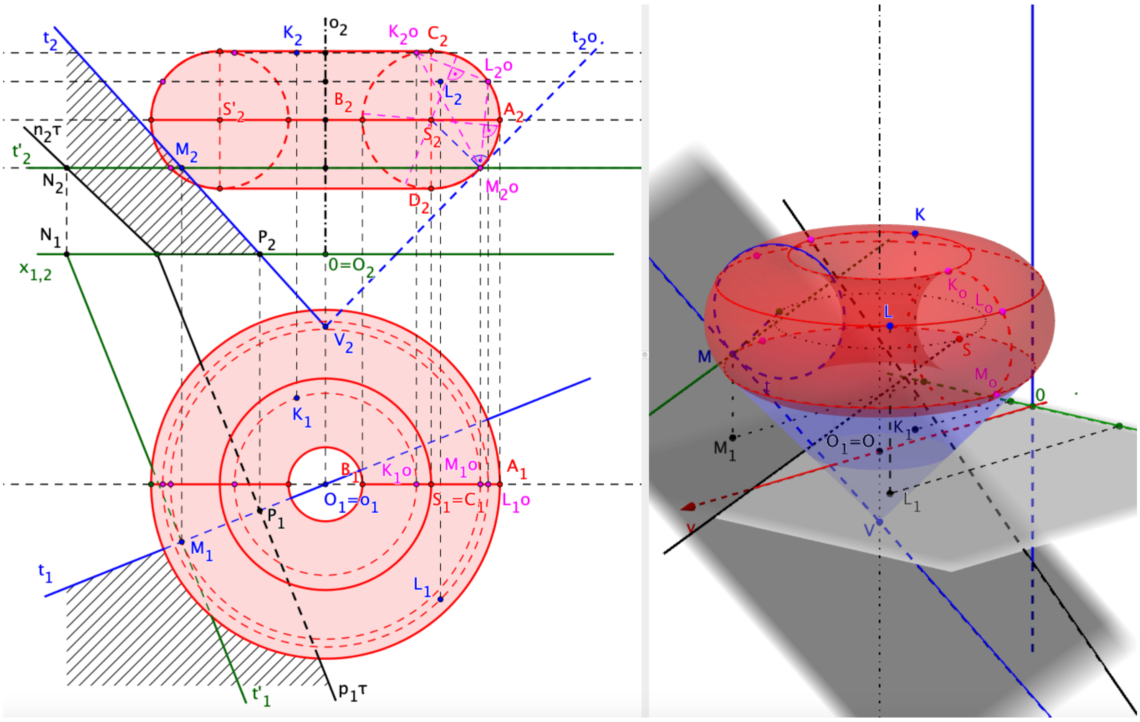
Kapitola 11

Rotační kvadriky

11.1 Anuloid (prstenec)



Ani jeden ze zadaných bodů neleží v rovině skutečného obrysu pro nárysnu (rovina rovnoběžná s nárysnou procházející osou o), takže je kolem osy o do této roviny otočíme. Otočené body určí tvořící kružnici pomocí níž odvodíme průměty plochy. V otočeném bodě M_o sestrojíme pomocnou tečnu obrysového poledníku (kružnice), která nám určí vrchol V tečné kuželové plochy, kterým prochází i tečna poledníku bodu M, doplníme tečnu rovnoběžky bodu a tak určíme tečnou rovinu.

1. otočíme obecné body K, L, M do roviny obrysové elipsy
   $K_1 \in k_K(O_1)$; $K_1^o O_1 \parallel x_{1,2}$; $K_2 K_2^o \parallel x_{1,2}$; $K_1^o \xrightarrow{ord} K_2^o$
   $L_1 \in k_L(O_1)$; $L_1^o O_1 \parallel x_{1,2}$; $L_2 L_2^o \parallel x_{1,2}$; $L_1^o \xrightarrow{ord} L_2^o$
   $M_1 \in k_M(O_1)$; $M_1^o O_1 \parallel x_{1,2}$; $M_2 M_2^o \parallel x_{1,2}$; $M_1^o \xrightarrow{ord} M_2^o$

2. sestrojíme kružnici opsanou trojúhelníku $\triangle K_2^o L_2^o M_2^o$ se středem S_2
   $S_2 \in A_2B_2 \perp o_2$ - rotací bodu A vzniká rovníková kružnice, bodu B hrdelní kružnice, pro půdorysnu jsou to vnější a vnitřní obrysová kružnice
   $S_2 \in C_2D_2 \parallel o_2$ - rotací bodů C, D vznikají horní a dolní kráterové kružnice

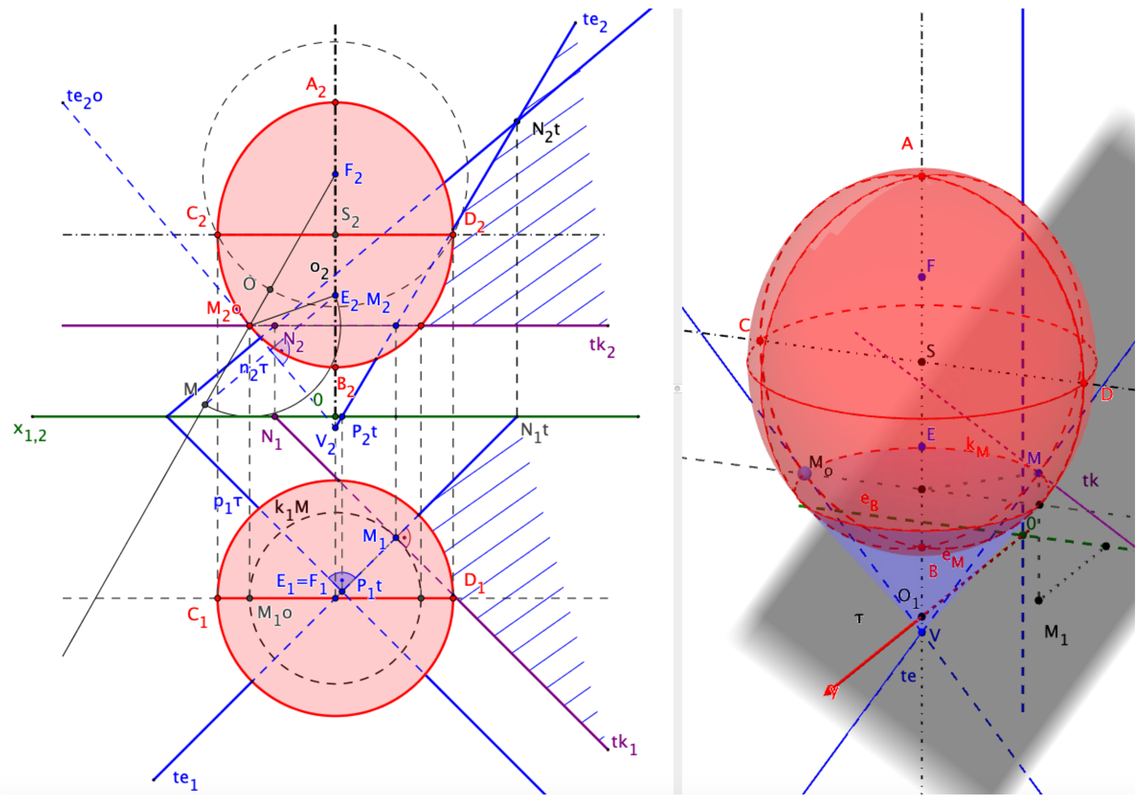
3. sestrojíme tečnu obrysové kružnice (poledníku) v bodě M_2^o:
   tečna $M_2^o \in t_2^o \perp M_2^o S_2$
   najdeme vrchol V kužele tečen:
   $t_2^o \cap o_2 = V_2 \xrightarrow{ord} V_1 = O_1$
   tečna poledníku v bodě M:
   $t_1 = M_1 O_1;\ t_2 = M_2 V_2$ (čárkovaně)

4. tečna rovnoběžky v bodě M:
   $M_1 \in t_1' \perp M_1 O_1;\ M_2 \in t_2' \parallel x_{1,2}$ (čárkovaně)

5. viditelnost:
   M_1 - neviditelný (M_2 pod $S_2 S_2'$) $\Longrightarrow t_1, t_1'$ viditelné mimo $\pi-$průmět (uvnitř hrdelní kružnice t_1 vidíme)
   M_2 - viditelný (M_1 není mezi $A_1 S_1$ a $x_{1,2}$) $\Longrightarrow t_2, t_2'$ viditelné přes $\nu-$průmět
   v půdorysně šrafujeme po obrysovou křivku (rovník), ne až k bodu M_1
   v nárysně šrafujeme přes obrysovou křivku až k bodu M_2

6. stopy tečné roviny není třeba hledat
   $t_2 \cap x_{1,2} = P_2 \xrightarrow{ord} P_1 \in t_1$
   $t_1' \cap x_{1,2} = N_1 \xrightarrow{ord} N_2 \in t_2'$
   $P_1 \in p_1^\tau \perp t_1;\ p_1^\tau \cap x_{1,2} = \tau_x;\ n_2^\tau = \tau_x N_2$

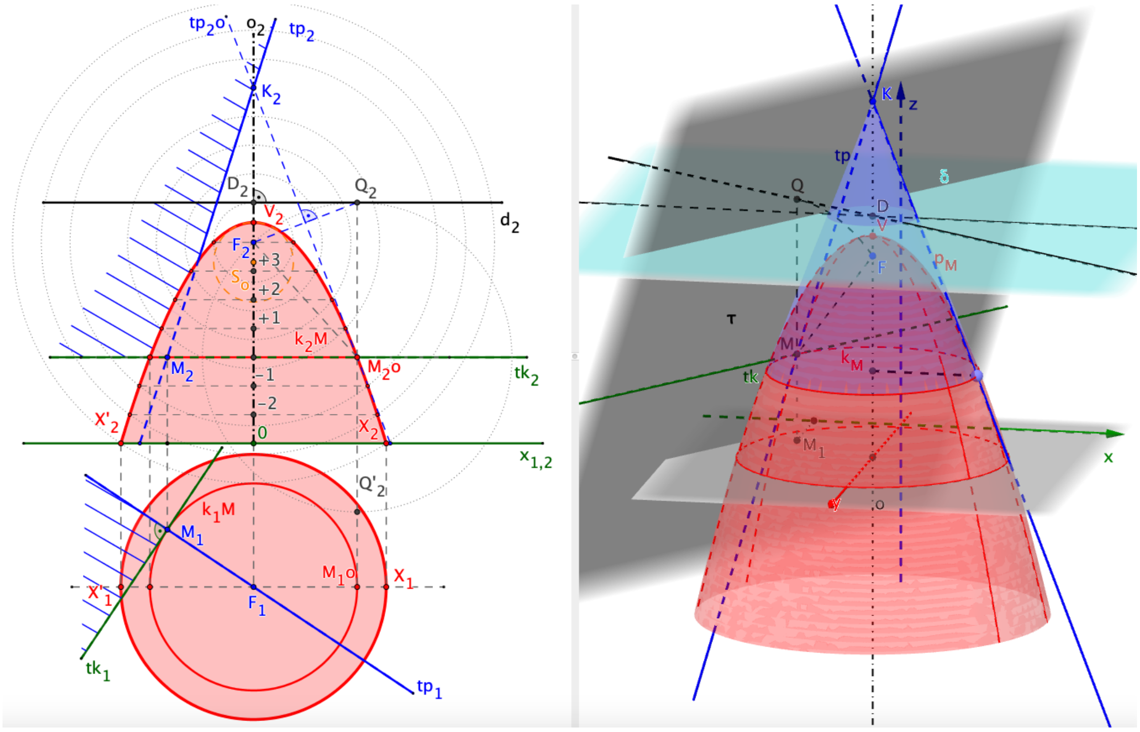
11.2 Rotační protáhlý elipsoid



Bod M není bodem obrysové kružnice pro půdorysnu ani obrysové elipsy pro nárysnu, musíme ho otočil kolem osy $o = EF$ do roviny obrysové elipsy pro nárysnu, která je rovnoběžná s nárysnou s prochází osou o. Najdeme hlavní a vedlejší vrcholy obrysové elipsy a odvodíme půdorysný průmět. V otočeném bodě M_o sestrojíme pomocnou tečnu obrysové elipsy, která nám určí vrchol V tečné kuželové plochy, kterým prochází i tečna elipsy bodu M, doplníme tečnu rovnoběžky bodu a tak určíme tečnou rovinu.

1. otočíme obecný bod M do roviny obrysové elipsy
   $M_1 \in k_M(E_1 = F_1);\ M_1^o E_1 \parallel x_{1,2}$
   $M_2 M_2^o \parallel x_{1,2};\ M_1^o \xrightarrow{ord} M_2^o$
2. podle definice elipsy platí:
   $|E_2 M_2^o| + |M_2^o F_2| = 2a = |MF_2| \longrightarrow a = \frac{|MF_2|}{2} = |MO| = |A_2 S_2| = |C_2 F_2|$
   $C_2 \xrightarrow{ord} C_1 \in M_1^o E_1$ elipsu zatím nevykreslujeme !
3. sestrojíme tečnu obrysové elipsy v bodě M_2^o:
   tečna te_2^o půlí úhel $\angle M M_2^o E_2$ neboli $M_2^o \in te_2^o \perp ME_2$
   najdeme vrchol V kužele tečen:
   $te_2^o \cap E_2 F_2 = V_2 \xrightarrow{ord} V_1 = E_1$
   tečna poledníku v bodě M:
   $te_1 = M_1 E_1;\ te_2 = M_2 V_2$ (čárkovaně)
4. tečna rovnoběžky v bodě M:
   $M_1 \in tk_1 \perp M_1 E_1;\ M_2 \in tk_2 \parallel x_{1,2}$ (čárkovaně)
5. viditelnost:
   M_1 - neviditelný (M_2 pod $C_2 D_2$) $\Longrightarrow te_1, tk_1$ viditelné mimo $\pi-$průmět
   M_2 - neviditelný (M_1 mezi $C_1 D_1$ a $x_{1,2}$) $\Longrightarrow te_2, tk_2$ viditelné mimo $\nu-$průmět
   šrafujeme po obrysové křivky, ne až k bodu dotyku
6. stopy tečné roviny není třeba hledat
   $te_2 \cap x_{1,2} = P_2^t \xrightarrow{ord} P_1^t \in te_1$
   $te_1 \cap x_{1,2} = N_1^t \xrightarrow{ord} N_2^t \in te_2$
   $tk_1 \cap x_{1,2} = N_1 \xrightarrow{ord} N_2 \in tk_2$
   $n_2^\tau = N_2^t N_2;\ n_2^\tau \cap x_{1,2} = \tau_x;\ p_1^\tau = \tau_x P_1^t$

11.3 Rotační paraboloid



Bod M není bodem obrysové kružnice pro půdorysnu ani obrysové paraboly pro nárysnu, musíme ho otočil kolem osy $F \in o \perp \pi$ do roviny obrysové paraboly pro nárysnu, která je rovnoběžná s nárysnou s prochází osou o. Najdeme řídící přímku, vrchol a dostatečný počet obecných bodů obrysové elipsy a odvodíme půdorysný průmět. V otočeném bodě M_o sestrojíme pomocnou tečnu obrysové paraboly, která nám určí vrchol K tečné kuželové plochy, kterým prochází i tečna paraboly bodu M, doplníme tečnu rovnoběžky bodu a tak určíme tečnou rovinu.

1. otočíme obecný bod M do roviny obrysové paraboly
   $M_1 \in k_M(F_1)$; $M_1^o F_1 \parallel x_{1,2}$
   $M_2 M_2^o \parallel x_{1,2}$; $M_1^o \xrightarrow{ord} M_2^o$

2. sestrojíme řídící přímku d paraboly, podle definice pro parabolu platí:
   $|F_2 M_2^o| = v(M_2^o d_2) \wedge d_2 \perp o_2 \Longrightarrow Q_2 M_2^o \parallel o_2 \wedge |Q_2 M_2^o| = |F_2 M_2^o|$
   $Q_2 \in d_2 \perp o_2$; $d_2 \cap o_2 = D_2$

3. vrchol V_2 je střed úsečky $F_2 D_2$

4. oskulační kružnice:
   poloměr $r = |F_2 D_2| = p \ldots$ parametr paraboly
   střed $S_o \in o_2$ a platí $|S_o V_2| = |F_2 D_2|$ neboli $|S_o F_2| = |F_2 V_2|$

5. průsečíky obrysové paraboly a osy $x_{1,2}$:
   $|0D_2| = |F_2 X_2| = |F_2 X_2'|$

6. konstrukce obecných bodů:
   sestrojíme libovolnou kolmici na osu o_2, vzdálenost jejího průsečíku od bodu D_2 kružítkem naneseme od ohniska F_2 opět na kolmici, např.
   setrojíme systém kolmic po $1cm$ od k_2^M, průsečíky s osou o_2 označíme $+1; -1; +2 \ldots$,
   do kručítka vezmeme vzdálenost $|+1D_2|$ a z ohniska F_2 naneseme na kolmici

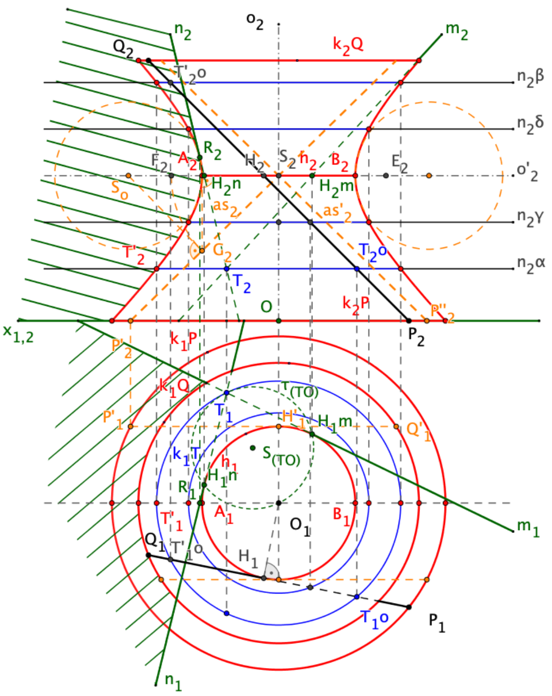
procházející bodem +1, průsečíky jsou body paraboly
parabolu zatím nevykreslujeme !

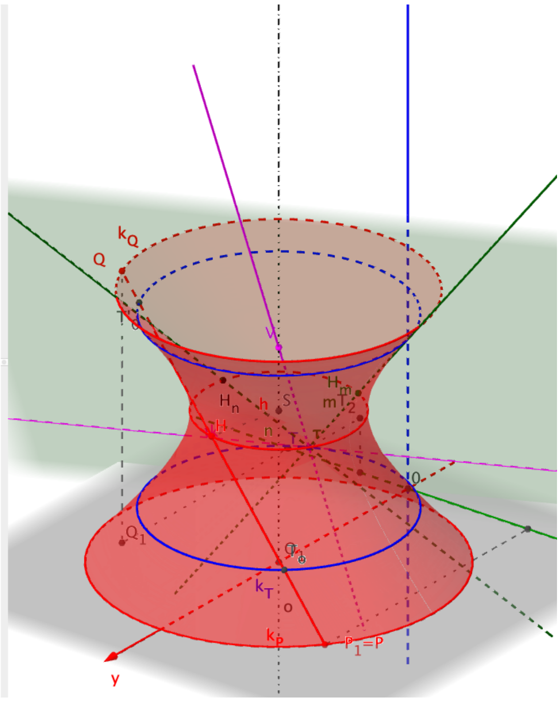
7. sestrojíme tečnu obrysové paraboly v bodě M_2^o:
   tečna tp_2^o půlí úhel $\angle M_2^o F_2 Q_2$ neboli $M_2^o \in tp_2^o \perp F_2Q_2$
   najdeme vrchol K kužele tečen:
   $tp_2^o \cap o_2 = K_2 \xrightarrow{ord} K_1 = F_1$
   tečna poledníku v bodě M:
   $tp_1 = M_1F_1;\ tp_2 = M_2K_2$ (čárkovaně)

8. tečna rovnoběžky v bodě M:
   $M_1 \in tk_1 \perp M_1F_1;\ M_2 \in tk_2 \parallel x_{1,2}$ (čárkovaně)

9. viditelnost:
   M_1 - viditelný $\Longrightarrow tp_1, tk_1$ viditelné přes $\pi-$průmět
   M_2 - neviditelný (M_1 mezi X_1X_1' a $x_{1,2}$) $\Longrightarrow tp_2, tk_2$ viditelné mimo $\nu-$průmět
   v půdorysně šrafujeme přes obrysovou křivku až k bodu M_1
   v nárysně šrafujeme po obrysovou křivku, ne až k bodu M_2

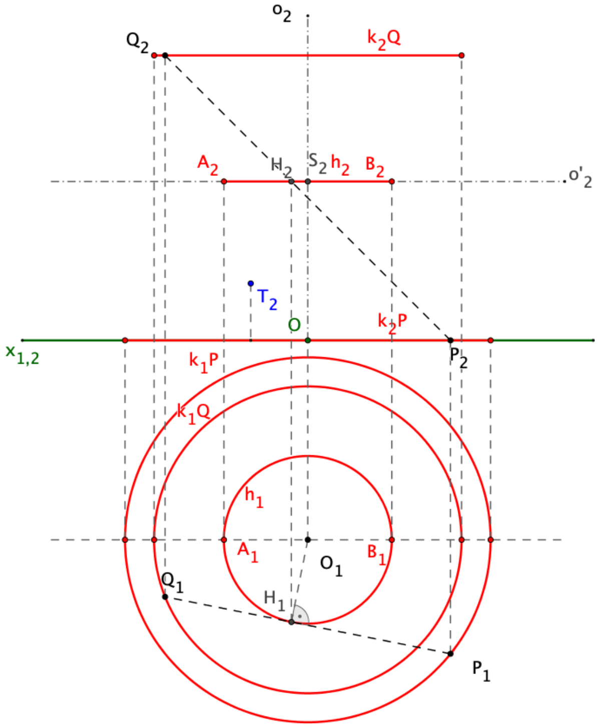
11.4 Rotační jednodílný hyperboloid





Úsečku PQ necháme rotovat kolem osy o, koncové body vytvoří kružnice podstav, bod H úsečky, který je nejblíž osy rotace, hrdelní kružnici. Odvodíme dostatečný počet bodů obrysové hyperboly v nárysně, její asymptoty, oskulační kružnice a hyperbolu vykreslíme. Tečnou rovinu určíme dvojicí tvořících přímek procházejících bodem dotyku, případně dvojicí tečen plochy v daném bodě.

1. kružnice podstav a hrdelní:



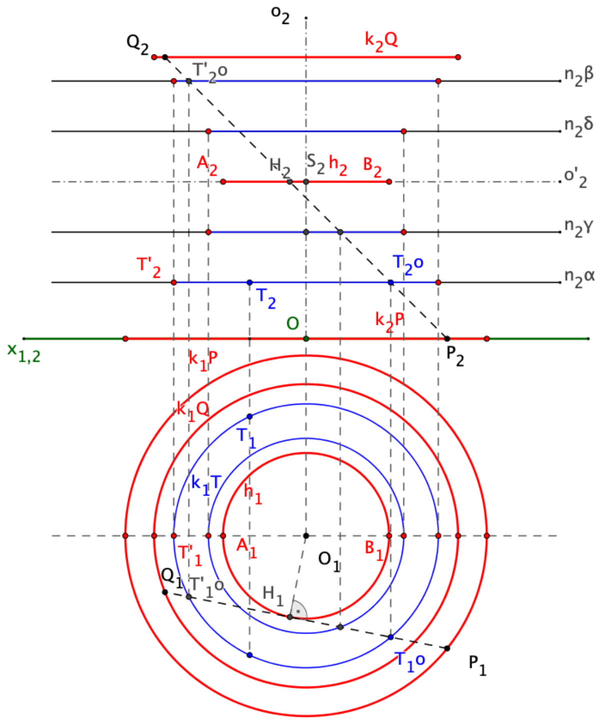
$P_1 \in k_1P(O_1, |P_1O_1)$
$Q_1 \in k_1Q(O_1, |Q_1O_1)$

$\begin{matrix} |P_1O_1| > |Q_1O_1| \\ z_P < z_Q \end{matrix} \Rightarrow k_1P, k_1Q$
jsou obě viditelné

obrysové body kružnic odvodíme do nárysu

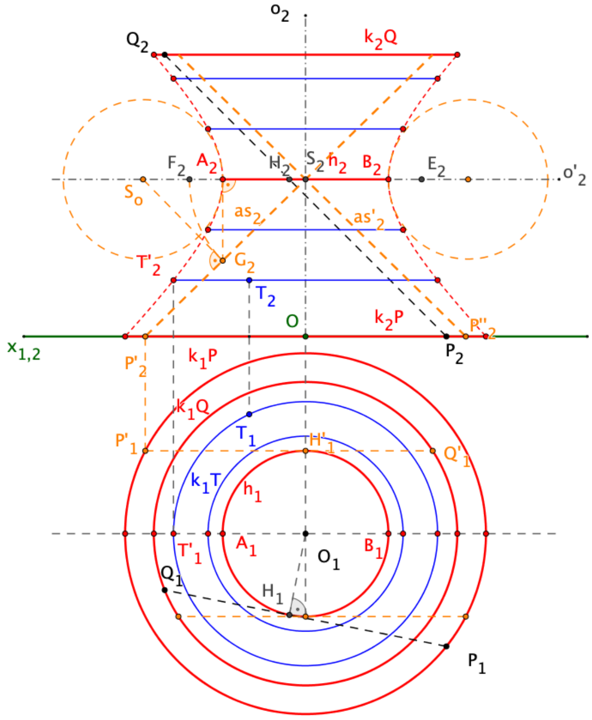
$H_1O_1 \perp P_1Q_1$
$H_1 \xrightarrow{ord} H_2 \in P_2Q_2$
$H_1 \in h_1(O_1, |H_1O_1|)$
$H_2 \in A_2B_2 = h_2 \subset o_2'$
$o_2' \perp o_2$
$o_2' \cap o_2 = S_2$

2. nalezení T_1 a bodů obrysové hyperboly:



bodem T prochází tvořící kružnice plochy ležící v rovině $\alpha \perp o$
$T_2 \in n_2\alpha \perp o_2$
$n_2\alpha \cap P_2Q_2 = T_2o$
$T_2o \xrightarrow{ord} T_1o \in P_1Q_1$
$T_1o \in k_1T(O_1, |T_1oO_1|)$
$T_2 \xrightarrow{ord} T_1 \in k_1T \quad (y_T < y_O)$
T_2 leží pod A_2B_2 - k_1T je sice neviditelná, ale v půdorysně splývá s rovině souměrnou kružnicí o stejném poloměru ležící nad A_2B_2, která je viditelná
obrysové body kružnic odvodíme do nárysu, kde to budou body obrysové hyperboly
další body získáme libovolnou vhodnou volbou pomocných rovin $\beta, \gamma, \delta \ldots$ a odvozením obrysových bodů

3. asymptoty, oskulační kružnice a ohniska obrysové hyperboly:



asymptoty obrysové hyperboly prochází jejím středem S_2 a vzniknou otočením úsečky PQ do rovin (poloh) rovnoběžných s nárysnou

$H_1', H_1'' \in O_1 0$

$H_1' \in P_1'Q_1' \parallel x_{1,2}$

$P_1' \xrightarrow{ord} P_2' \in x_{1,2}$

$o_2 : P_2' \longrightarrow P_2''$ osová souměrnost

asymptoty:

$as_2 = P_2'S_2$,

$as_2' = P_2''S_2$

oskulační kružnice:

$G_2A_2 \perp A_2B_2$

$S_oG_2 \perp as_2$

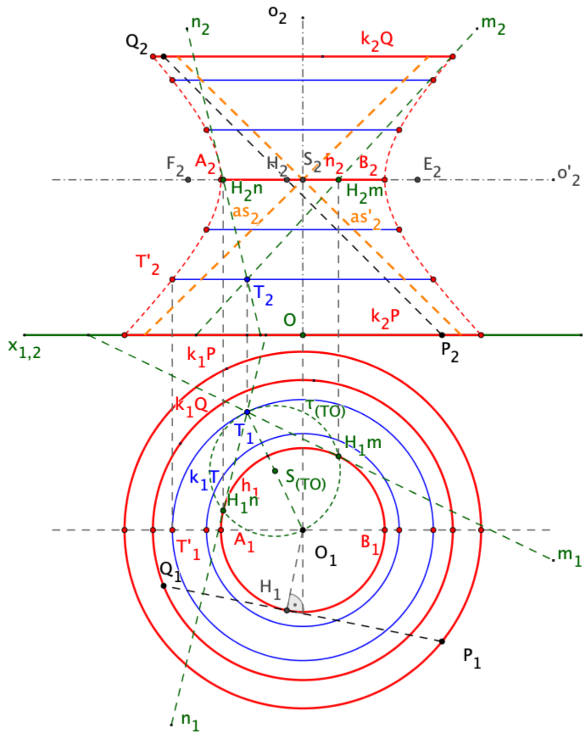
$S_2 : S_o \longrightarrow S_o'$

$A_2 \in k_o(S_o), B_2 \in k_o'(S_o')$

ohniska:

$|F_2S_2| = |G_2S_2| = |E_2S_2|$

4. tečná rovina určená dvojicí různoběžných tvořících přímek plochy:



tvořící přímky plochy sestrojíme jako tečny hrdelní kružnice vedené z bodu T

$S_{(TO)}-$ střed úsečky T_1O_1

$k^t_{(TO)}-$ Thaletova kružnice nad průměrem T_1O_1

$k^t_{(TO)} \cap h_1 = H_1m, H_1n$

$m_1 = H_1mT_1$

$H_1m \xrightarrow{ord} H_2m \in h_2$

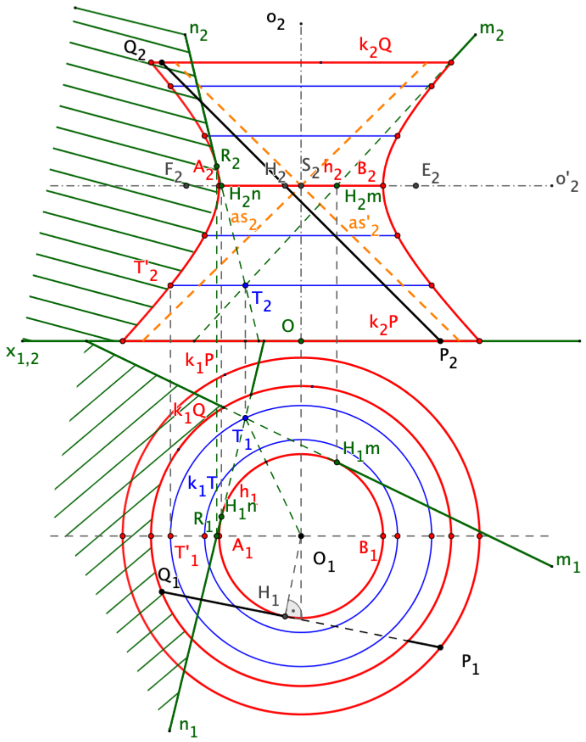
$m_2 = H_2mT_2$

$n_1 = H_1nT_1$

$H_1n \xrightarrow{ord} H_2n \in h_2$

$n_2 = H_2nT_2$

5. viditelnost tvořících přímek, zvýraznění tečné roviny:
   T_1- je v půdorysně neviditelný - T_2 leží pod $o_2' = A_2B_2$, ale ne v mezikruží mezi k_1P a k_1Q
   T_2- je v nárysně neviditelný - T_1 leží mezi A_1B_1 a $x_{1,2}$



m_1 je v okolí T_1 neviditelná, viditelná je od hrdelní kružnice h nahoru (od H_1m doprava) a dolů, kde není skrytá pod částí po kQ (od k_1Q vlevo)

m_2 je viditelná mimo těleso - od k_2Q nahoru

n_1 je v okolí T_1 neviditelná, viditelná je od hrdelní kružnice h nahoru (od H_1n dolů) a dolů, kde není skrytá pod částí mezi h po kQ (od k_1Q nahoru)

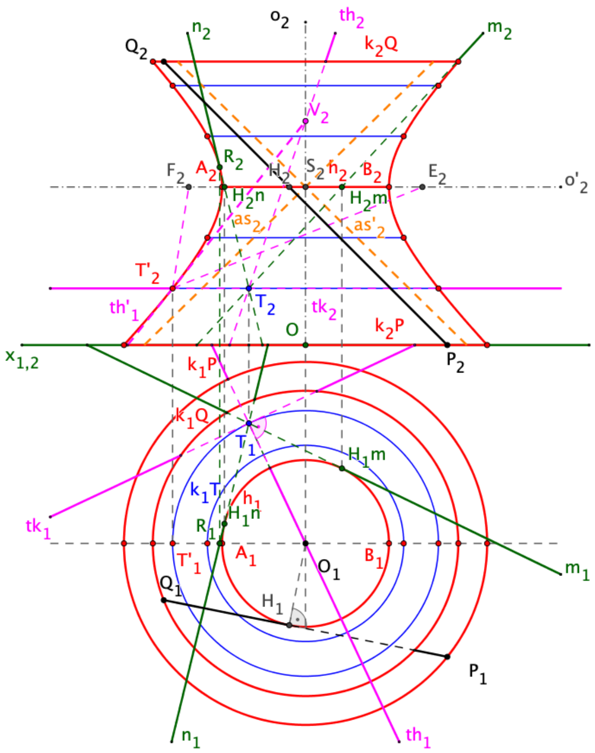
$n_1 \cap A_1B_1 = R_1 \xrightarrow{ord} R_2 \in n_2$

n_2 je v okolí T_2 neviditelná, viditelná je od bodu R, ve kterém protíná n rovinu skutečného obrysu tělesa a z neviditelného povrchu se dostává na viditelný (od R_2 nahoru)

úsečka PQ:
P_1Q_1 mezi h_1 a k_1Q neviditelná, viditelná mezi Q_1 a H_1 a od k_1Q po k_1P
P_2Q_2 je celá viditelná

tečnou rovinu zvýrazníme šrafováním:
v půdorysně - vlevo mezi m_1 a n_1 přes k_1P ale jen po k_1Q
v nárysně - vlevo od $x_{1,2}$ po R_2 k obrysové hyperbole, nad R_2 po n_2

6. tečná rovina určená dvojicí různoběžných tečen plochy[1]:



$tk-$ tečna tvořící kružnice plochy
$th-$ tečna tvořící hyperboly pl.

tk_1 je tečna kružnice k_1T v bodě T_1
$tk_2 \equiv n_2\alpha$

th'_2 půlí úhel $\angle F_2T'_2E_2$
$th'_2 \cap o_2 = V_2-$ vrchol kužele tečen dotýkajících se plochy podél kružnice kT
$V_2 \xrightarrow{ord} V_1 \equiv O_1$
$th_1 = T_1O_1$
$th_2 = T_2V_2$

[1]tečná rovina protíná plochu ve dvou tvořících přímkách, které bychom měli najít