Jak animovat pohyb planety v GeoGebře

6. Plošná, úhlová a obvodová rychlost planety

Žán Pól Kastról

3. srpna 2022

https://www.geogebra.org/m/m3q5cd4r

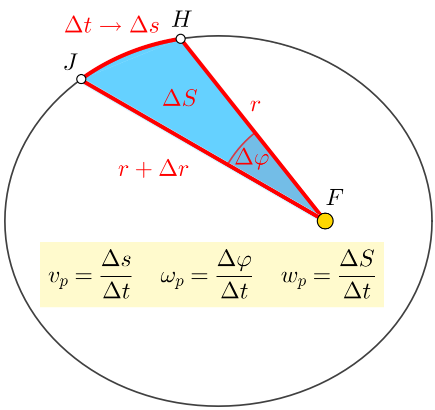
1 Tři rychlosti

Při oběhu planety kolem Slunce můžeme uvažovat tři druhy rychlostí – *obvodovou*, *úhlovou* a *plošnou*.

Planeta za určitou dobu Δt urazí **dráhu** Δs a její průvodič opíše **úhel** $\Delta\varphi$ a **plochu** ΔS (viz obr. 1). **Průměrné** hodnoty příslušných **skalárních** rychlostí jsou definovány takto:

$$v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad \omega_p = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \quad w_p = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Okamžité hodnoty jsou potom jejich limity pro $\Delta t \to 0$:



Obr. 1: Definice průměrných rychlostí planety

https://www.geogebra.org/m/kav2zkrm

$$v = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad \omega = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \quad w = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Jsou to tedy derivace:

$$v = \dot{s}, \quad \omega = \dot{\varphi}, \quad w = \dot{S}$$

2 Plošná rychlost

Pro Δt velmi malé je $|FH| \doteq |FJ| = r$, takže koláč JFH je přibližně kruhová výseč. Eliptický oblouk HJ má proto délku $\Delta s \doteq \Delta\varphi \cdot r$ a ΔS jakožto obsah kruhové výseče má hodnotu $\frac{1}{2}\Delta s \cdot r$, tedy

$$\Delta S = \frac{1}{2} r^2 \cdot \Delta\varphi \tag{1}$$

Odtud

$$w_p = \frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \omega_p \tag{2}$$

A v limitě potom máme pro okamžitou plošnou rychlost:

$$\boxed{w = \frac{1}{2} r^2 \omega} \tag{3}$$

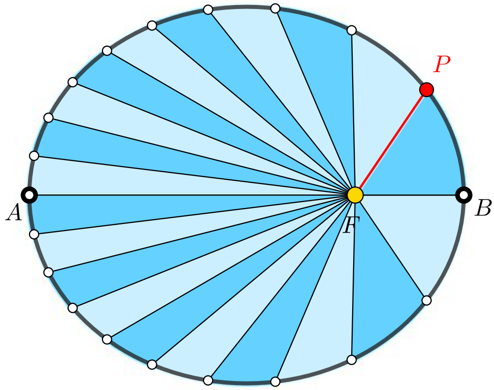
Z druhého Keplerova zákona však také víme, že w je **konstantní** a pro její hodnotu platí

$$\boxed{w = \frac{\pi ab}{T}} \tag{4}$$

To znamená, že ve vztahu (3) se sice r i φ s časem mění, ale součin $r^2\omega$ musí být konstantní.

S použitím pár GeoGebráckých triků a našeho minimálního apletu pro pohyb planety[1] můžeme vytvořit animaci zákona ploch – viz obr. 2.

[1] https://www.geogebra.org/m/tmw4eprz



Obr. 2: Keplerův zákon ploch

https://www.geogebra.org/m/jnkpugtu

3 Úhlová rychlost

Ze vztahu (3) můžeme vyjádřit úhlovou rychlost ω:

$$\boxed{\omega = \frac{2w}{r^2}} \tag{5}$$

Ale pač polární rovnice elipsy velí, aby $r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$, dostáváme

$$\boxed{\omega = \frac{2w(1+\varepsilon\cos\varphi)}{p^2}} \tag{6}$$

Dostali jsme závislost úhlové rychlosti planety na azimutu φ.

Kontrola: Kdy bude ω **maximální**? Vidíme, že maximum nastane, když $\varphi = 0$, pač potom $\cos\varphi = +1$ a v závoře v čitateli přičítáme **kladnou**, největší možnou hodnotu. Ale to sedí („itis siting"), pač $\varphi = 0$ znamená *perihélium*, kde má planeta největší obvodovou rychlost, takže tam zřejmě má i největší úhlovou rychlost.

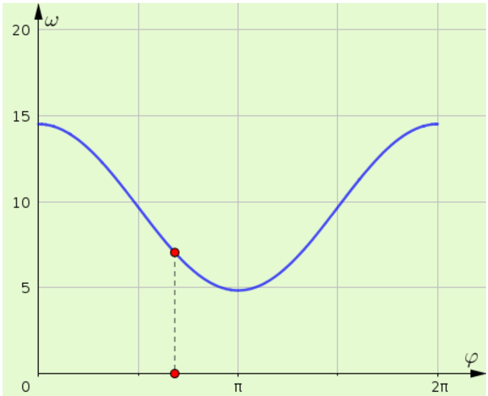
Kdy bude ω **minimální**? Vidíme, že minimum nastane, když $\varphi = \pi$, pač potom $\cos\varphi = -1$ a v závoře v čitateli přičítáme **zápornou**, nejzápornější možnou hodnotu. Ale to opět sedí („itis egejn siting"), pač $\varphi = \pi$ znamená *afélium*, kde má planeta nejmenší obvodovou rychlost, takže tam zřejmě má i nejmenší úhlovou rychlost.

A ještě tohle. Ve speciálním případě by se planeta mohla pohybovat i **rovnoměrně po kružnici**[2]. V tom přídadě by úhlová rychlost měla vyjít $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Vyjde to? Jasně! Pro rovnoměrný pohyb po kružnici je zřejmě $a = b$ a $\varepsilon = 0$. Potom $p = a$ a $w = \frac{\pi a^2}{T}$. Nafrkáme to do (6) a dostáváme:

$$\omega = \frac{2\frac{\pi a^2}{T}(1+0)}{a^2} = \frac{2\pi}{T} \quad \rightarrow \quad \checkmark$$

No a ještě se na vztah (6) pojďme juknout graficky (obr. 3). Krástně vidíme, že se jedná o prach-obyčejnou kosinusoidu, jen trochu posunutou nahóru, no. Maximum a minimum jsou tam, kde jsme je již nalezli úvahou – v *perihéliu* a *féliu*.

[2]Ve Wikipedii se praví: „Pravděpodobnost, že by se nějaké těleso (dlouhodobě) pohybovalo okolo Slunce přesně po kružnici, je nulová, protože kružnice je ideální případ, ke kterému se lze v praxi pouze přiblížit, ale nelze ho dosáhnout." (`https://cs.wikipedia.org/wiki/Keplerovy_z%C3%A1kony`)



Obr. 3: Závislost úhlové rychlosti planety na azimutu φ.

https://www.geogebra.org/m/twzmvqdy

4 Obvodová rychlost

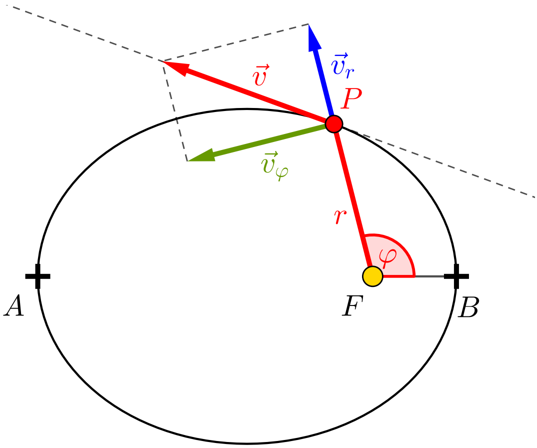
Úhlová a plošná rychlost jsou **vektory** kolmé na rovinu elipsy a jejich směr se nemění, takže se o jejich vektorový karakter nebudeme starat.

Naproti tomu obvodová rychlost jakožto **vektor** má směr tečny a ten se neustále mění. Tak se na to podívejme (obr. 4).

Je rozumné si vektor obvodové rychlosti $\vec{v}$ rozložit do složek ve směru průvodiče FP ($\vec{v}_r$ – radiální složka) a do směru kolmého k průvodiči ($\vec{v}_\varphi$ – azimutální složka). Dá se odvodit, že pro velikosti těchto složek platí[3]:

$$\boxed{v_r = \dot{r}} \tag{7}$$

[3]Vztahy platí obecně pro jakýkoli křivočarý pohyb částice popsané polárními souřadnicemi $[r; \varphi]$



Obr. 4: Složky vektoru obvodové rychlosti.

$$\boxed{v_\varphi = \dot{\varphi} \cdot r = \omega \cdot r} \tag{8}$$

Intuitivně je to jasné:

- $\vec{v}_r$ vyjadřuje, jak rychle se mění vzdálenost r planety od ohniska F. Proto je to derivace r.
- $\vec{v}_\varphi$ vyjadřuje, jak rychle se mění azimut (pravá anomálie) φ. Je to tedy úhlová rychlost ω krát r.

Dle (7) je v_r časovou derivací průvodiče r, který je ale dán polární rovnicí

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi} = p \cdot (1 + \varepsilon \cos\varphi)^{-1} \tag{9}$$

No tak to zderivujem, né?

$$\begin{aligned} v_r = \dot{r} &= -p(1 + \varepsilon\cos\varphi)^{-2} \cdot (-\varepsilon \sin\varphi \cdot \dot{\varphi}) \\ &= \frac{p\dot{\varphi}\varepsilon\sin\varphi}{\underbrace{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}_{(9)\rightarrow\frac{p^2}{r^2}}} = \frac{r^2\dot{\varphi}}{p} \cdot \varepsilon\sin\varphi = \frac{r^2\omega}{p} \cdot \varepsilon \sin\varphi \end{aligned}$$

Ale z (3) máme $r^2\omega = 2w$, takže dostáváme

$$\boxed{v_r = \frac{2w}{p} \cdot \varepsilon \sin \varphi} \tag{10}$$

Dosadíme-li (6) do (8), dostáváme

$$v_\varphi = \omega r = \frac{2w}{r^2} \cdot r = \frac{2w}{r} \tag{11}$$

Sem dosadíme z (9) a dostáváme:

$$\boxed{v_\varphi = \frac{2w}{p} \cdot (1 + \varepsilon \cos \varphi)} \tag{12}$$

Ze složek pomocí *Pýthagorovy věty* snadno získáme velikost vektoru obvodové rychlosti:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = \frac{2w}{p} \sqrt{1 + 2\varepsilon \cos \varphi + \underbrace{\varepsilon^2 \cos^2 \varphi + \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}_{\varepsilon^2}}$$

Tedy

$$\boxed{v = \frac{2w}{p} \sqrt{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos \varphi}} \tag{13}$$

Jaké budou hodnoty v_r, v_φ, v v *perihéliu* a v *aféliu*?

Perihélium A**:** $\varphi = 0 \to \sin \varphi = 0, \cos \varphi = 1$

- $v_r = 0$ (planeta se nevzdaluje ani nepřibližuje ke Slunci)
- v_φ i v zde mají zřejmě **maximum** a rovnají se:

$$\boxed{v_{\varphi A} = v_A = \frac{2w}{p}(1 + \varepsilon)} \tag{14}$$

Přitom dle (11) je také $v_\varphi = \dfrac{2w}{r}$ a díky geometrii elipsy platí, že v *perihéliu* je $r = a - e = a - a\varepsilon = a(1-\varepsilon)$. Proto můžeme psát také:

$$\boxed{v_{\varphi A} = v_A = \frac{2w}{a(1-\varepsilon)}} \tag{15}$$

Afélium B**:** $\varphi = \pi \rightarrow \sin\varphi = 0, \cos\varphi = -1$

- $v_r = 0$ (planeta se nevzdaluje ani nepřibližuje ke Slunci)
- v_φ i v zde mají zřejmě **minimum** a rovnají se:

$$\boxed{v_{\varphi B} = v_B = \frac{2w}{p}(1-\varepsilon)} \tag{16}$$

Přitom dle (11) je také $v_\varphi = \dfrac{2w}{r}$ a díky geometrii elipsy platí, že v *aféliu* je $r = a + e = a + a\varepsilon = a(1+\varepsilon)$. Proto můžeme psát také:

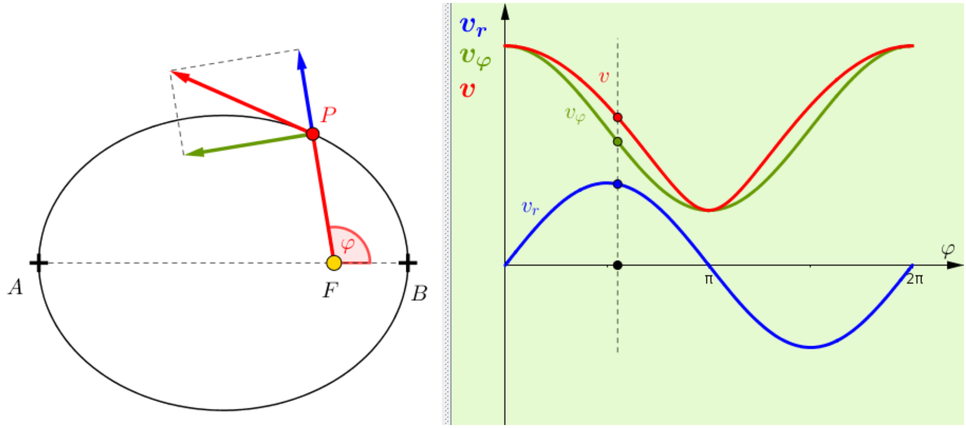
$$\boxed{v_{\varphi B} = v_B = \frac{2w}{a(1+\varepsilon)}} \tag{17}$$

To, že úvahy o rychlostech v perihéliu a aféliu jsou správné, se převědčíme také v následujícím apletu.

5 Animace obvodové rychlosti a jejích složek

Vyrobíme si aplet, ve kterém rozšíříme již dříve vytvořený minimální aplet pro animaci pohybu planety[4] o vektory $\vec{v}, \vec{v}_r, \vec{v_\varphi}$. Jejich velikosti jsou dány vztahy (10), (12) a (13), ve kterých vystupuje azimut φ.

[4] https://www.geogebra.org/m/m3q5cd4r#material/tmw4eprz



Obr. 5:

https://www.geogebra.org/m/jbszmee8

Při tvorbě apletu máme několik možností:

- Azimut φ odečíst v GeoGebře graficky jakožto velikost úhlu BFP.
- Použít dříve odvozený[5] vztah, kde vystupuje *excentrická anomálie* E (tu už máme v apletu vypočítanou díky řešení Keplerovy rovnice):

  $$\cos\varphi = \frac{\cos E - \varepsilon}{1 - \varepsilon\cos E}$$

  Odtud vypočítáme $\cos\varphi$ a rovnou dosadíme do vztahů pro v a v_φ, kde přímo $\cos\varphi$ vystupuje.
  Ve vztahu pro v_r však vystupuje $\sin\varphi$. Nyní můžeme použít vztah $\sin\varphi = \pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}$ a znaménko určit podle času t ($+$ pro $t \leq \frac{T}{2}$, jinak $-$). Nebo můžeme v_r vypočítat jednoduše pomocí *Pýthagorovy* věty: $v_r = \sqrt{v^2 - v_\varphi^2}$.

[5] https://www.geogebra.org/m/m3q5cd4r#material/tbpxdcqh

- Zjistit hodnotu φ pomocí funkce arkus kosinus a znaménko φ vybrat podle času, jak bylo uvedeno v předchozím bodě.

V apletu jsme použili třetí možnost.

6 Proč nelze animovat planetu přímo nastavením rychlosti animace pomocí vzorce?

Mohlo by nás napadnout, že když máme vzorec (13) pro obvodovou rychlost planety, stačilo by pro animaci jejího pohybu v GeoGebře umístit na elipsu bod P a jako rychlost jeho animace nastavit obvodovou rychlost, která se mění v závislosti na jeho azimutu φ (ten bychom získali odečtením úhlu BFP).

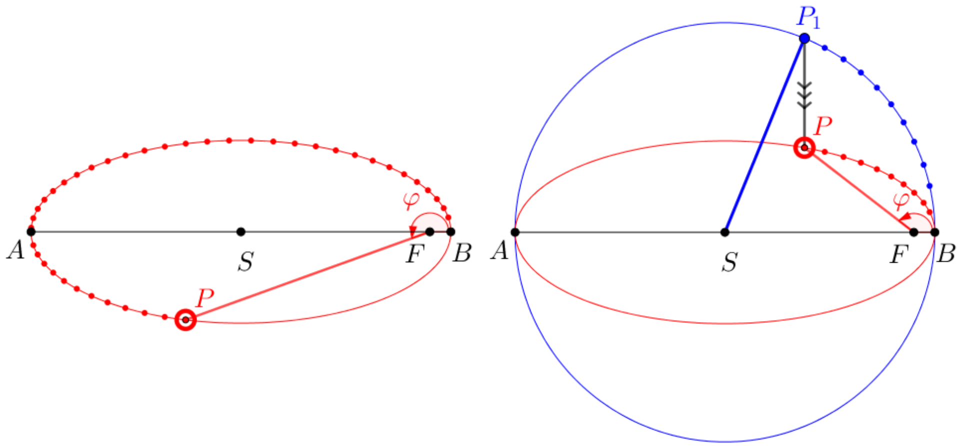
Ale takto jednoduše to udělat nejde. Když si totiž porovnáme takto vytvořený pohyb s pohybem vytvořeným v našem apletu z předcházející kapitolky, zjistíme, že se neshodují.

Jde o to, že rychlost animace, kterou nastavíme v GeoGebře pro pohyb bodu po nějaké křivce není obecně rovna obvodové (tedy tečné) rychlosti.

Když třeba nastavíme rychlost animace bodu P na elipse **konstantní** (nastavíme rychlost animace např. 5), zjistíme (pomocí stop pohybujícího se bodu), že jeho **pohyb není rovnoměrný** (stopy nejsou v konstantních vzdálenostech – viz obr.6a + odkaz na aplet v popisu obrázku). Nerovnoměrnost pohybu je tím větší, čím má elipsa větší excentricitu.

GeoGebra ve skutečnosti animuje primárně rovnoměrný pohyb pomocného bodu P_1 (viz obr. 6b) po hlavní kružnici elipsy (vidíme, že modré stopy bodu P_1 jsou ve stejných vzdálenostech) a bod P vzniká jako jeho průmět na elipsu.

Proto nemůžeme bod P animovat tak, že prostě nastavíme rychlost



(a) Červené stopy nejsou stejně vzdálené. (b) Modré stopy jsou stejně vzdálené.

Obr. 6:

https://www.geogebra.org/m/ryre898p

jeho animace podle vzorce (13), protože to **nebude jeho obvodová rychlost**.

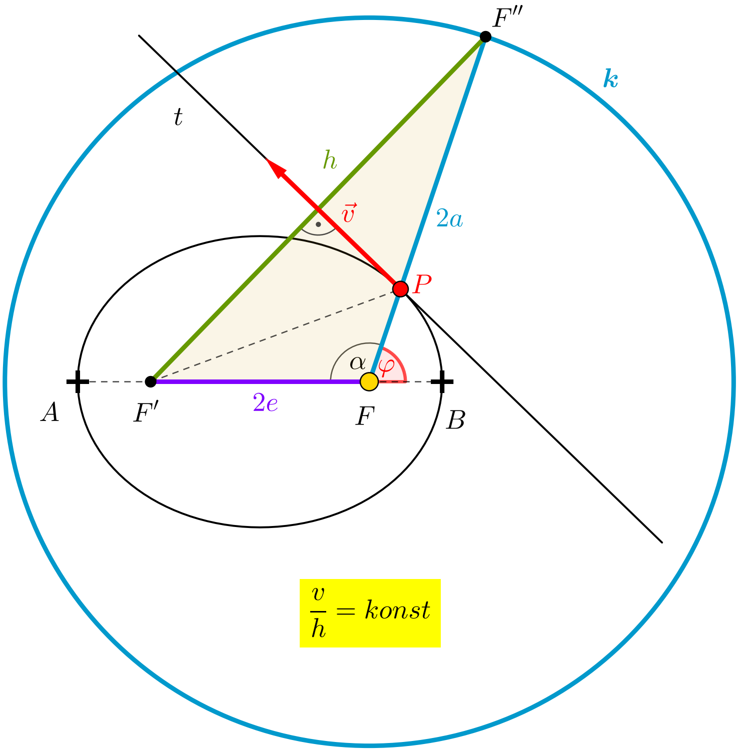
7 Feynmanův rychlostní trik

Na závěr ještě krátce zmíníme další možnost (vedle výpočtu pomocí vztahu (13)), jak si pro každou polohu planety P vyrobit v GeoGebře vektor obvodové rychlosti.

Vzpomeňme si na pojem **řídící kružnice elipsy**[6]. Vezměme tečnu t elipsy v bodě P (planeta) (obr. 7). Platí, že množinou všech obrazů F'' ohniska F' v osové souměrnosti podle tečny t je kružnice se středem

[6] https://www.geogebra.org/m/SmYDP3Ng

v druhém ohnisku F (Slunce) a poloměrem $2a$ (a je hlavní poloosa elipsy).



Obr. 7:

https://www.geogebra.org/m/c39b2hw8

Jinými slovy, pohybuje-li se planeta po elipse, v jejímž jednom ohnisku F je Slunce, pohybuje se bod souměrně sdružený s druhým ohniskem podle tečny t po kružnici $k(F; 2a)$ (tato kružnice se nazývá řídící kružnice elipsy).

Spusťme si aplet (odkaz v popisu obrázku 7) a všimněme si, co při pohybu planety dělá velikost úsečky $F'F'' = h$. Její délka se mění. Kdy je největší? V perihéliu B. Kdy je nejmenší? V aféliu A. Neříká nám to něco? Podobně se přece chová i obvodová rychlost!

Ve své „Ztracené přednášce[7]" Richard Feynman skutečně odvodil, že délka úsečky h je **přímo úměrná** velikosti obvodové rychlosti planety v! Tedy, že platí

$$\boxed{\frac{v}{h} = konst} \tag{18}$$

Pojďme si ověřit, že vztah (18) skutečně platí. Ale udělejme to jinak než Feynman – s využitím vztahu (13) pro obvodovou rychlost.

Všimněme si trojúhelníku $FF'F''$. Při pohybu planety zůstávají jeho dvě strany konstantní ($FF'' = 2a; FF' = 2e$) a mění se jen jeho třetí strana $F'F'' = h$. Použijeme kosinovou větu:

$$h^2 = (2e)^2 + (2a)^2 - 2(2e)(2a)\cos\alpha$$

Zde $\alpha = \pi - \varphi$ a proto $\cos\alpha = -\cos\varphi$. Tedy

$$h^2 = 4e^2 + 4a^2 + 8ea\cos\varphi$$

Pač $e = \varepsilon a$, dostáváme

$$\begin{aligned} h^2 &= 4\varepsilon^2 a^2 + 4a^2 + 8\varepsilon a^2\cos\varphi \\ h^2 &= 4a^2(1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\cos\varphi) \\ h &= 2a\sqrt{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\cos\varphi} \end{aligned} \tag{19}$$

V aféliu a perihéliu sice trojúhelník $FF'F''$ zaniká, ale snadno ukážeme, že vztah (19) platí i zde:

[7] https://www.geogebra.org/m/hwskzt3u

Z obrázku 7 vidíme, že v A je $h = 2a - 2e$ a v B je $h = 2a + 2e$. Současně v A je $\varphi = \pi$, takže z (19) dostáváme

$$
\begin{aligned}
h &= 2a\sqrt{1+\varepsilon^2-2\varepsilon}\\
h &= 2a\sqrt{(1-\varepsilon)^2}\\
h &= 2a(1-\varepsilon) = 2a - 2\varepsilon = \underline{\underline{2a-2e}}
\end{aligned}
$$

Podobně v B je $\varphi = 0$, takže z (19) dostáváme

$$
\begin{aligned}
h &= 2a\sqrt{1+\varepsilon^2+2\varepsilon}\\
h &= 2a\sqrt{(1+\varepsilon)^2}\\
h &= 2a(1+\varepsilon) = 2a + 2\varepsilon = \underline{\underline{2a+2e}}
\end{aligned}
$$

Pro v platí vztah (13):

$$v = \frac{2w}{p}\sqrt{1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\varphi}$$

Takže vydělením dostáváme zřejmě

$$\frac{v}{h} = \frac{w}{pa} \tag{20}$$

Ale dle 2. Keplerova zákona je plošná rychlost w konstantní a p, a jsou rovněž konstanty popisující velikost a tvar elipsy. Délka úsečky h je tedy vskutku přímo úměrná velikosti obvodové rychlosti v, jak jsme chtěli dokázat.

Toho, že rychlost planety je úměrná velikosti h můžeme využít při tvorbě apletu, ve kterém chceme jednoduše (bez použití vzorce (13)) – jen geometricky – zkonstruovat vektor obvodové rychlosti $\vec{v}$ (který pak můžeme ještě graficky rozložit na složky $\vec{v_\varphi}$ a $\vec{v_r}$). Nebudeme mít sice přesnou velikost obvodové rychlosti, ale jen délku h, která je jí úměrná. Ale to nám pro účely apletu nevadí.

Platí však stejné omezení, které jsme rozebrali v předcházející kapitolce – získanou hodnotu h úměrnou v nemůžeme použít pro účely přímé animace nerovnoměrného pohybu planety dosazením za rychlost animace bodu P.

$\triangle$

Da Sista Les

∞