5 A r c

5.8 Arc. Dues articulacions. Posttesat. Plantilla
5.8.1 Arc. Dues articulacions. Exemple
5.8.2 Arc. Dues articulacions. Exemple

5.8 Arc. Dues articulacions. Posttesat. Plantilla

El 2015 *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS)* publica l'estudi *Desing and exploration of externally post-tensioned structures using graphic statics* del que són autors *Leonardo Todisco, Corentin Fivet, Hugo Corres* i *Caitlin Mueller*. En aquest estudi es fa primerament un elogi d'aquelles estructures que el polígon funicular fa entenedores. És a dir, que quan una estructura pot ser resolta mitjançant el polígon funicular, per les seves barres únicament es donen esforços de comprensió o tracció, però no flexió. Això permet dimensionaments més econòmics. Però no sempre la resolució és possible. Especialment, quan l'estructura és hiperestàtica s'ha d'aportar algun efecte exterior que faci possible la solució. En aquest cas es proposa un posttesat exterior que es materialitzarà amb un tirant o tendó aplicat a les articulacions de l'estructura i constructivament accionat a posteriori. L'anàlisi es fa de la següent manera: a partir d'una geometria i pes propi coneguts s'intentarà trobar un sistema d'accions exteriors que, en combinació amb les existents puguin convertir la geometria donada en una corba funicular. La hiperestaticitat implicarà l'aparició d'indeterminacions. Aquestes obligaran al fet que la solució no sigui única, o amb altres paraules, per a cada indeterminació es crearà un numero infinit de solucions. I tot això amb la consideració d'un context gràfic.

En l'aplicació 5.7 es proposava resoldre gràficament una estructura composta per barres (o continua assimilada a barres) hiperestàtica amb un grau d'indeterminació. Era obvi que el problema no resultava senzill. Per confeccionar la plantilla d'aquesta aplicació es parteix de la mateixa de l'aplicació 5.7. Recordem que era una estructura articulada en els punts extrems A i B, composta per barres que s'ajuntaven formant nusos que, en projecció horitzontal, tenien una distància constant d. El nombre de nusos era de 15 i en cadascun d'aquests podia existir una càrrega gravitatòria Fi. Identificar la incògnita o la indeterminació com l'esforç a què estava subjecte el tirant que unia les articulacions A i B permetia resoldre el problema. Ara, a més, considerarem que les càrregues poden tenir qualsevol direcció i es considerarà el pes propi de l'arc aplicat a cadascun dels nusos.

Els autors de l'estudi, quan es tracta de fer exemples de la metodologia exposada, parlen del programa interactiu *Rhinoceros* complementat amb *Grasshopper* per esquivar les molèsties que el fet de fer hipòtesis a mà pot produir. Una de les fites d'aquesta aplicació és comprovar si amb la utilització de GeoGebra es poden igualar els resultats obtinguts amb Rhinoceros.

A continuació es detallarà el procés d'anàlisi gràfica seguit. Per a millor claredat, els passos a seguir aniran acompanyats de caselles de control que permetran eliminar i superposar seqüencies. El nom de les caselles coincidirà amb els passos a efectuar i quedaran assenyalades les que interessen en cada pas.

.Pas 0. Es col·locarà un dibuix o una fotografia de l'estructura en forma d'arc doblement articulat a calcular. Queden definits els valors de L, F, H, d i α. Es divideix la forma en 15 franges verticals de distància constant d entre elles i es fa una aproximació a l'arc original movent els nusos 1, 2,...15 que s'han creat entre les barres de subdivisió de l'arc real. Aquestes barres, els nusos i la seva numeració quedarà inalterable i a la vista durant tota la construcció de l'aplicació.

.‘Pas 1. Barres. Angles’. Casella de control assenyalada: 1. On els angles αi que cadascuna de les barres forma amb l’horitzontal queda definit. Aquesta casella pot quedar apagada durant tot el procés i nomes quedar assenyalada en el moment de l’entrada de dades o de revisió dels resultats.

.‘Pas 2. Forces. Diagrama de formes’. Casella de control assenyalada: 2. On queden definides les forces Fi, la seva intensitat, sentit i les seves línies d’acció. Són les forces exteriors a què està sotmesa l’estructura.

.‘Pas 3. Forces. Angles’. Caselles de control assenyalades: 2 i 3. Atès que les forces no tenen necessàriament que ser gravitatòries o radials s’ha de definir l’angle βi que les seves línies d’acció formen amb l’horitzontal. A l’igual que els angles de les barres, aquesta casella pot quedar apagada durant tot el procés constructiu.

.‘Pas 4. Pes propi. Diagrama de formes’. Casella de control assenyalada: 4. Amb l’ajuda del punt lliscant ‘Pes material arc’ es calculen els pesos propis de les barres Pi aplicades en els nusos. Es defineixen també les línies d’acció, que en aquest cas són verticals.

.’Pas 5. Pes propi. Diagrama de forces’. Casella de control assenyalada: 5. A partir del punt arbitrari ‘Moviment diagrama de forces’ es col·loquen correlativament les forces degudes al pes propi.

.’Pas 6. Pes propi. Radis polars’. Caselles de control assenyalades 5 i 6. Traçant paral·leles a les barres de l’estructura en el diagrama de forces i a partir de les forces calculades pel pes propi, s’obtenen unes semirectes definides com A-1, 1-2...14-15, 15-B. Observi’s que s’ha seguit un camí invers a l’habitual atès que, d’aquesta manera, no queda definit un pol i, per tant, els polígons formats són oberts i no es dona l’equilibri. En altres paraules, no s’ha creat un polígon funicular. La longitud de les semirectes controlables amb un punt mòbil pot produir inestabilitats gràfiques (fig. 5.25).

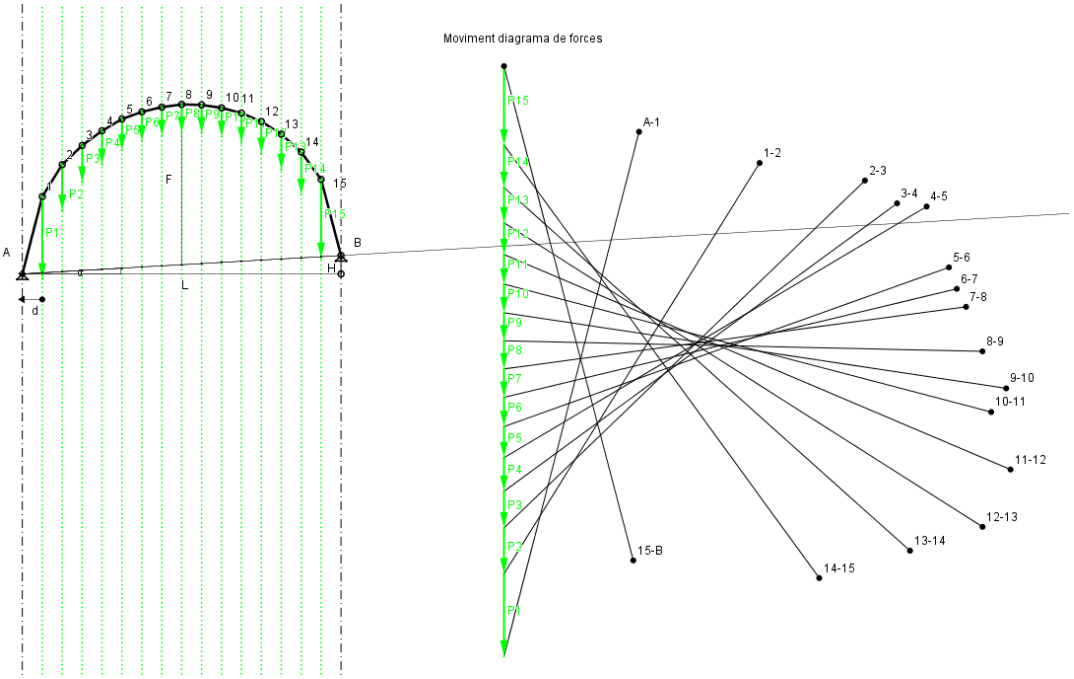

Fig. 5.25

.’Pas 7. Forces. Diagrama de forces’. Caselles de control assenyalades: 2, 4, 5, 6 i 7. Des d’un punt qualsevol M, col·locat a la línia A-1, es tracen paral·leles a les línies d’acció de les forces exteriors, que es troben en el diagrama de formes, obtenint les forces F’1...F’15. Els polígons obtinguts estan en equilibri, tal com es veu, per exemple, en el F’5, 4-5, 5-6 i P5 que s’ha ombrejat. L’equilibri es dona, sigui quina sigui la posició d’M, però els valors de les forces F’i varien. Es dona, doncs, una indeterminació, atès que el problema queda resolt en qualsevol dels infinits polígons trobats en moure el punt M. De la mateixa manera, els esforços a les barres variaran en moure el punt M (fig. 5.26).

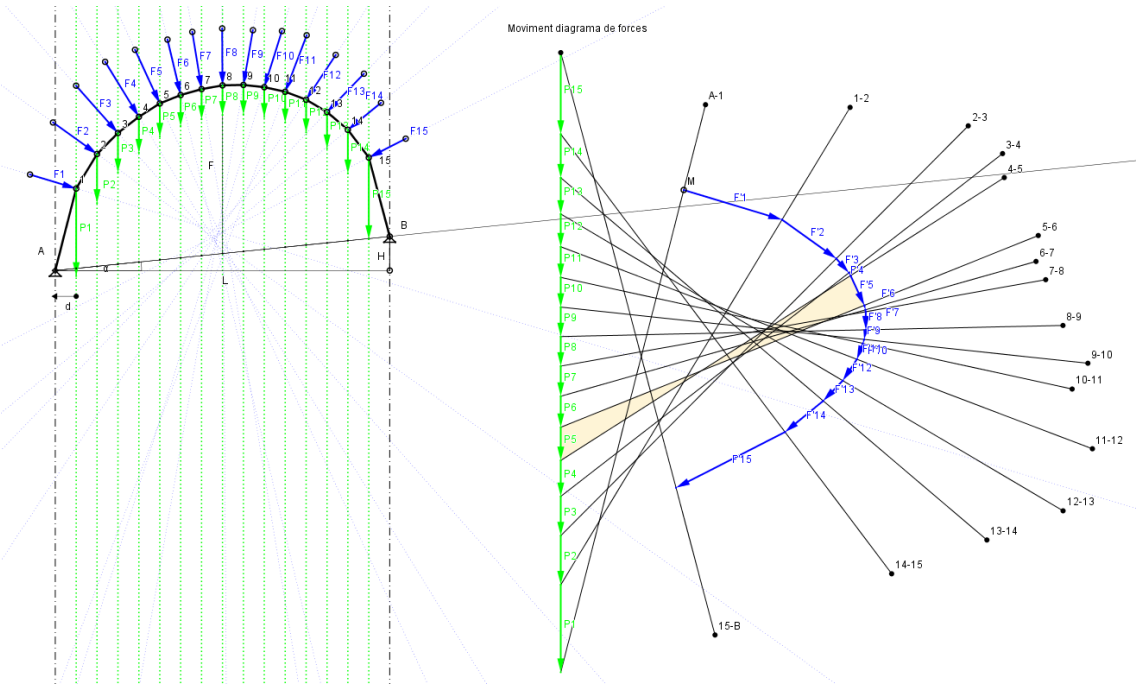

Fig. 5.26

.’Pas 8. Forces de posttesat. Diagrama de forces’. Caselles de control assenyalades: 7 i 8. Si pensem que es pot crear un sistema de posttesat de tal manera que les forces exteriors quedin anul·lades, només quedarà pendent d’anàlisi el pes propi. Aquestes forces F’’1...F’’15 coincideixen amb les forces F’1...F’15 del diagrama de forces, però de sentit contrari. Evidentment, en moure el punt M es modifica el valor d’F’1...F’15 i amb total coincidència amb les F’’1...F’’15. Les forces exteriors F1...F15 i les seves contràries de posttesat F’’1...F’’15 determinaran que les reaccions gravitatòries RA i RB siguin provocades únicament pel pes propi.

.’Pas 9. Polígon funicular de treball’. Caselles de control assenyalades: 8 i 9. Des d’un punt arbitrari N del diagrama de forces es tracen les línies polars a les forces F’’1...F’’15. El polígon funicular traçat a partir d’aquests radis polars hauria de passar pels punts A i B. Com que això no és possible, excepte si es tracta d’un sistema gravitatori o radial simètric de forces d’igual valor F1...F15, es traça un polígon funicular de treball que s’ha dibuixat amb línia discontinua. El mètode utilitzat és el del polígon funicular que passa per dos punts A i B mitjançant la ‘línia de tancament’.

.’Pas 10. Forces de posttesat. Radis polars’. Caselles de control assenyalades: 8 i 10. El pol O del diagrama de forces implica un polígon funicular que passa per A i B. Queda ombrejat el que es podria qualificar com diagrama de forces de posttesat. Les línies polars indiquen les forces de posttesat.

.Pas 11. ‘Forces de posttesat. Diagrama de formes’. Caselles de control assenyalades: 8, 10 i 11. El punt P és l’obtingut en el polígon funicular de treball. En desplaçar-lo per una línia que és paral·lela a la resultant del diagrama de forces i que passa per la intersecció del primer i últim costat del polígon funicular, es desplaça igualment el pol O. Aquest pol es desplaça per una paral·lela a la línia de tancament A-B. Existeixen infinits pols O que passen pels punt A i B. El pol O defineix un polígon funicular de posttesat en el diagrama de formes definint unes forces de posttesat. Cada moviment del pol O produeix unes forces de posttesat diferents. La posició del punt O produeix una segona indeterminació (fig. 5.27).

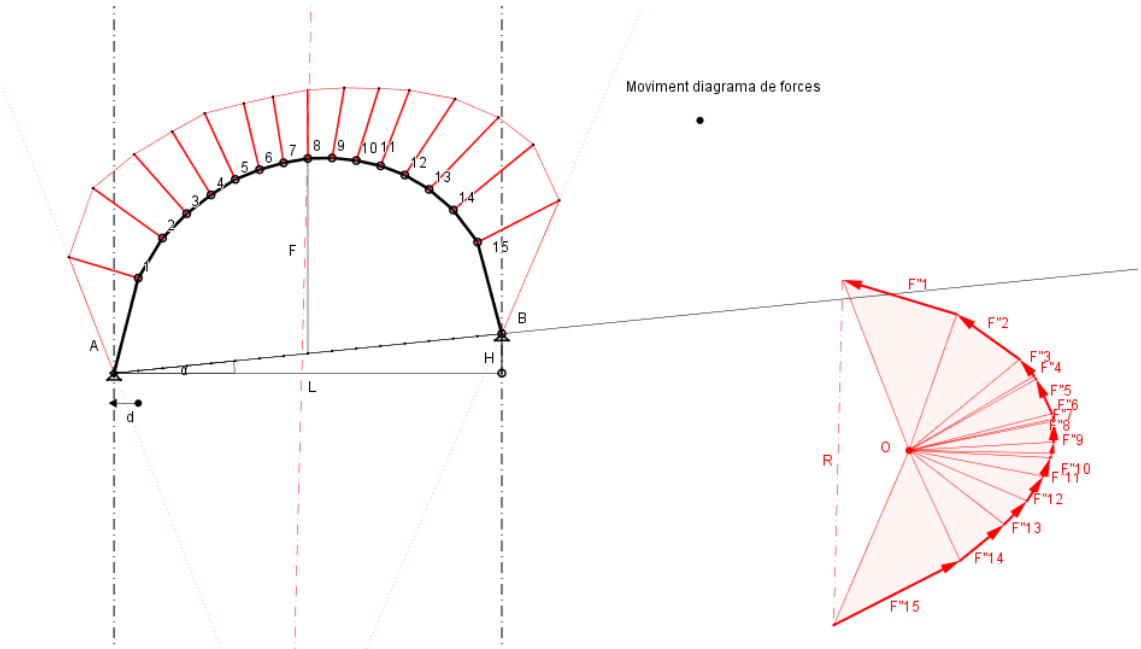

Fig. 5.27

.Pas 12. ‘Superposició’. Caselles de control assenyalades: 4, 5, 6, 8, 10, 11 i 12. Queda definit el valor de la tensió T del tensor o tirant de posttesat. Observi’s que es donen infinites solucions. Aquestes s’obtenen movent el punt P, cosa que és equivalent a moure el pol O. Moure el punt M (pas 7) també implica moure el pol O. Es posen en joc les dues indeterminacions. El valor de T condiciona el valor de les tensions a les barres i viceversa (fig. 5.28).

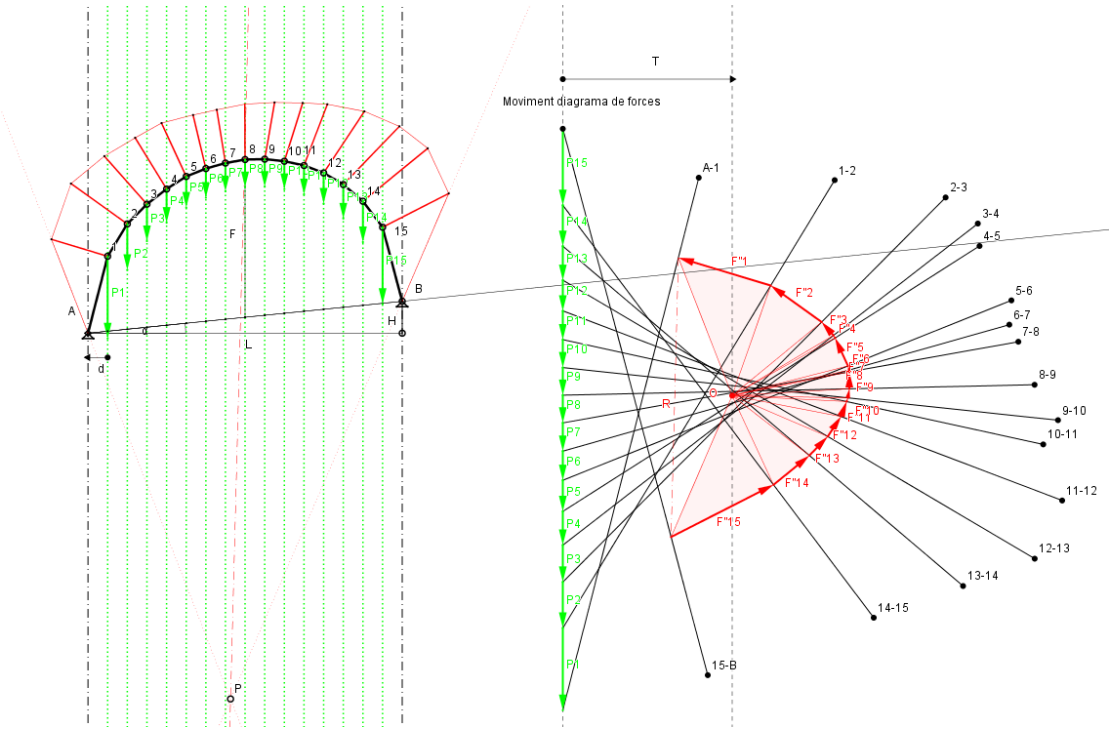

Fig. 5.28

.Pas 13. ‘Polígon funicular per a les reaccions gravitatòries’. Casella de control assenyalada: 13.

.Pas 14 .’Determinació de T, RA i RB. Casella de control assenyalada: 14 (fig. 5.29).

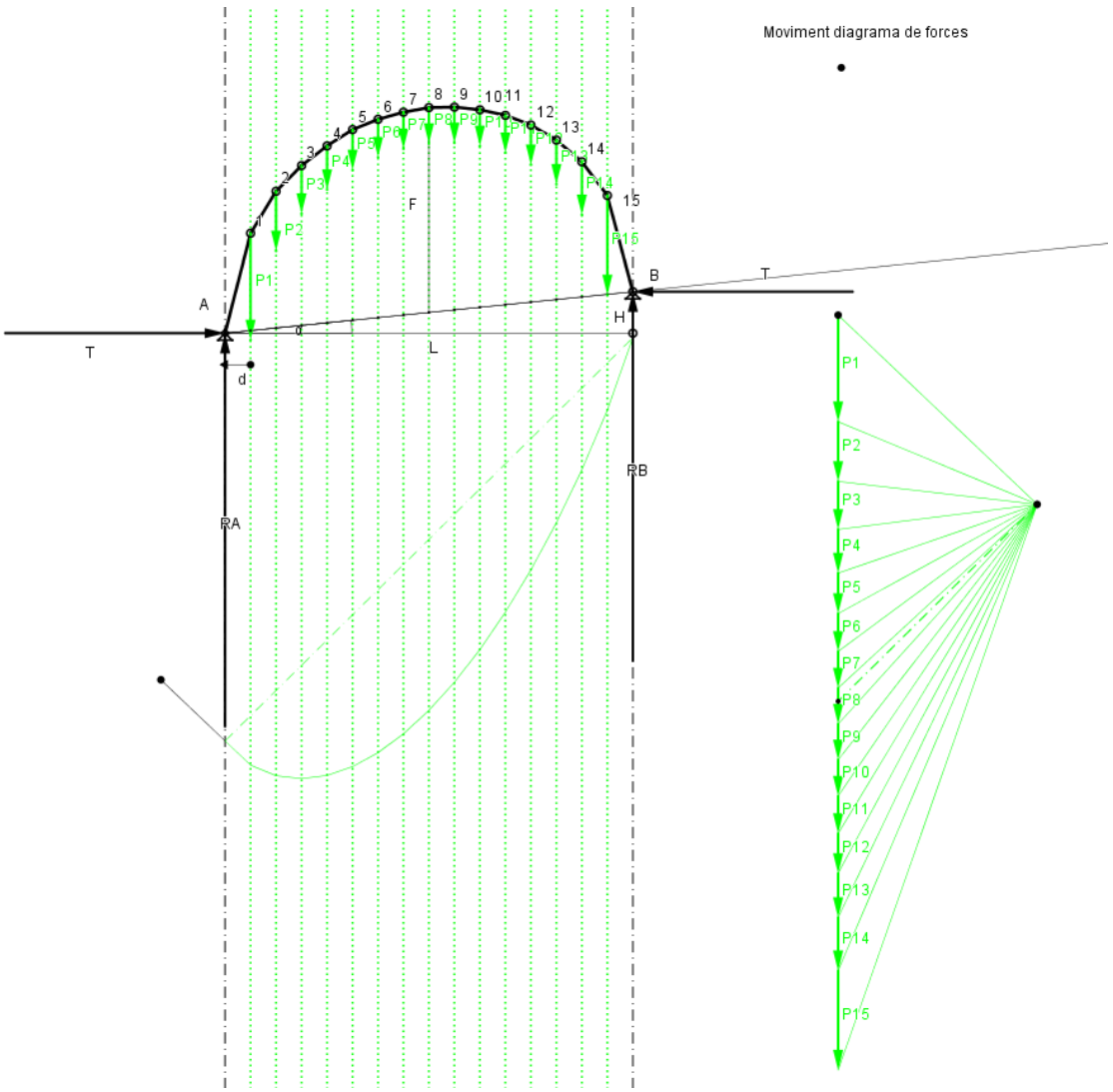

Fig. 5.29

La present aplicació, igual que la 5.7, permet una certa inclinació α de la línia de tancament A-B que es reflecteix al valor de H. En cap dels exemples de l'estudi que aquí es comenta la línia A-B és inclinada. Això és degut a que si les línies d'acció dels esforços T a les articulacions A i B no són coincidents es crea un moment de valor T·H no inclòs en aquest plantejament gràfic.

A continuació es dona una visió de la segona pantalla gràfica (fig. 5.30) per a un instant qualsevol de la construcció de la plantilla. S'observen les caselles de control, els punts lliscants, l'entrada de dades i els resultats.

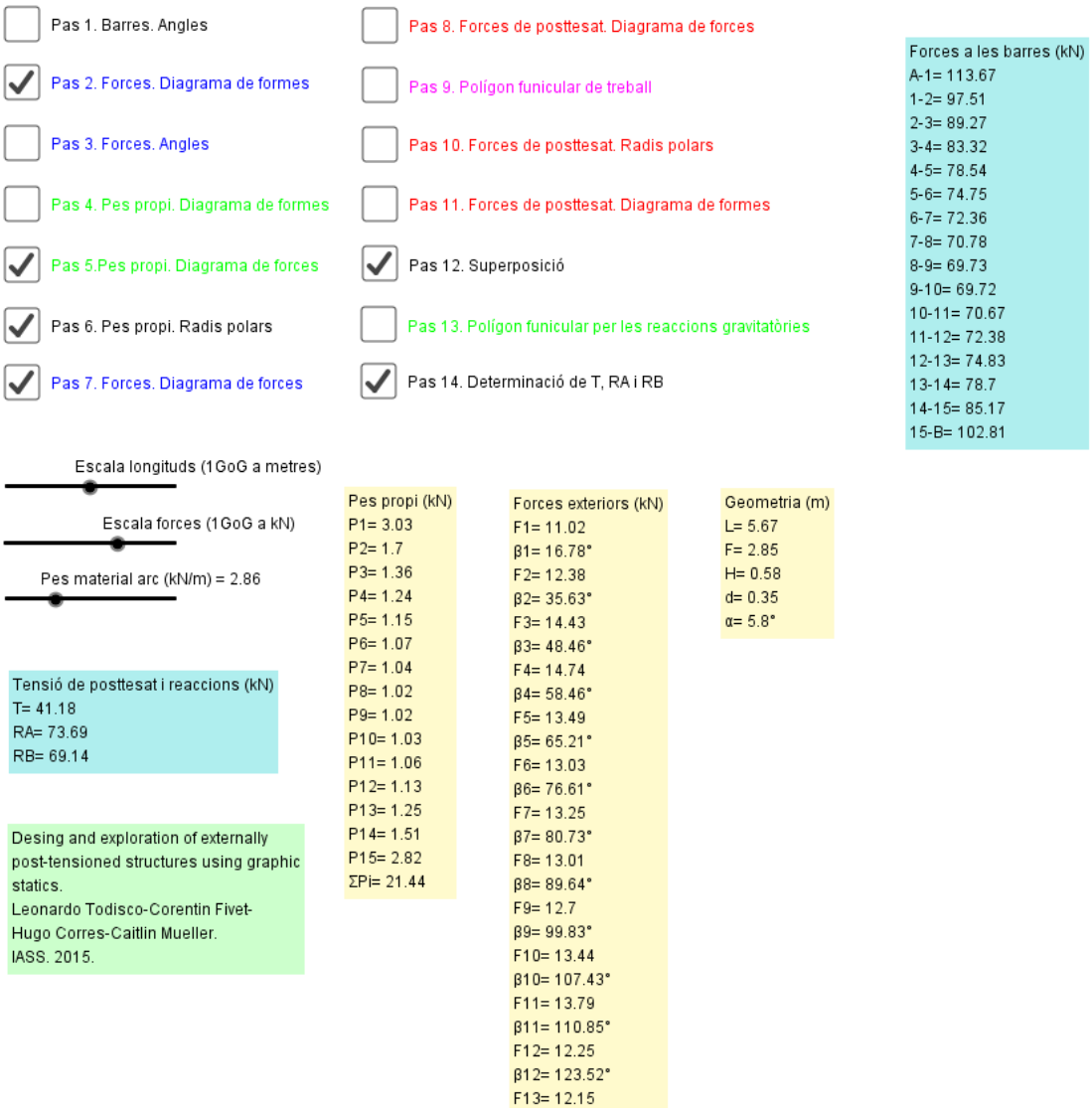

Fig. 5.30

5.8.1 Arc. Dues articulacions. Exemple

En aquest primer exemple es dona una forma d'arc inspirada en un exemple de l'estudi que estem comentant. Tot i que no es donen ni geometria ni valors de les forces, ja sigui pes propi o exterior, els resultats són raonablement semblants (fig. 5.31).

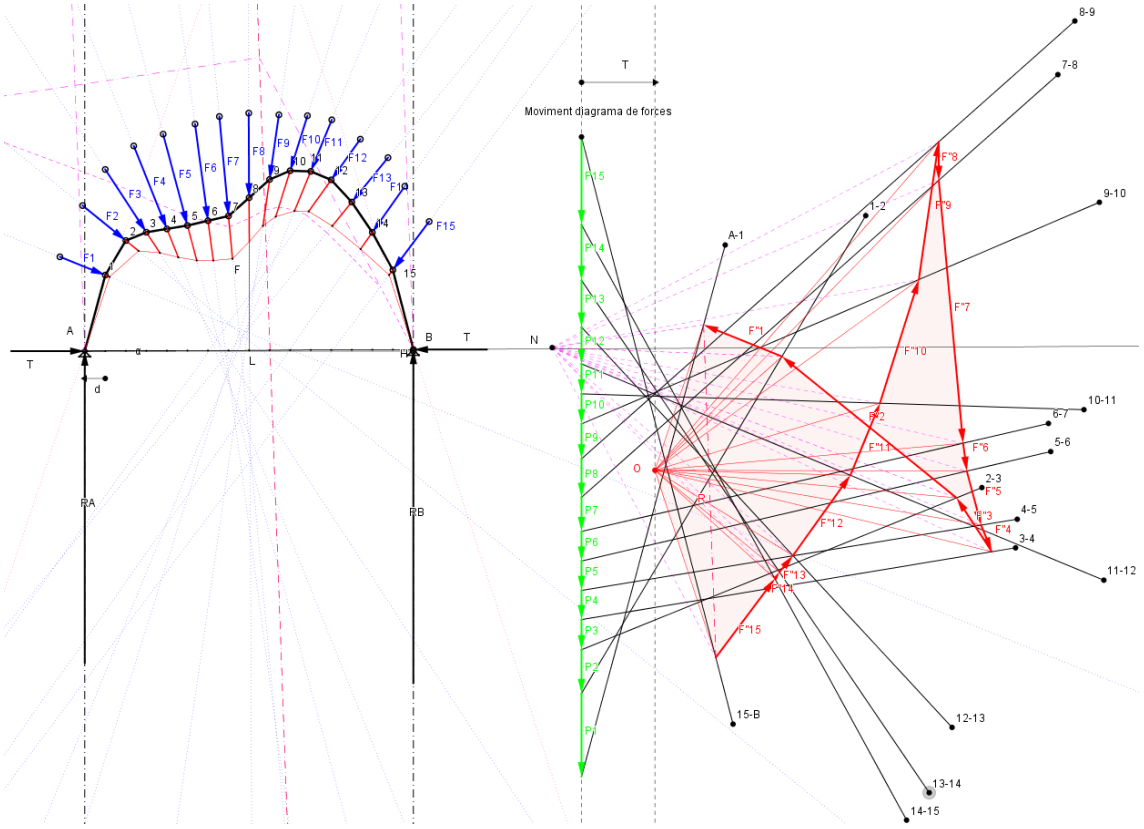

Fig. 5.31

5.8.2 Arc. Dues articulacions. Exemple

En aquest exemple se segueix el model explicat a l'aplicació 5.7.1, amb la mateixa geometria i càrregues exteriors i fent que el pes específic de l'arc s'acosti a zero. Tot i que les comparacions entre els dos exemples són difícils d'avaluar, es pot dir el següent: la tensió de posttesat supera el tirant convencional amb un factor superior a 10. En el posttesat les reaccions verticals són pràcticament nul·les i les tensions a les barres una mica menors amb la tendència de disminució de tensió a les barres superiors, com ja passava a l'aplicació 5.7.1 (fig. 5.32).

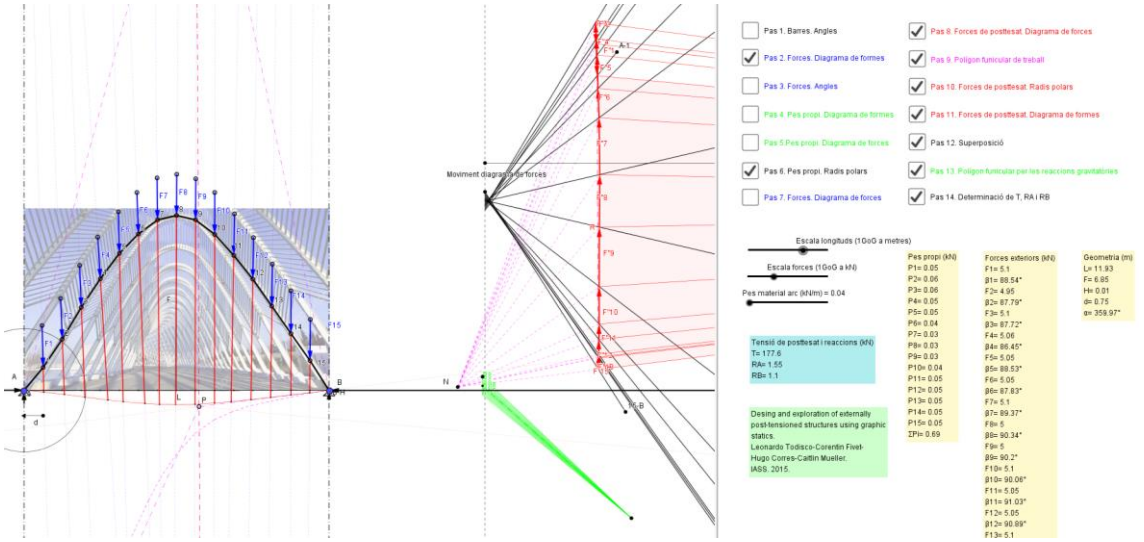

Fig. 5.32