200\sqrt{79}\,a^2 + 2496400\sqrt{79}}$$

31 AA'_Δ(a)=0

$$\rightarrow \frac{-2025\,a^8 + 163530\,a^6 - 4025445\,a^4 + 29582340\,a^2}{2025\sqrt{79}\,a^4 - 142200\sqrt{79}\,a^2 + 2496400\sqrt{79}} = 0$$

32 NLöse($31)

$$\rightarrow \{a = -6.3904527757, a = -5.1316014394, a = -3.6856933601, a = 0, a = 3.6856933601, a = 5.1316014394, a = 6.3904527757\}$$

33 Ersetze(AA_Δ(a),Element($32,5))

$$\rightarrow \frac{57219259366964362855392031015413125995920720724500459334361865938103899595255683}{59787255577884550534852501562500000000000000000000000000000000000000000000000000}\sqrt{79}$$

34 $33

$\approx$ 8.506426608

35 Element($32,5)

$\approx$ a = 3.6856933601