Problemas – Tema 5

Problemas resueltos - 2 - ideas felices para resolver integrales inmediatas

1. Calcula:

a) $\int \frac{x^3}{1+x^4}dx$ b) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$ c) $\int sen(x)\cdot\cos(x)dx$

d) $\int \sqrt{8-x}\,dx$ e) $\int \frac{1}{x^3}dx$ f) $\int \frac{\ln(x)}{x}dx$

g) $\int \frac{x+x^2-\sqrt{x}}{x}dx$ h) $\int x\cos(x^2)dx$ i) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}}dx$

a) Mostramos, en los siguientes apartados, una serie de atajos bastantes comunes a la hora de integrar.

$$\int \frac{x^3}{1+x^4}dx$$

Siempre que tengamos la integral de un cociente, es buena costumbre comprobar si el numerador es la derivada del denominador. Así, al integrar, aparecerá un logaritmo.

$$\frac{d}{dx}[1+x^4]=4x^3 \quad\rightarrow\quad \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{1+x^4}dx=\frac{1}{4}\cdot\ln|1+x^4|+C$$

En este caso, aplicar valor absoluto al argumento del logaritmo es redundante porque la expresión $(1+x^4)$ siempre devuelve un valor positivo.

b) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$

Cuando aparezca una raíz en el denominador, es práctico comprobar si el numerador es la derivada del discriminante de la raíz.

$$\frac{d}{dx}[1+e^x]=e^x \quad\rightarrow\quad 2\int \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}dx=2\sqrt{1+e^x}+C$$

c) $\int sen(x)\cdot\cos(x)\,dx$

Al integrar un producto de dos términos, podemos pensar en la derivada de la potencia de una función.

$$\frac{d}{dx}[f^n(x)]=n\cdot f^{n-1}(x)\cdot f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[(sen(x))^2]=2\cdot sen(x)\cdot\cos(x) \;\rightarrow\; \frac{1}{2}\int 2\cdot sen(x)\cdot\cos(x)\,dx=\frac{1}{2}sen^2(x)+C$$

d) $\int\sqrt{8-x}\,dx$

En las raíces de un polinomio de grado uno, es útil ver la raíz como una potencia de índice fraccionario.

$$\int\sqrt{8-x}\,dx=\int(8-x)^{1/2}\,dx$$

Y volvemos a recordar la forma de la derivada de una potencia.

$$\frac{d}{dx}[f^n(x)]=n\cdot f^{n-1}(x)\cdot f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[(8-x)^{3/2}]=\frac{3}{2}\cdot(8-x)^{1/2}\cdot(-1)$$

$$\frac{-2}{3}\int\frac{-3}{2}(8-x)^{1/2}\,dx=\frac{-2}{3}(8-x)^{\frac{3}{2}}=\frac{-2}{3}(8-x)\sqrt{8-x}+C$$

e) $\int\frac{1}{x^3}\,dx$

Si hay monomio en el denominador, es práctico poner el monomio con exponente negativo en el numerador.

$$\int x^{-3}\,dx$$

Y volvemos a recordar la forma de la derivada de una potencia:

$$\frac{d}{dx}[f^n(x)]=n\cdot f^{n-1}(x)\cdot f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-2}]=-2\cdot x^{-3}(x)\cdot 1 \;\rightarrow\; \frac{-1}{2}\int -2x^{-3}\,dx=\frac{-1}{2}x^{-2}=\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+C$$

f) $\int\frac{\ln(x)}{x}\,dx$

Al tener logaritmo y la derivada del logaritmo, pensamos nuevamente en la derivada de una potencia.

$$\frac{d}{dx}[f^n(x)]=n\cdot f^{n-1}(x)\cdot f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[\ln^2(x)]=2\cdot\ln(x)\cdot\frac{1}{x} \;\rightarrow\; \frac{1}{2}\int 2\cdot\frac{\ln(x)}{x}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\ln^2(x)+C$$

g) $\int \frac{x+x^2-\sqrt{x}}{x}dx$

Cuando en el numerador aparecen muchos monomios sumando/restando, y en el denominador un solo monomio, es práctico romper la integral en la suma/resta de diferentes integrales.

$$\int \frac{x+x^2-\sqrt{x}}{x}dx=\int (\frac{x}{x}+\frac{x^2}{x}-\frac{\sqrt{x}}{x})dx=\int dx+\int x\,dx-\int x^{-1/2}dx=x+\frac{x^2}{2}-2x^{1/2}=x+\frac{x^2}{2}-2\sqrt{x}+C$$

h) $\int x\cos(x^2)dx$

Encontramos el coseno de una función, que está multiplicado por la derivada de esa función.

$$\frac{d}{dx}[sen(x^2)]=\cos(x^2)\cdot 2x \quad\rightarrow\quad \frac{1}{2}\int 2x\cos(x^2)dx=\frac{1}{2}sen(x^2)+C$$

i) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}}dx$

Escribimos la raíz como exponente fraccionario. Y la escribimos en el numerador cambiando el signo.

$$\int x^{-1/4}dx=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C$$

2. Resuelve.

a) $I=\int \frac{4x-1}{(2x^2-x+1)^6}dx=\int (4x-1)(2x^2-x+1)^{-6}$

$I=\frac{-1}{5}\int -5(4x-1)(2x^2-x+1)^{-6}=\frac{-1}{5}(2x^2-x+1)^{-5}+C$

$I=\frac{-1}{5}(2x^2-x+1)^{-5}+C=\frac{-1}{5\cdot(2x^2-x+1)^5}+C$

b) $\int 7\left(x+\frac{3}{2}\right)^5\,dx=7\cdot\int \left(x+\frac{3}{2}\right)^5\,dx=7\cdot\frac{\left(x+\frac{3}{2}\right)^6}{6}+C$

c) $\int \frac{10x+5}{x^2+x+7}\,dx=\int \frac{5(2x+1)}{x^2+x+7}\,dx=5\cdot\int \frac{2x+1}{x^2+x+7}\,dx=5\cdot\ln|x^2+x+7|+C$

d) $\int 7^{2x}\,dx=\int 49^x\,dx=\frac{49^x}{ln(49)}+C$

e) $I=\int \frac{x^2+3}{x^2+1}\,dx=\int \frac{x^2+1+2}{x^2+1}\,dx=\int \frac{1+x^2}{1+x^2}\,dx+\int \frac{2}{1+x^2}\,dx$

$I=\int dx+2\,arcotg(x)=x+2\,arcotg(x)+C$

f) $\int \frac{\cos(7x)}{2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\int \cos(7x)dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\int 7\cdot\cos(7x)\,dx=\frac{sen(7x)}{14}+C$

3. Calcula las siguientes integrales indefinidas inmediatas:

a) $\int \cos^2 x\, dx = \int \left(\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{1}{4} sen(2x) + \frac{x}{2} + C$

b) $\int sen^2 x\, dx = \int \left(\frac{-1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{-1}{4} sen(2x) + \frac{x}{2} + C$

c) $\int 7 \cdot \cos(x) \cdot e^{sen\, x} dx = 7 \cdot e^{sen\, x} + C$

e) $\int \frac{e^x}{e^x + 5} dx = \ln|e^x + 5| + C$

f) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \frac{-1}{x} + arcotg(x) + C$

4. Resuelve $\int \frac{e^{4x}+3}{e^{3x}} dx$ **.**

$$I = \int \left(\frac{e^{4x}+3}{e^{3x}}\right) dx = \int \left(\frac{e^{4x}}{e^{3x}}\right) dx + \int \left(\frac{3}{e^{3x}}\right) dx = \int e^{x}\, dx + \int \left(3\, e^{(-3x)}\right) dx = e^{x} - \int \left(-3 e^{(-3x)}\right) dx$$

$$I = e^{x} - e^{(-3x)} + C$$

5. Resuelve $\int \frac{3^x}{1+3^x} dx$

$$\int \frac{3^x}{1+3^x} dx = \frac{1}{\ln(3)} \int \frac{\ln(3) \cdot 3^x}{1+3^x} dx = \frac{1}{\ln(3)} \cdot \ln|1+3^x| + C$$