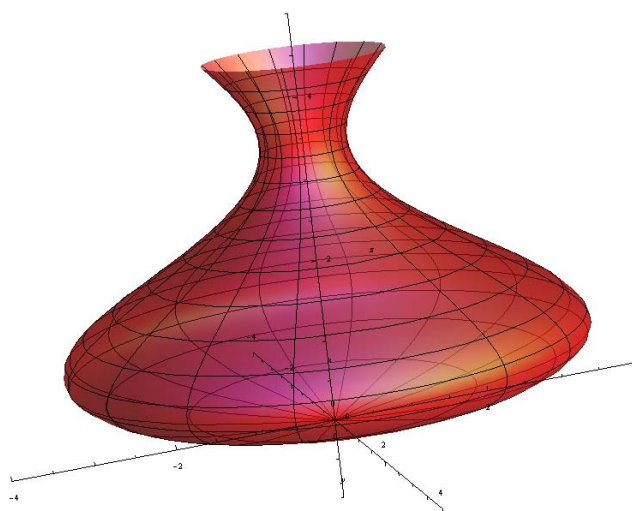


# SURFACES DANS L'ESPACE $\approx \mathbb{R}^3$

3<sup>e</sup> OS



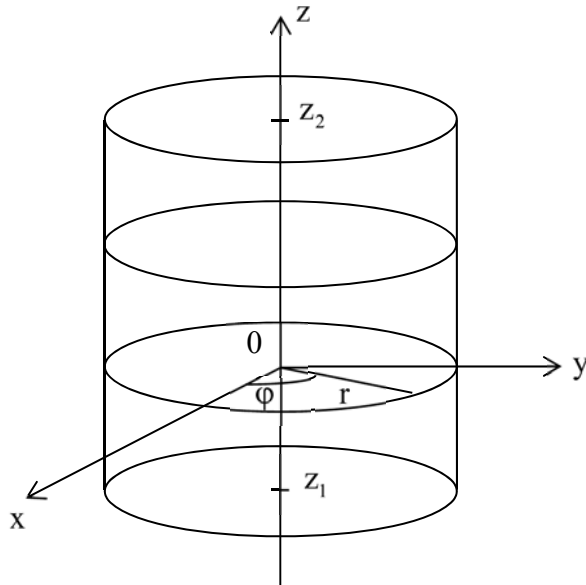
6.1	Introduction	1
6.2	Surfaces de révolution	5
6.3	Courbe sur une surface	12
6.4 *	Extrusion généralisée « Surfaces tubes »	16
6.5 *	Nœuds Gordiens	24
6.6	Solutions des exercices	28

# 6 Surfaces dans l'espace $\approx \mathbb{R}^3$

## 6.1 Introduction

Comment décrire un cylindre ou une sphère dans l'espace ?

- Un **cylindre** peut être vu comme la réunion de cercles de même rayon.



$r$  est fixé  $r > 0$

$\varphi$  varie de  $0$  à  $2\pi$ , donc  $\varphi \in [0; 2\pi]$

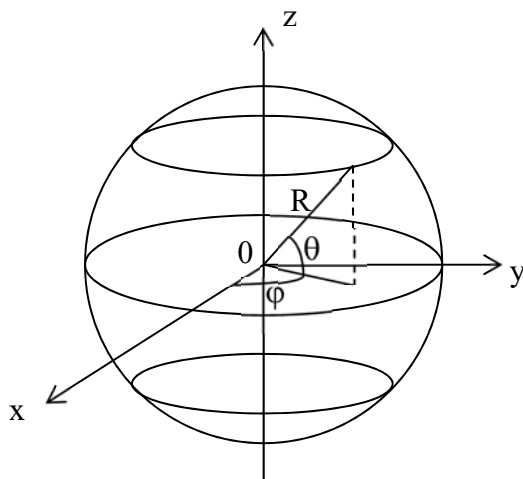
$z$  varie de  $z_1$  à  $z_2$ , donc  $z \in [z_1; z_2]$

Il faut donc deux paramètres (variables) pour décrire le cylindre.

Équations paramétriques du cylindre :

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(\varphi) \\ y = r \cdot \sin(\varphi) \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} z \in [z_1; z_2] \\ \varphi \in [0; 2\pi] \end{cases}$$

- Une **sphère** peut-être vue comme la réunion de parallèles.



$R$  est fixé  $R > 0$

$\varphi$  varie de  $0$  à  $2\pi$  donc  $\varphi \in [0; 2\pi]$ .

$\theta$  varie de  $\frac{\pi}{2}$  à  $-\frac{\pi}{2}$  donc  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

Équations paramétriques de la sphère :

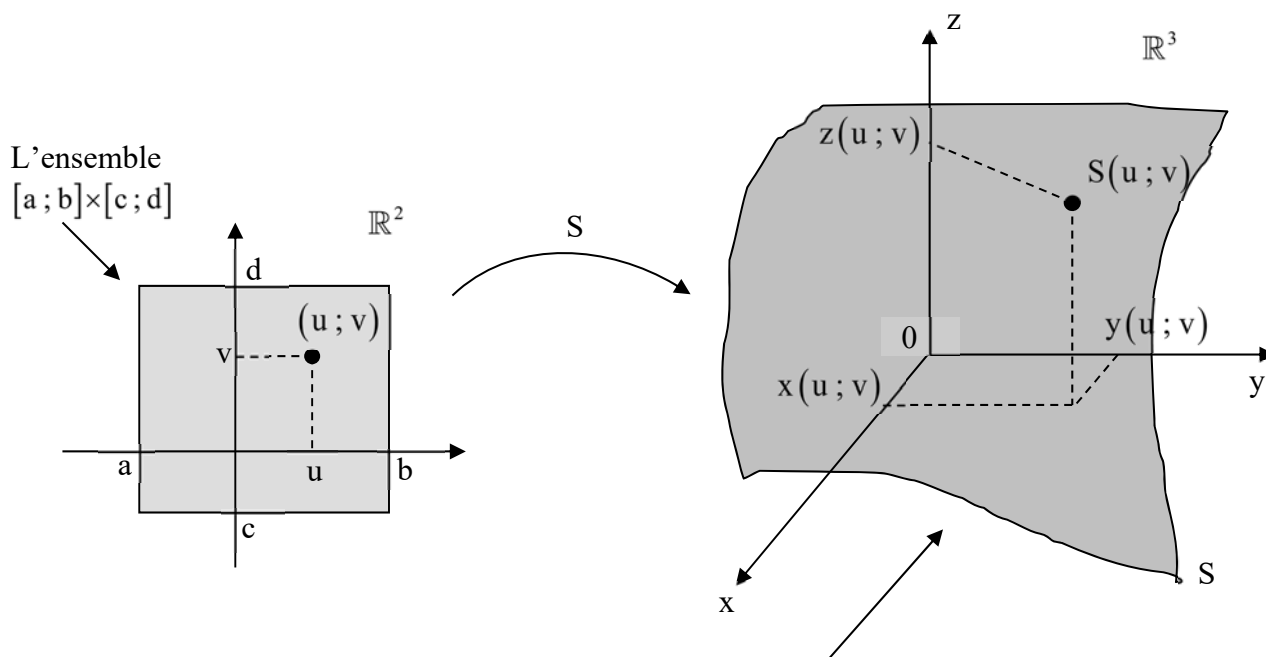
$$\begin{cases} x = R \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ y = R \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ z = R \cdot \sin(\theta) \end{cases} \quad \begin{cases} \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ \varphi \in [0; 2\pi] \end{cases}$$

## Définition

Une **paramétrisation locale** de la surface  $S$  dans  $\mathbb{R}^3$  est une application de la forme :

$$\begin{array}{l}
 S : [a;b] \times [c;d] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\
 (u; v) \rightarrow (x(u;v); y(u;v); z(u;v)) = S(u;v) \\
 \\
 \text{Avec } \left. \begin{array}{l} a < b \in \mathbb{R} \quad u \in [a; b] \subset \mathbb{R} \\ c < d \in \mathbb{R} \quad v \in [c; d] \subset \mathbb{R} \end{array} \right\} \text{ les paramètres (variables)}
 \end{array}$$

## Illustration



Représentation de l'image de  $[a; b] \times [c; d]$  par  $S$

## Terminologie / notation

- $x = x(u;v)$ ,  $y = y(u;v)$  et  $z = z(u;v)$  sont les équations paramétriques de  $S$  de paramètres  $u$  et  $v$ .
- L'ensemble  $S([a; b] \times [c; d]) = \{(x(u;v); y(u;v); z(u;v)) \mid u \in [a; b] \text{ et } v \in [c; d]\} \subset \mathbb{R}^3$  est l'image pour l'application  $S$  de l'ensemble  $[a; b] \times [c; d]$ .

Cet ensemble décrit une surface dans l'espace muni d'un repère.

## Exemples

### a) Cylindre droit :

La paramétrisation locale du cylindre dans  $\mathbb{R}^3$  est :

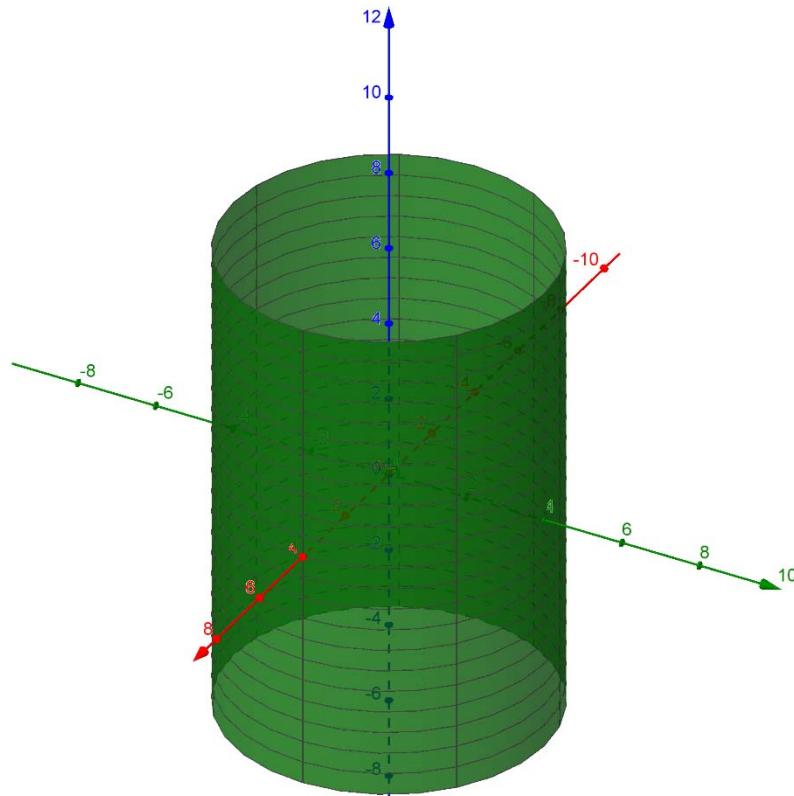
$$\begin{aligned} S : [z_1 ; z_2] \times [0 ; 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (z ; \varphi) &\rightarrow (r \cdot \cos(\varphi) ; r \cdot \sin(\varphi) ; z) = S(z ; \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x(z; \varphi) = r \cdot \cos(\varphi) \\ y(z; \varphi) = r \cdot \sin(\varphi) \\ z(z; \varphi) = z \end{cases} \text{ sont les équations paramétriques de } S \text{ de paramètres } z \text{ et } \varphi .$$

*Avec Geogebra :*

$$r = 4$$

$$\text{Surface}[r \cdot \cos(u), r \cdot \sin(u), z, u, 0, 2\pi, z, -6, 6]$$

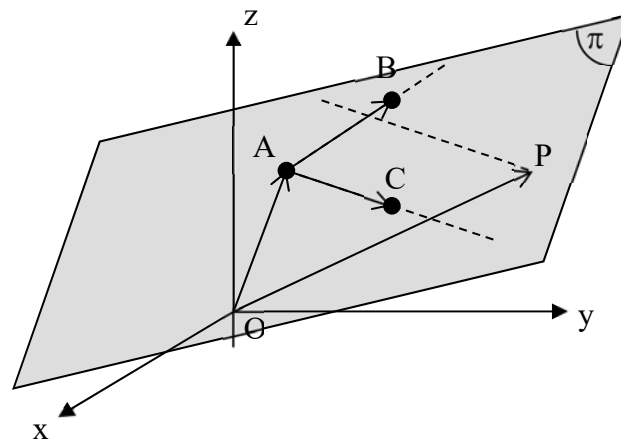


**b) Plan dans l'espace :**

$$A(a_1; a_2; a_3) \in \Pi$$

$$B(b_1; b_2; b_3) \in \Pi$$

$$C(c_1; c_2; c_3) \in \Pi$$



$$P \in \Pi \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OA} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

La paramétrisation locale du plan  $\pi$  dans  $\mathbb{R}^3$  est :

$$\begin{aligned} \Pi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\lambda; \mu) &\rightarrow (x(\lambda; \mu); y(\lambda; \mu); z(\lambda; \mu)) = \pi(\lambda; \mu) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x(\lambda; \mu) = \lambda \cdot (b_1 - a_1) + \mu \cdot (c_1 - a_1) + a_1 \\ y(\lambda; \mu) = \lambda \cdot (b_2 - a_2) + \mu \cdot (c_2 - a_2) + a_2 \\ z(\lambda; \mu) = \lambda \cdot (b_3 - a_3) + \mu \cdot (c_3 - a_3) + a_3 \end{cases}$$

sont les équations paramétriques de  $\Pi$  de paramètres  $\lambda$  et  $\mu$ .

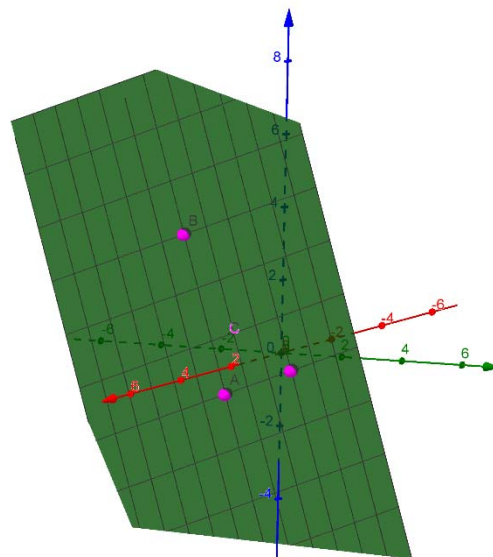
**Avec Geogebra :**

Surface[u·3 + v + 1, u + v·3 - 1, u·5 + v - 1, u, -2, 2, v, -2, 2]

$$A = (1, -1, -1)$$

$$B = (4, 0, 4)$$

$$C = (2, 2, 0)$$



## 6.2 Surfaces de révolution

### Définition

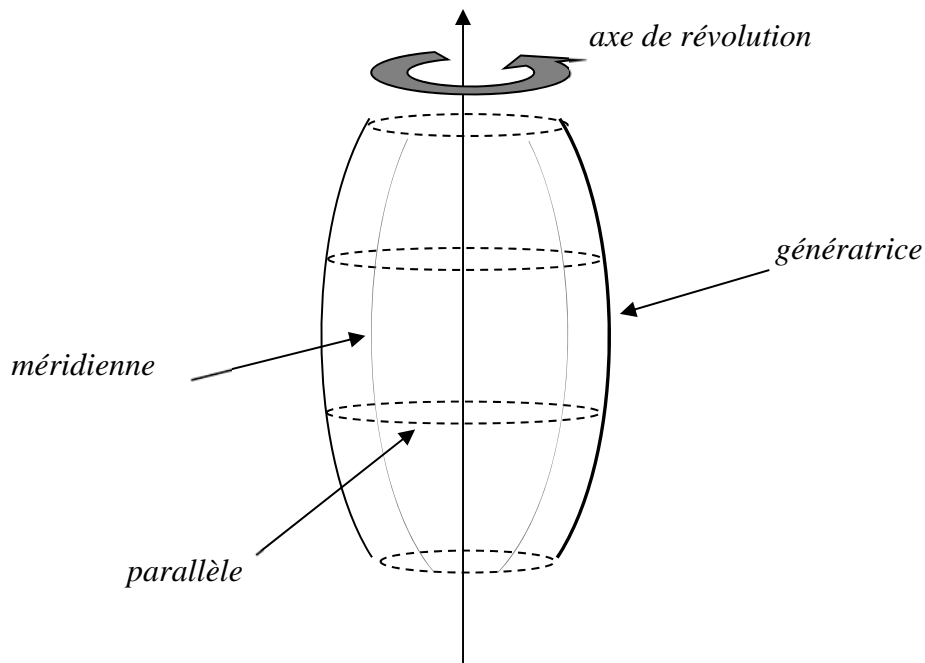
Une **surface de révolution** est une surface globalement invariante par rotation autour d'une droite fixe appelée *axe de révolution*.

### Propriétés

La rotation d'une courbe appelée *génératrice* autour d'une droite fixe engendre une surface de révolution.

- Les sections d'une surface de révolution par des demi-plans bordé par l'axe de révolution, appelées *méridiennes*, en sont des génératrices particulières.
- Les sections d'une surface de révolution par des plans perpendiculaires à l'axe sont des cercles appelés *parallèles* de la surface.

### Illustration :

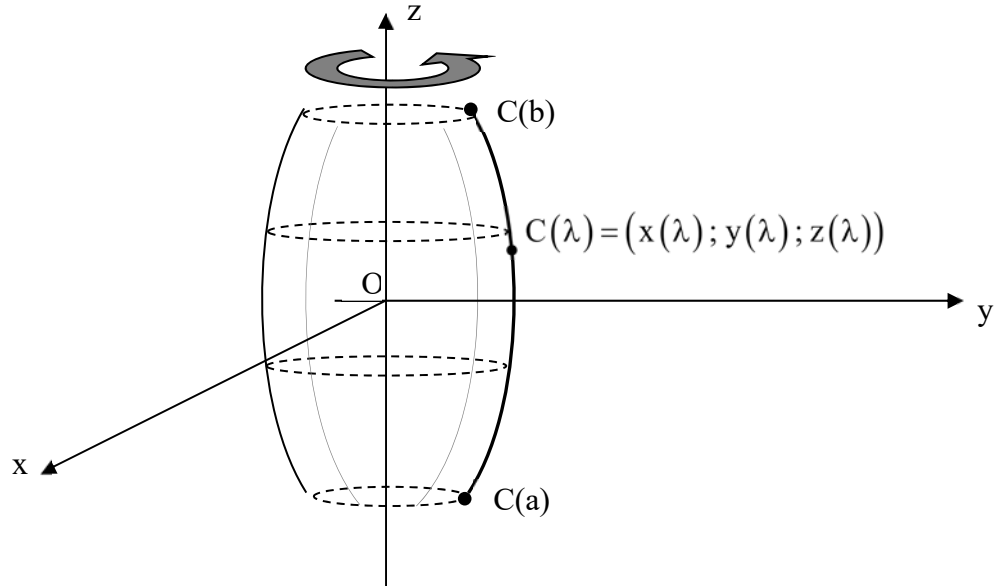


# Construction Mathématique

1) On se donne une courbe paramétrée dans  $\mathbb{R}^3$  :

$$\begin{aligned} C : [a; b] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \lambda &\rightarrow (x(\lambda); y(\lambda); z(\lambda)) = C(\lambda) \end{aligned}$$

2) Engendrons une *surface de révolution* par rotation de C (génératrice) autour de l'axe Oz.



2a) Rotation de  $C(\lambda)$  d'un angle  $\theta$  autour de l'axe Oz (axe de révolution).

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{x}(\lambda) \\ \tilde{y}(\lambda) \\ \tilde{z}(\lambda) \end{pmatrix}}_{\tilde{C}(\lambda)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{matrice } 3 \times 3 \text{ de rotation } R_\theta} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x(\lambda) \\ y(\lambda) \\ z(\lambda) \end{pmatrix}}_{C(\lambda)}$$

$$\text{Définition : } \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1z \\ a_2x + b_2y + c_2z \\ a_3x + b_3y + c_3z \end{pmatrix}$$

2b) Équations paramétriques d'une surface de révolution : (cas général)

$$\begin{cases} \tilde{x}(\lambda; \theta) = x(\lambda) \cdot \cos(\theta) - y(\lambda) \cdot \sin(\theta) \\ \tilde{y}(\lambda; \theta) = x(\lambda) \cdot \sin(\theta) + y(\lambda) \cdot \cos(\theta) \\ \tilde{z}(\lambda; \theta) = z(\lambda) \end{cases} \quad \begin{aligned} \lambda &\in [a; b] \\ \theta &\in [0; 2\pi] \end{aligned}$$

2c) Si la courbe C est incluse dans le Plan OXZ alors  $y(\lambda) = 0 \quad \forall \lambda$  (cas particulier)

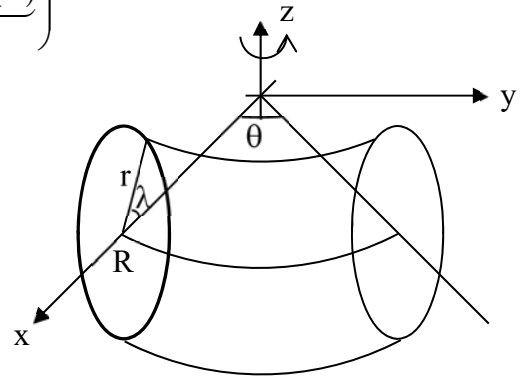
$$\begin{cases} \tilde{x}(\lambda; \theta) = x(\lambda) \cdot \cos(\theta) \\ \tilde{y}(\lambda; \theta) = x(\lambda) \cdot \sin(\theta) \\ \tilde{z}(\lambda; \theta) = z(\lambda) \end{cases} \quad \begin{aligned} \lambda &\in [a; b] \\ \theta &\in [0; 2\pi] \end{aligned}$$

## Exemple : Tore (« Bouée »)

- Axe de révolution « axe Oz ».
- Génératrice : cercle de centre  $(R;0;0)$  et de rayon  $r$  inclus dans le plan OXZ.
- Courbe paramétrée :

$$C : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\lambda \rightarrow \left( \underbrace{r \cdot \cos(\lambda) + R}_{x(\lambda)} ; \underbrace{0}_{y(\lambda)} ; \underbrace{r \cdot \sin(\lambda)}_{z(\lambda)} \right)$$



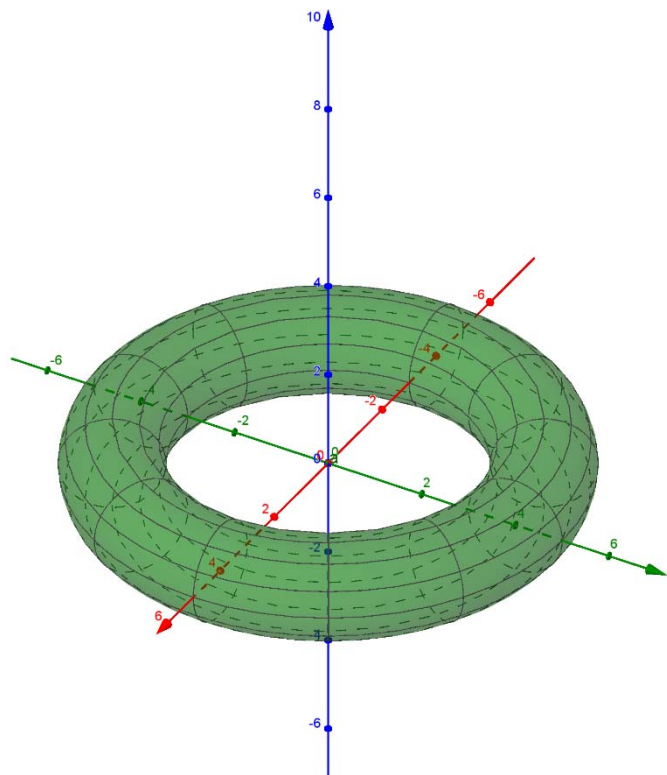
- Équations paramétriques du tore :

$$\begin{cases} \tilde{x}(\lambda, \theta) = (r \cdot \cos(\lambda) + R) \cdot \cos(\theta) \\ \tilde{y}(\lambda, \theta) = (r \cdot \cos(\lambda) + R) \cdot \sin(\theta) \\ \tilde{z}(\lambda, \theta) = r \cdot \sin(\lambda) \end{cases}$$

$$\lambda \in [0; 2\pi]$$

$$\theta \in [0; 2\pi]$$

**Avec Geogebra :**



$$r = 1$$

$$R = 4$$

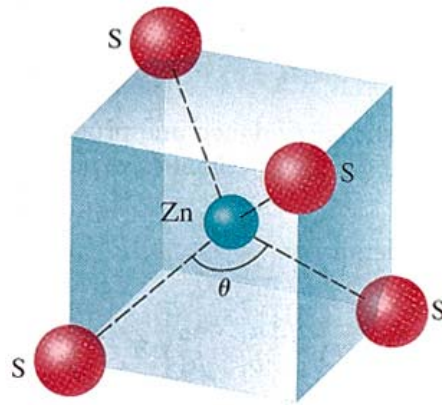
Surface $[(r \cdot \cos(u) + R) \cdot \cos(v), (r \cdot \cos(u) + R) \cdot \sin(v), r \cdot \sin(u), u, 0, 2\pi, v, 0, 2\pi]$



## Exercice 1

Dans le minéral de sphalérite, chaque atome de zinc est entouré de quatre atomes de soufre qui forment un tétraèdre dont l'atome de zinc occupe le centre. (Rappel : pour déterminer les coordonnées des sommets d'un tétraèdre, on peut inscrire cette figure dans un cube).

Dessiner dans le même repère à l'aide de *Geogebra*, les quatre atomes de soufre, l'atome de zinc et les quatre liaisons existant entre les atomes de soufre et de zinc.



## Exercice 2

a) Dessiner à l'aide de *Geogebra* les surfaces de révolution ci-dessous avec leur génératrice.

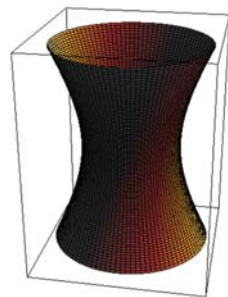
Pour chaque surface de révolution donner :

i) Le nom de la génératrice (cercle, droite, etc.) et la courbe paramétrée dans  $\mathbb{R}^3$  correspondante.

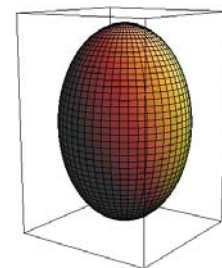
ii) la paramétrisation locale  $S$  dans  $\mathbb{R}^3$  correspondante.

Indications : L'axe de révolution choisi est "l'axe des  $z$ ".  
Pour déterminer les équations paramétriques de la génératrice, regarder dans la table C.R.M. ainsi que sur Internet .

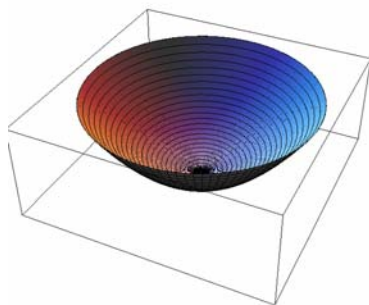
b) Les animations sont les bienvenues !



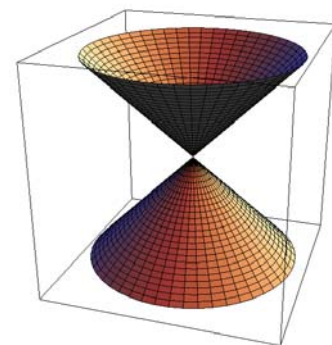
b.1) Hyperboloïde



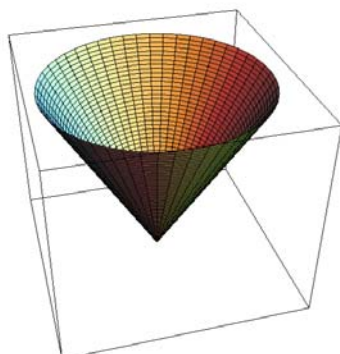
b.2) Ellipsoïde



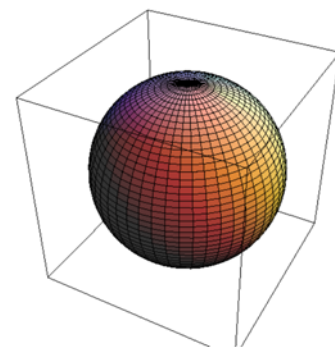
b.3) Paraboloïde



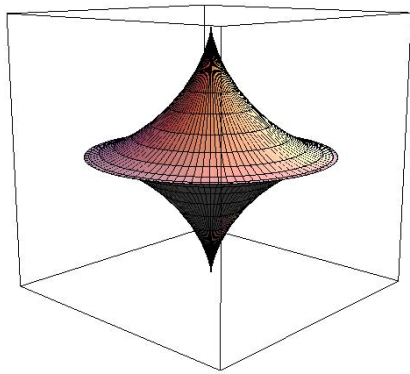
b.4) Cône circulaire droit à deux nappes



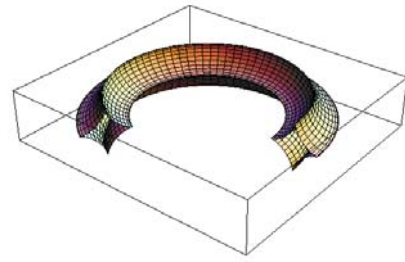
b.5) Cône circulaire droit à une nappe



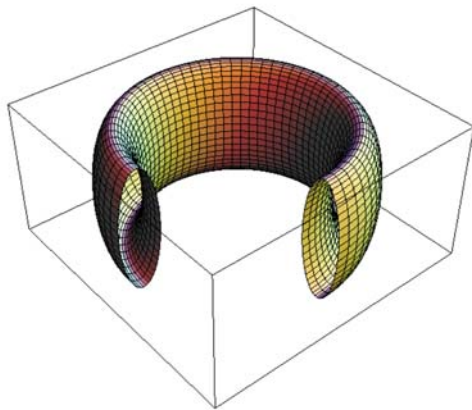
b.6) Sphère



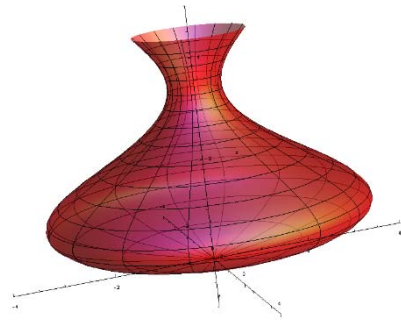
b.7) Astroïde de révolution



b.8) Tore / Astroïde de révolution



b.9) Tore / ellipse de révolution

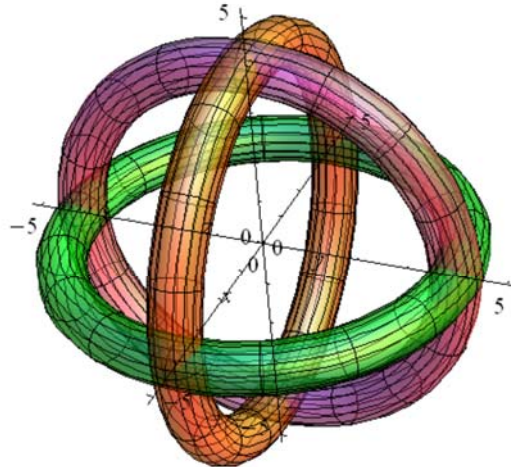


b.10) Vase

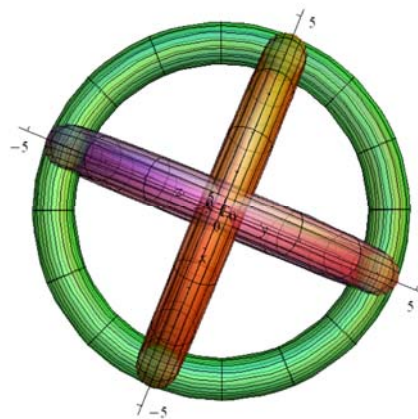
### Exercice 3

a) Représenter à l'aide de *Geogebra* le  $M\_Tore$  (*multiple Tore*) :

b) Les animations sont les bienvenues !



Vue 1



Vue 2

## 6.3 Courbes sur une surface

1) On se donne une paramétrisation locale d'une surface  $S$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

$$\begin{aligned} S : [a;b] \times [c;d] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta; \lambda) &\rightarrow (x(\theta; \lambda); y(\theta; \lambda); z(\theta; \lambda)) = S(\theta; \lambda) \end{aligned}$$

Avec  $\left. \begin{array}{l} a < b \in \mathbb{R} \quad \theta \in [a; b] \subset \mathbb{R} \\ c < d \in \mathbb{R} \quad \lambda \in [c; d] \subset \mathbb{R} \end{array} \right\}$  les paramètres (variables)

2) On définit une fonction réelle  $f$  de  $[a; b]$  dans  $[c; d]$  :  $\lambda = f(\theta)$ .

La fonction  $f$  définit une courbe paramétrée dans  $\mathbb{R}^2$ , notée  $C_f$ , de la forme :

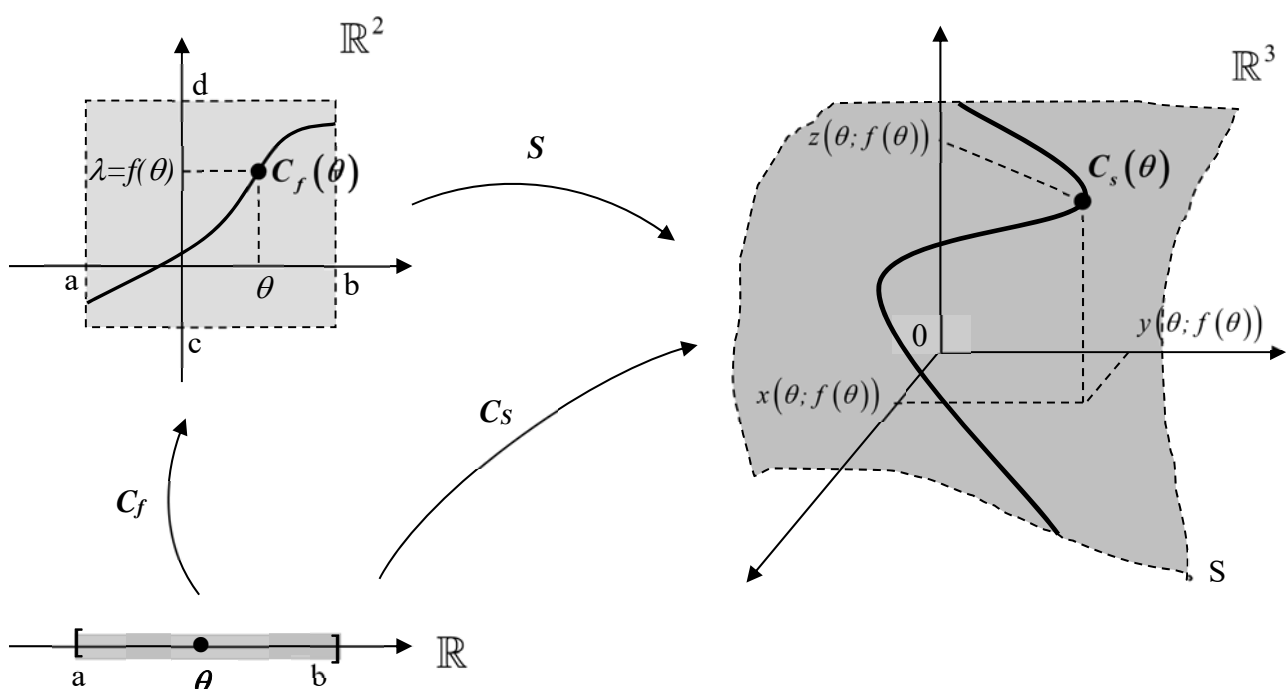
$$\begin{aligned} C_f : [a;b] &\rightarrow [a;b] \times [c;d] \\ \theta &\rightarrow (\theta; f(\theta)) = C_f(\theta) \end{aligned}$$

3) On obtient, par composition d'applications, une courbe paramétrée dans  $\mathbb{R}^3$ , notée  $C_s$ , de la forme :

$$\begin{aligned} C_s : [a;b] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \theta &\rightarrow (x(\theta; f(\theta)); y(\theta; f(\theta)); z(\theta; f(\theta))) = C_s(\theta) \end{aligned}$$

Remarque :  $C_s(\theta) = (S \circ C_f)(\theta) = S(C_f(\theta))$

### Illustration



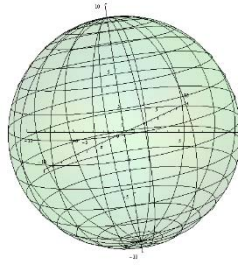
## Exemples : Courbes sur une sphère

### Exemple 1

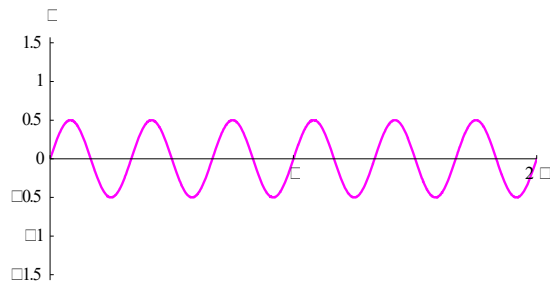
a) Surface  $S$  : Sphère de rayon  $R=9$

$$S : \left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \times [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\lambda; \theta) \rightarrow (R \cdot \cos(\lambda) \cdot \cos(\theta); R \cdot \cos(\lambda) \cdot \sin(\theta); R \cdot \sin(\lambda)) = S(\lambda; \theta)$$



b) Fonction réelle  $f$  de  $[0; 2\pi]$  dans  $\left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$  :  $\lambda = f(\theta) = a \cdot \sin(b \cdot \theta)$      $a = \frac{1}{2}$ ;  $b = 6$



3) Courbe sur une surface  $C_S$  :

$$C_S : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\theta \rightarrow (R \cdot \cos(a \cdot \sin(b \cdot \theta)) \cdot \cos(\theta); R \cdot \cos(a \cdot \sin(b \cdot \theta)) \cdot \sin(\theta); R \cdot \sin(a \cdot \sin(b \cdot \theta))) = C_S(\theta)$$

Avec Geogebra :

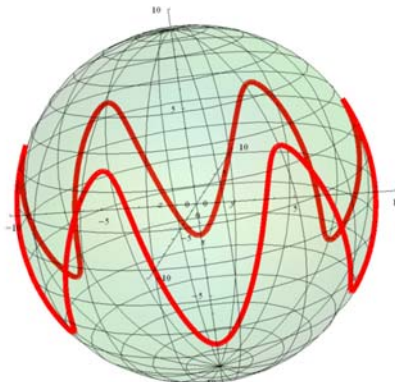
$$R = 8$$

$$a = 1/2$$

$$b = 6$$

$$f(v) = a \cdot \sin(bv)$$

$$\text{Courbe} [R \cdot \cos(f(v)) \cdot \cos(v), R \cdot \cos(f(v)) \cdot \sin(v), R \cdot \sin(f(v)), v, 0, 2\pi]$$

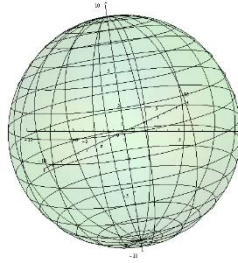


## Exemple 2 : Clélia

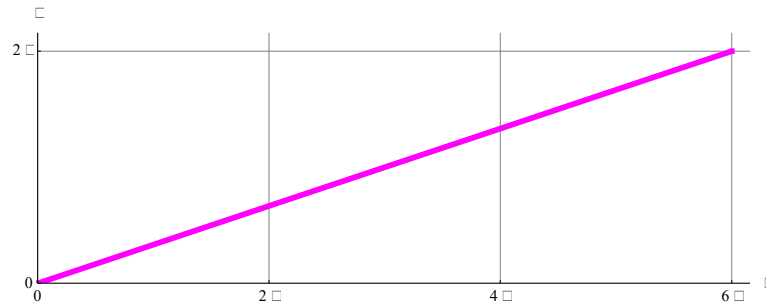
a) Surface  $S$  : Sphère de rayon  $R=9$

$$S : \left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \times [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\lambda; \theta) \rightarrow (R \cdot \cos(\lambda) \cdot \cos(\theta); R \cdot \cos(\lambda) \cdot \sin(\theta); R \cdot \sin(\lambda)) = S(\lambda; \theta)$$



b) Fonction réelle  $f$  de  $[0; q \cdot 2\pi]$  dans  $[0; 2\pi]$  :  $\lambda = f(\theta) = \frac{p}{q} \cdot \theta$   $p=1$  ;  $q=3$



3) Courbe sur une surface  $C_S$  :

$$C_S : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\theta \rightarrow \left( R \cdot \cos\left(\frac{p}{q} \cdot \theta\right) \cdot \cos(\theta); R \cdot \cos\left(\frac{p}{q} \cdot \theta\right) \cdot \sin(\theta); R \cdot \sin\left(\frac{p}{q} \cdot \theta\right) \right) = C_S(\theta)$$

Avec Geogebra :

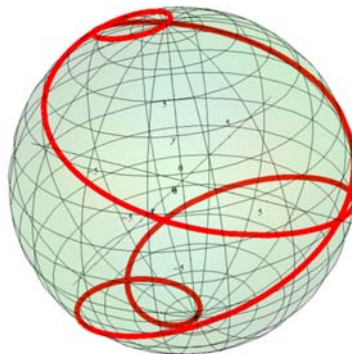
$$R = 8$$

$$p = 1$$

$$q = 3$$

$$f(v) = (p/q) \cdot v$$

$$\text{Courbe} [R \cdot \cos(f(v)) \cdot \cos(v), R \cdot \cos(f(v)) \cdot \sin(v), R \cdot \sin(f(v)), v, 0, 2\pi]$$



Exemple 3 : Solénoïde torique (p;q)

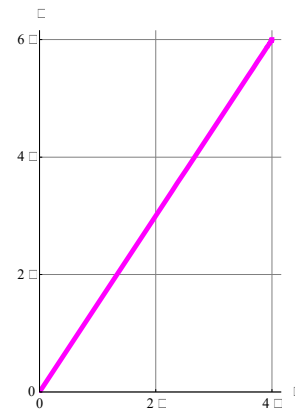
a) Surface S : Tore  $R=3 ; r=1$

$$S : [0; 2\pi] \times [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\lambda ; \theta) \rightarrow \left( (r \cdot \cos(\lambda) + R) \cdot \cos(\theta) ; (r \cdot \cos(\lambda) + R) \cdot \sin(\theta) ; r \cdot \sin(\lambda) \right) = S(\lambda; \theta)$$

b) Fonction réelle f de  $[0; q \cdot 2\pi]$  dans  $[0; p \cdot 2\pi]$  :

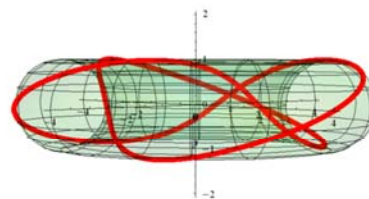
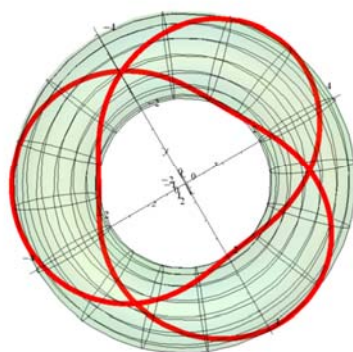
$$\lambda = f(\theta) = \frac{p}{q} \cdot \theta \quad p = 3 ; q = 2$$



3) Courbe sur une surface  $C_S$  :

$$C_S : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\theta \rightarrow \left( \left( r \cdot \cos\left(\frac{p}{q} \cdot \theta\right) + R \right) \cdot \cos(\theta) ; \left( r \cdot \cos\left(\frac{p}{q} \cdot \theta\right) + R \right) \cdot \sin(\theta) ; r \cdot \sin\left(\frac{p}{q} \cdot \theta\right) \right) = C_S(\theta)$$



Avec Geogebra :

$$R = 4$$

$$r = 1$$

$$p = 3$$

$$q = 2$$

$$f(v) = (p/q) \cdot v$$

$$\text{Courbe}[(r \cdot \cos(f(v)) + R) \cdot \cos(v) , (r \cdot \cos(f(v)) + R) \cdot \sin(v) , r \cdot \sin(f(v)), v , 0 , 2\pi]$$

Activité :

- i) Déterminer le nombre de tours que fait la courbe  $C_S$  autour de l'axe  $Oz$  (nombres de brins d'une section du tube) en fonction de  $p$  et  $q$ .
- ii) Déterminer le nombre d'enroulement que fait la courbe  $C_S$  autour du cercle de rayon  $R$  en fonction de  $p$  et  $q$ .
- iii) Si on considère une projection de la courbe  $C_S$  sur le plan  $Oxy$ , déterminer le nombre de croisement que fait la courbe  $C_S$  en fonction de  $p$  et  $q$ .



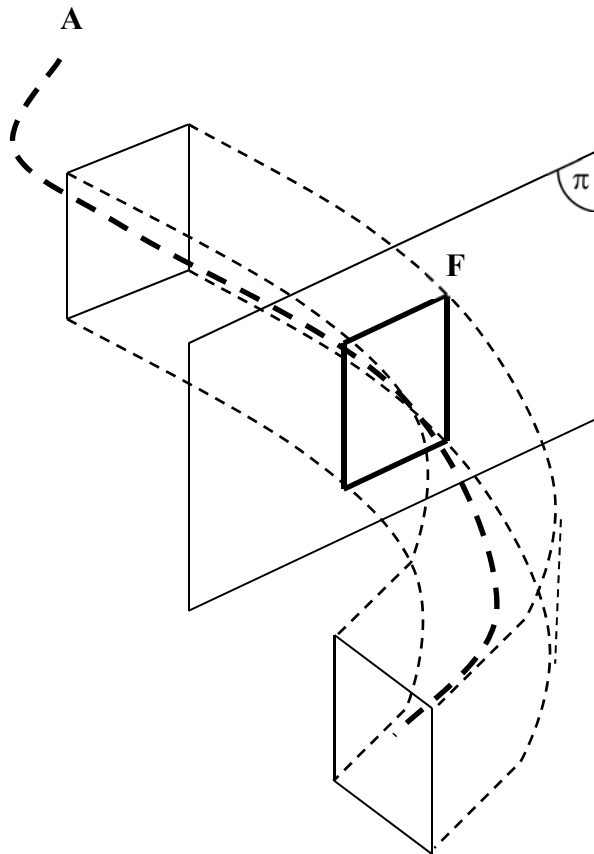
## 6.4 Extrusion généralisée « Surfaces tubes »

### Introduction

L'*extrusion généralisée* est un procédé qui permet de construire une surface à partir de deux courbes, l'une appelée *âme*  $A$ , et notée  $A$ , l'autre appelée *forme* de la surface, et notée  $F$ .

La surface en question est engendrée en plaçant la courbe *forme*  $F$  centrée en chaque point de la courbe *âme*  $A$ , dans un plan  $\Pi$  perpendiculaire à la courbe âme.

### Illustration



### Remarque

Les surfaces de révolution sont des cas particuliers de l'extrusion généralisée :

L'*âme*  $A$  est un cercle de rayon  $R$  et la *forme*  $F$  est la génératrice de la surface de révolution.

# Construction mathématique

1) On se donne une courbe paramétrée dans  $\mathbb{R}^3$ . (**L'âme A** de la surface)

$$\begin{array}{l} A : [a ; b] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \lambda \rightarrow (x(\lambda); y(\lambda); z(\lambda)) = A(\lambda) \end{array}$$

Remarque :  $\vec{A}(\lambda) = (x(\lambda); y(\lambda); z(\lambda))$  est le « vecteur position ».

2) On calcule  $\vec{v}(\lambda) = (x'(\lambda); y'(\lambda); z'(\lambda))$

Remarques :  $\vec{v}(\lambda)$  est le « vecteur vitesse »

$x'(\lambda)$  est la dérivée 1<sup>ère</sup> de  $x(\lambda)$

$y'(\lambda)$  est la dérivée 1<sup>ère</sup> de  $y(\lambda)$

$z'(\lambda)$  est la dérivée 1<sup>ère</sup> de  $z(\lambda)$

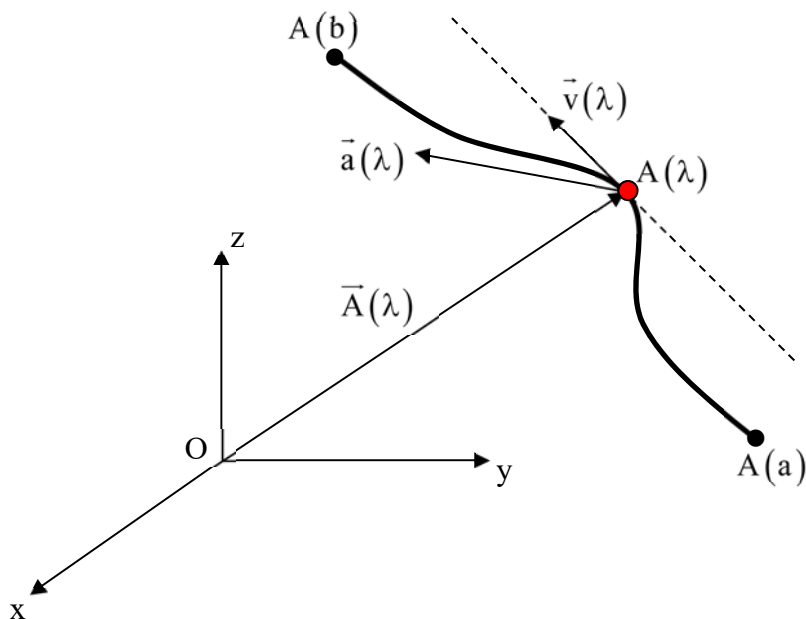
Le vecteur  $\vec{v}(\lambda)$  est tangent à la courbe A en  $A(\lambda)$

3) On calcule  $\vec{a}(\lambda) = (x''(\lambda); y''(\lambda); z''(\lambda))$

Remarques :  $\vec{a}(\lambda)$  est le « vecteur accélération »

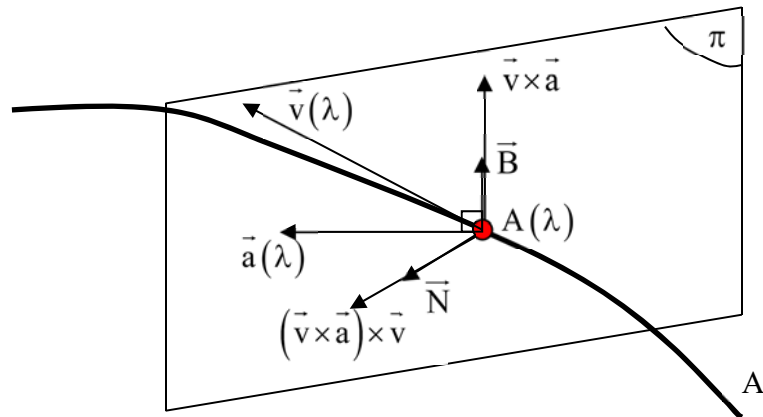
$x''(\lambda)$ ,  $y''(\lambda)$ ,  $z''(\lambda)$  sont les dérivées secondes de  $x(\lambda)$ ,  $y(\lambda)$ ,  $z(\lambda)$ .

## Illustration



4) Calculons une base du plan  $\Pi$  à l'aide des vecteurs  $\vec{v}(\lambda)$  et  $\vec{a}(\lambda)$ .

Illustration



Remarque :

Dans cette illustration les vecteurs  $\vec{N}$  et  $\vec{B}$  forment une base orthonormée du plan  $\Pi$ .

Calculons  $\vec{N}$  et  $\vec{B}$  :

4.1) On calcule  $\vec{v} \times \vec{a}$  ( $\vec{v} \times \vec{a}$  est  $\perp$  à  $\vec{v}$  et à  $\vec{a}$ )

4.2) On calcule  $(\vec{v} \times \vec{a}) \times \vec{v}$  ( $(\vec{v} \times \vec{a}) \times \vec{v}$  est  $\perp$  à  $\vec{v}$  et à  $\vec{v} \times \vec{a}$ )

4.3) On normalise  $\vec{v} \times \vec{a}$  :  $\vec{B} = \frac{\vec{v} \times \vec{a}}{\|\vec{v} \times \vec{a}\|}$

Remarques : •  $\vec{B}$  est un vecteur de norme 1, c.-à-d.  $\|\vec{B}\| = 1$

$$\bullet \|\vec{v} \times \vec{a}\| \Rightarrow \sqrt{(\vec{v} \times \vec{a}) \cdot (\vec{v} \times \vec{a})}$$

4.4) On normalise  $(\vec{v} \times \vec{a}) \times \vec{v}$  :  $\vec{N} = \frac{(\vec{v} \times \vec{a}) \times \vec{v}}{\|(\vec{v} \times \vec{a}) \times \vec{v}\|}$

Remarques : •  $\vec{N}$  est un vecteur de norme 1, c.-à-d.  $\|\vec{N}\| = 1$

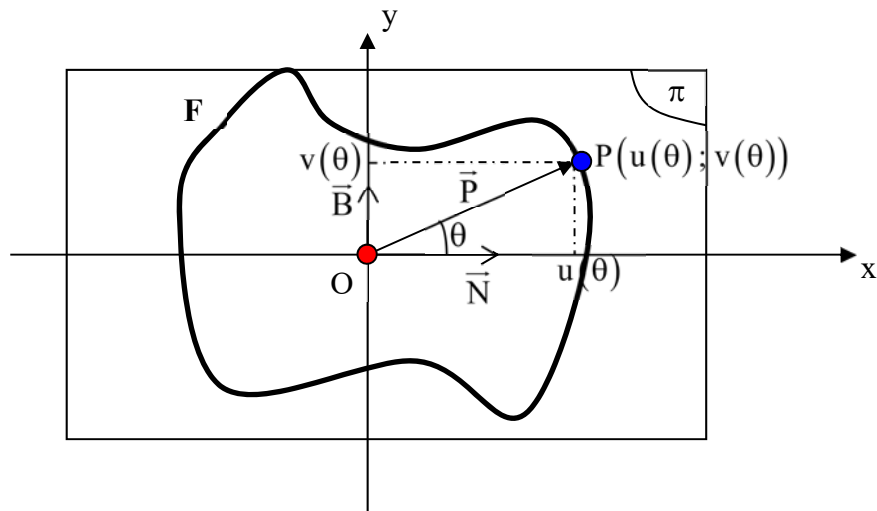
$$\bullet \|(\vec{v} \times \vec{a}) \times \vec{v}\| \Rightarrow \sqrt{[(\vec{v} \times \vec{a}) \times \vec{v}] \cdot [(\vec{v} \times \vec{a}) \times \vec{v}]}$$

**Conclusion :**

$\vec{N}(\lambda)$  et  $\vec{B}(\lambda)$  sont perpendiculaires ( $\vec{N} \perp \vec{B}$ ) et de norme 1. Ils engendrent par combinaison linéaire le plan normal  $\Pi$  (perpendiculaire) à la *courbe*  $A$ , au point  $A(\lambda)$ .

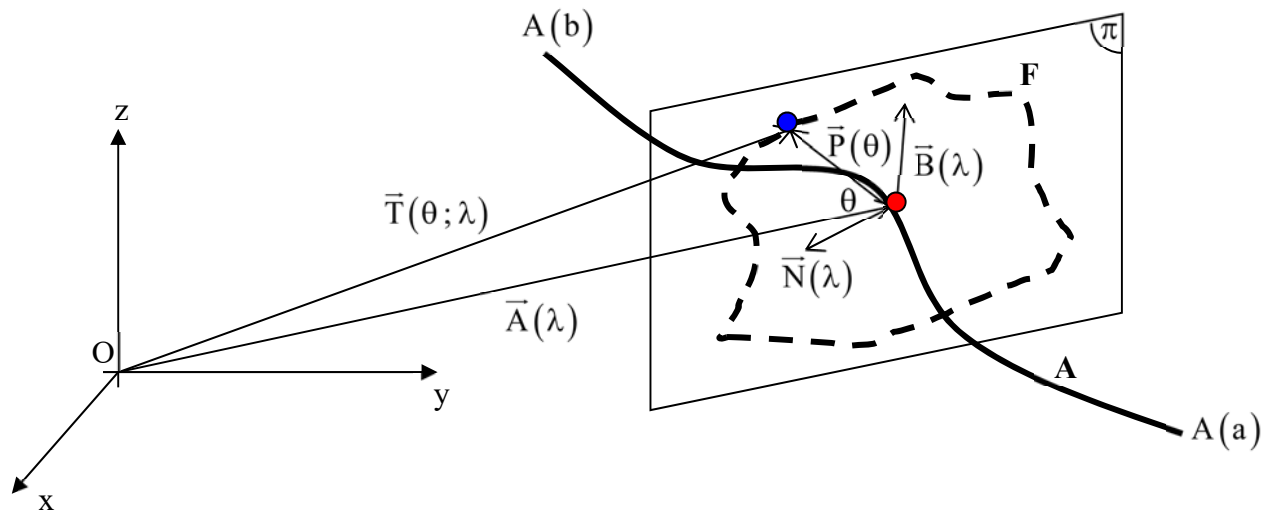
- 5) Utilisons les vecteurs  $\vec{N}$  et  $\vec{B}$  (vecteurs de base du plan  $\Pi$ ) pour écrire la **forme F** de la surface.

Illustration



(Dans le plan  $\pi$ )  $\boxed{\vec{P}(\theta) = u(\theta) \cdot \vec{N} + v(\theta) \cdot \vec{B}} \quad \forall \theta \in [0; 2\pi]$

- 6) Finalement :



Dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  :  $\boxed{\vec{T}(\theta; \lambda) = u(\theta) \cdot \vec{N}(\lambda) + v(\theta) \cdot \vec{B}(\lambda) + \vec{A}(\lambda)} \quad \forall \theta \in [0; 2\pi] \text{ et } \forall \lambda \in [a; b]$

**Autre notation :** (paramétrisation locale)

$$S : [0; 2\pi] \times [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\theta; \lambda) \rightarrow u(\theta) \cdot \vec{N}(\lambda) + v(\theta) \cdot \vec{B}(\lambda) + \vec{A}(\lambda) = \vec{T}(\theta; \lambda)$$

Exemple d'extrusion généralisée : « Le limaçon »

1) *Âme : Hélice circulaire dextre*

$$\begin{cases} x(\lambda) = R \cdot \cos(\lambda) \\ y(\lambda) = R \cdot \sin(\lambda) \\ z(\lambda) = a \cdot \lambda \end{cases} \quad \lambda \in [0; k \cdot 2\pi] \quad \begin{array}{l} a \in \mathbb{R}_+^* \\ k \in \mathbb{N}^* \\ R \in \mathbb{R}^* \end{array}$$

$$\vec{A}(\lambda) = (R \cdot \cos(\lambda); R \cdot \sin(\lambda); a \cdot \lambda) \quad \text{« vecteur position »}$$

$$2) \begin{cases} x'(\lambda) = (R \cdot \cos(\lambda))' = R \cdot (\cos(\lambda))' = -R \cdot \sin(\lambda) \\ y'(\lambda) = (R \cdot \sin(\lambda))' = R \cdot (\sin(\lambda))' = R \cdot \cos(\lambda) \\ z'(\lambda) = (a \cdot \lambda)' = a \cdot (\lambda)' = a \cdot 1 = a \end{cases}$$

$$\vec{v}(\lambda) = (-R \cdot \sin(\lambda); R \cdot \cos(\lambda); a) \quad \text{« vecteur vitesse »}$$

$$3) \begin{cases} x''(\lambda) = (x'(\lambda))' = (-R \cdot \sin(\lambda))' = -R \cdot (\sin(\lambda))' = -R \cdot \cos(\lambda) \\ y''(\lambda) = (y'(\lambda))' = (R \cdot \cos(\lambda))' = R \cdot (\cos(\lambda))' = -R \cdot \sin(\lambda) \\ z''(\lambda) = (z'(\lambda))' = (a)' = 0 \end{cases}$$

$$\vec{a}(\lambda) = (-R \cdot \cos(\lambda); -R \cdot \sin(\lambda); 0) \quad \text{« vecteur accélération »}$$

4) Rappel :  $\vec{i} = (1; 0; 0)$  ,  $\vec{j} = (0; 1; 0)$  ,  $\vec{k} = (0; 0; 1)$

$$\begin{aligned} 4.1) \quad \vec{v} \times \vec{a} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -R \cdot \sin(\lambda) & R \cdot \cos(\lambda) & a \\ -R \cdot \cos(\lambda) & -R \cdot \sin(\lambda) & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} R \cdot \cos(\lambda) & a \\ -R \cdot \sin(\lambda) & 0 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} -R \cdot \sin(\lambda) & a \\ -R \cdot \cos(\lambda) & 0 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} -R \cdot \sin(\lambda) & R \cdot \cos(\lambda) \\ -R \cdot \cos(\lambda) & -R \cdot \sin(\lambda) \end{vmatrix} \cdot \vec{k} \\ &= a \cdot R \cdot \sin(\lambda) \cdot \vec{i} - a \cdot R \cdot \cos(\lambda) \cdot \vec{j} + (R^2 \sin^2(\lambda) + R^2 \cos^2(\lambda)) \cdot \vec{k} \\ &= a \cdot R \cdot \sin(\lambda) \cdot \vec{i} - a \cdot R \cdot \cos(\lambda) \cdot \vec{j} + R^2 \cdot \vec{k} \\ &= (a \cdot R \cdot \sin(\lambda); -a \cdot R \cdot \cos(\lambda); R^2) \end{aligned}$$

$$4.2) (\vec{v} \times \vec{a}) \times \vec{v} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a \cdot R \cdot \sin(\lambda) & -a \cdot R \cdot \cos(\lambda) & R^2 \\ -R \cdot \sin(\lambda) & R \cdot \cos(\lambda) & a \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} -a \cdot R \cdot \cos(\lambda) & R^2 \\ R \cdot \cos(\lambda) & a \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} a \cdot R \cdot \sin(\lambda) & R^2 \\ -R \cdot \sin(\lambda) & a \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} a \cdot R \cdot \sin(\lambda) & -a \cdot R \cdot \cos(\lambda) \\ -R \cdot \sin(\lambda) & R \cdot \cos(\lambda) \end{vmatrix} \cdot \vec{k} \\
 &= (-a^2 \cdot R \cdot \cos(\lambda) - R^3 \cdot \cos(\lambda)) \cdot \vec{i} - (a^2 \cdot R \cdot \sin(\lambda) + R^3 \cdot \sin(\lambda)) \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} \\
 &= ((-a^2 - R^2) \cdot R \cdot \cos(\lambda)) \cdot \vec{i} + ((-a^2 - R^2) \cdot R \cdot \sin(\lambda)) \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} \\
 &= ((-a^2 - R^2) \cdot R \cdot \cos(\lambda); (-a^2 - R^2) \cdot R \cdot \sin(\lambda); 0)
 \end{aligned}$$

4.3) Normalisation de  $\vec{v} \times \vec{a}$  :

$$\begin{aligned}
 \|\vec{v} \times \vec{a}\| &= \sqrt{(\vec{v} \times \vec{a}) \cdot (\vec{v} \times \vec{a})} \\
 &= \sqrt{[a \cdot R \cdot \sin(\lambda)]^2 + [-a \cdot R \cdot \cos(\lambda)]^2 + [R^2]^2} \\
 &= \sqrt{a^2 \cdot R^2 \cdot \sin^2(\lambda) + a^2 \cdot R^2 \cdot \cos^2(\lambda) + R^4} \\
 &= \sqrt{a^2 \cdot R^2 (\underbrace{\sin^2(\lambda) + \cos^2(\lambda)}_{=1}) + R^4} \\
 &= \sqrt{a^2 \cdot R^2 + R^4} = \sqrt{(a^2 + R^2) \cdot R^2} = \sqrt{a^2 + R^2} \cdot R
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{B}(\lambda) &= \frac{\vec{v} \times \vec{a}}{\|\vec{v} \times \vec{a}\|} = \frac{1}{\|\vec{v} \times \vec{a}\|} \cdot (\vec{v} \times \vec{a}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + R^2} \cdot R} \cdot (a \cdot R \cdot \sin(\lambda); -a \cdot R \cdot \cos(\lambda); R^2) \\
 &= \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \cdot \sin(\lambda); -\frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \cdot \cos(\lambda); \frac{R}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right)
 \end{aligned}$$

4.4) Normalisation de  $(\vec{v} \times \vec{a}) \times \vec{v}$  :

$$\begin{aligned}
 \|(\vec{v} \times \vec{a}) \times \vec{v}\| &= \sqrt{[(\vec{v} \times \vec{a}) \times \vec{v}] \cdot [(\vec{v} \times \vec{a}) \times \vec{v}]} \\
 &= \sqrt{[(-a^2 - R^2) \cdot R \cdot \cos(\lambda)]^2 + [(-a^2 - R^2) \cdot R \cdot \sin(\lambda)]^2 + 0^2} \\
 &= \sqrt{(-a^2 - R^2)^2 \cdot R^2 \cdot \cos^2(\lambda) + (-a^2 - R^2)^2 \cdot R^2 \cdot \sin^2(\lambda)} \\
 &= \sqrt{(-a^2 - R^2)^2 \cdot R^2} = \sqrt{(-1)^2 \cdot (a^2 + R^2)^2 \cdot R^2} = (a^2 + R^2) \cdot R \\
 \vec{N}(\lambda) &= \frac{(\vec{v} \times \vec{a}) \times \vec{v}}{\|(\vec{v} \times \vec{a}) \times \vec{v}\|} = \frac{1}{\|(\vec{v} \times \vec{a}) \times \vec{v}\|} \cdot (\vec{v} \times \vec{a}) \times \vec{v} \\
 &= \frac{1}{(a^2 + R^2) \cdot R} \cdot ((-a^2 - R^2) \cdot R \cdot \cos(\lambda); (-a^2 - R^2) \cdot R \cdot \sin(\lambda); 0) \\
 &= \left( -\frac{(a^2 + R^2)}{(a^2 + R^2)} \cdot \cos(\lambda); -\frac{(a^2 + R^2)}{(a^2 + R^2)} \cdot \sin(\lambda); 0 \right) \\
 &= (-\cos(\lambda); -\sin(\lambda); 0)
 \end{aligned}$$

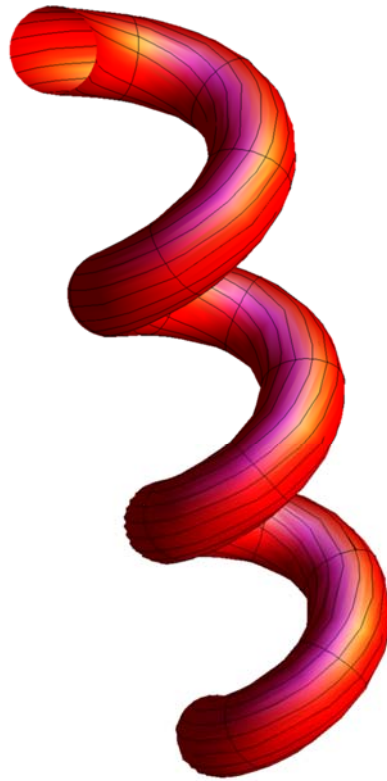
5) *Forme : Cercle de rayon r.*

$$\begin{cases} u(\theta) = r \cdot \cos(\theta) \\ v(\theta) = r \cdot \sin(\theta) \end{cases} \quad \theta \in [0; 2\pi]$$

6)  $\vec{T}(\theta; \lambda) = u(\theta) \cdot \vec{N}(\lambda) + v(\theta) \cdot \vec{B}(\lambda) + \vec{A}(\lambda) \quad \lambda \in [0; k \cdot \pi] \quad \theta \in [0; 2 \cdot \pi]$

$$\begin{aligned}
 \vec{T}(\theta; \lambda) &= r \cdot \cos(\theta) \cdot (-\cos(\lambda); -\sin(\lambda); 0) \\
 &\quad + r \cdot \sin(\theta) \cdot \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \cdot \sin(\lambda); -\frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \cdot \cos(\lambda); \frac{R}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right) \\
 &\quad + (R \cdot \cos(\lambda); R \cdot \sin(\lambda); a \cdot \lambda)
 \end{aligned}$$

Limaçon (surface tube) créé dans *Geogebra* :



Texturisation avec le logiciel *Bryce* (exportation .DXF) du limaçon (surface tube) :





## 6.5 Nœuds Gordiens (Gordian Knot)



- Point de vue historique

L'histoire des nœuds gordiens se réfère à Gordius en Grèce qui était né comme un humble paysan. À travers l'intervention d'un oracle, il fut élu nouveau roi de Phrigée. Il plaça son magnifique char dans un temple et le dédia à Zeus. Pour s'assurer qu'aucun mortel ne puisse utiliser ce char, Gordius prit plusieurs cordes et attacha l'attelage et l'axe du char ensemble en un nœud inextricable.

L'oracle arriva après et, quand il vit le char, tomba en transe et dit cette parole prophétique : « Celui qui peut dénouer le nœud Gordien deviendra le maître de toute l'Asie ». Sitôt plusieurs hommes ambitieux commencèrent à envahir le temple pour dénouer le nœud mais aucun n'arriva. Finalement en l'an 334 av. J.-C. le jeune roi de Macédoine Alexandre III vint et décida de faire un essai. Il regarda le nœud, gratta sa barbe et s'exclama : « EUREKA ! ». Il tira son épée et coupa le nœud en deux d'un seul coup. Après cela il conquiert toute l'Asie c'est pourquoi on l'appela Alexandre le Grand.

L'oracle avait utilisé le mot dénouer au lieu du mot défaire. Alexandre réalisa la différence, au lieu d'essayer de dénouer le nœud de la même manière dont il était noué, il trouva la seule solution pratique. Aujourd'hui l'expression couper le nœud gordien signifie résoudre un problème en appliquant des mesures audacieuses. L'histoire du nœud gordien nous enseigne un principe universel qui peut s'appliquer à n'importe quel problème :

« POUR RÉSOUDRE UN PROBLÈME NOUS DEVONS LIBÉRER NOTRE ESPRIT DE L'ÉTAT DE CONSCIENCE QUI A CRÉÉ LE PROBLÈME ».

Cela signifie que le problème du nœud gordien n'était pas le nœud lui-même mais la manière dont les gens regardent le nœud. C'est donc une question de perception du problème.

- Point de vue artistique

**Symbolic Sculptures by John Robinson (1935-2007):**

<http://www.atractor.pt/bangor/SculMath-p/image/main.htm>

<http://www.atractor.pt/bangor/SculMath-p/image/intromath.htm>

<http://www.atractor.pt/bangor/SculMath-p/image/torus.htm>

<http://www.popmath.org.uk/sculpture/sculpture.html>

**« Gordian Knot » : Noeud d'ordre (8;3)**



**« Rhythm of life » : Noeud d'ordre (15;4)**

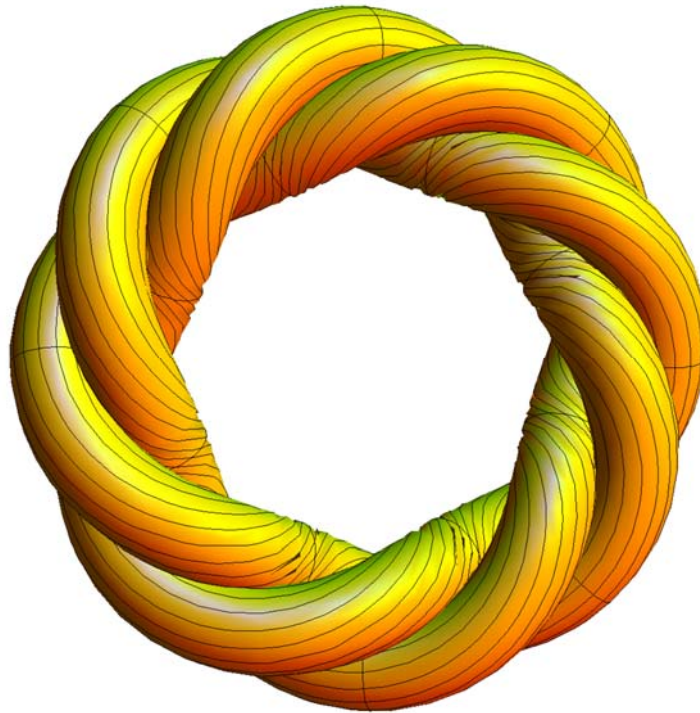


**« Immortality » : Noeud d'ordre (3;2)**



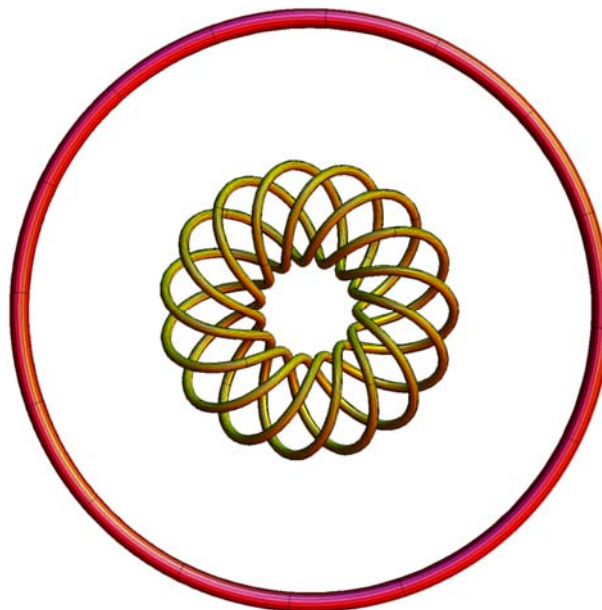
- Point de vue Mathématique

La sculpture « **Gordian Knot** » peut être vue comme une surface obtenue par une **extrusion généralisée** dont *l'âme* est un **solénoïde torique d'ordre (8;3)** et *la forme* un **cercle de rayon  $r$** .



La sculpture « Gordian Knot » avec le logiciel Mathematica.

La partie intérieure de la sculpture « **Rhythm of life** » peut être vue comme une surface obtenue par une **extrusion généralisée** dont *l'âme* est un **solénoïde torique d'ordre (15;4)** et *la forme* un **cercle de rayon  $r$** . La partie extérieure de la sculpture est un **tore**.

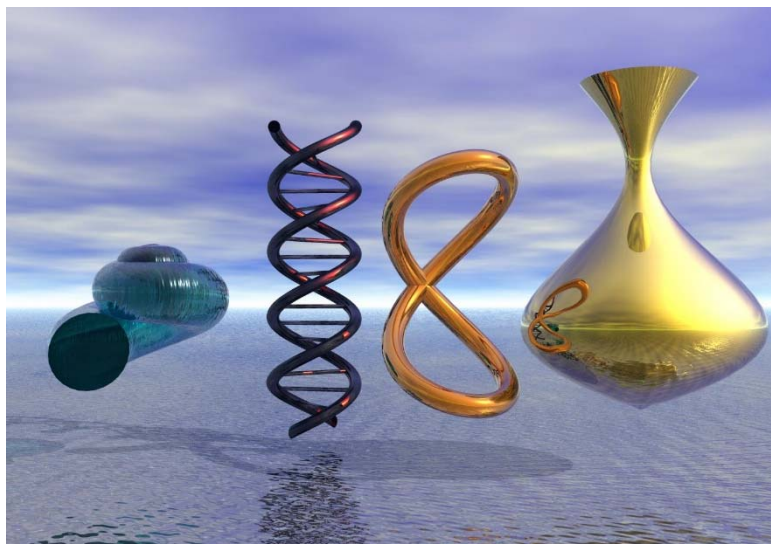


La sculpture « Rhythm of life » avec le logiciel Mathematica.



- Pour aller plus loin : Le logiciel Bryce 3D et le Raytracing

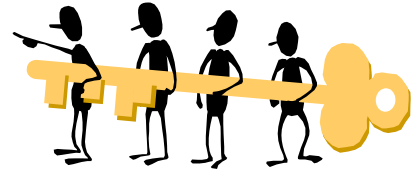
**Le logiciel Bryce 3D :** <http://www.daz3d.com/bryce-7-pro>



**Le Raytracing** (lancer de rayons) :

<http://raphaello.univ-fcomte.fr/ig/raytracing/lancerderayons.htm>

## 6.6 Solutions des exercices



Correction Activité Solénoïde torique ( $p; q$ )

**Activité :**

**i)** Déterminer le nombre de tours que fait la courbe  $C_S$  autour de l'axe  $Oz$  (nombre de brins d'une section du tube) en fonction de  $p$  et  $q$ .

**$q$**  Faux si  $q$  est un multiple de  $p$  ou  $p$  un multiple de  $q$ .

**ii)** Déterminer le nombre d'enroulement que fait la courbe  $C_S$  autour du cercle de rayon  $R$  en fonction de  $p$  et  $q$ .

**$p$**  Faux si  $q$  est un multiple de  $p$  ou  $p$  un multiple de  $q$ .

**iii)** Si on considère une projection de la courbe  $C_S$  sur le plan  $Oxy$ , déterminer le nombre de croisement que fait la courbe  $C_S$  en fonction de  $p$  et  $q$ .

**$p(q-1)$**  Faux si  $q$  est un multiple de  $p$  ou  $p$  un multiple de  $q$ .