Teoría – Tema 9

Teoría - 15 - Repaso propiedades vectores

Propiedades de vectores

Sea el vector del espacio tridimensional $\vec{u}=(u_x, u_y, u_z)$.

Su módulo se define como $|\vec{u}|=\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}$.

Si el módulo es 1 , el vector se dice unitario. Todo vector puede normalizarse para convertirse en vector unitario:

$$\hat{u}=\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\left(\frac{u_x}{\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}}, \frac{u_y}{\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}}, \frac{u_z}{\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}}\right)$$

Dados dos vectores $\vec{u}=(u_x, u_y, u_z)$ y $\vec{v}=(v_x, v_y, v_z)$, su producto escalar se define de las dos formas siguientes:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\alpha) \quad \rightarrow \quad \alpha \ \textit{es el ángulo formado por ambos vectores}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y+u_z\cdot v_z$$

Si dos vectores son perpendiculares, el ángulo que forman es de 90° , por lo que su producto escalar es 0 .

$$Si \ \ \vec{u}\perp\vec{v} \quad \rightarrow \quad \vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

Si dos vectores son paralelos, el ángulo que forman es de 0° , por lo que su producto escalar es igual al producto de los módulos.

Dos vectores paralelos → $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$

Si dos vectores son anti-paralelos, el ángulo que forman es de 180° , por lo que su producto escalar es igual al producto de los módulos cambiado de signo.

Dos vectores opuestos → $\vec{u}\cdot\vec{v}=-|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$

Si dos vectores son perpendiculares entre si, se dicen ortogonales. Y si, además, son de módulo unidad, se dicen ortonormales.

De la definición de producto escalar, podemos determinar el ángulo que forman dos vectores.

$$\cos(\alpha)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y+u_z\cdot v_z}{\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}\cdot\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}} \quad \rightarrow \quad \alpha\equiv \textit{ángulo formado por dos vectores}$$

El ángulo formado por dos vectores pertenece al intervalo de 0º a 180º. Ojo, cuando veamos ángulo entre rectas aplicaremos valor absoluto a la expresión del coseno del ángulo, para garantizar que el ángulo esté dentro del intervalo de 0º a 90º (si recuerdas de geometría plana de 1ºBach, el ángulo entre dos rectas siempre es el menor valor posible y este valor siempre es un ángulo del primer cuadrante).

Algunas propiedades “no intuitivas” que cumplen el módulo del producto y el módulo de la suma son las siguientes desigualdades:

$|\vec{u}\cdot\vec{v}|\leq|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$ → Desigualdad de Schwarz

$|\vec{u}+\vec{v}|\leq|\vec{u}|+|\vec{v}|$ → Desigualdad triangular

La distancia entre dos puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ es igual al módulo del vector que tiene por extremos ambos puntos.

$$d(A, B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$