Estimación del error absoluto o incertidumbre en los cálculos numéricos

Una cuestión importantísima que se opta por convenio y que es ineludible a la hora de expresar el valor del error absoluto es la siguiente norma:

"El error absoluto se expresará como <u>máximo con dos cifras significativas</u> siempre que el valor de dichas cifras sea menor que 25"

Esto obliga a que los errores absolutos o incertidumbres asociadas a un dato solo puedan expresarse con alguno de los valores del siguiente conjunto:

$$\{1; 2; 3; 4;5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 23; 24\}$$

El error absoluto o incertidumbre de una magnitud aislada o calculada por una medida directa ya hemos visto como se expresa. Pero si esa magnitud se determina mediante una operación matemática a partir de variables independientes entre si (sumas, restas, divisiones, multiplicaciones, aplicando funciones a las variables como el logaritmo por ejemplo o cualquier combinación de lo anterior), debemos de aplicar el concepto de error o de variación de una función alrededor de un punto. Esto lo resolveremos en un caso general aprovechando el concepto de derivada aplicado a una función de varias variables independientes entre sí. La definición formal de este procedimiento se denomina "derivada parcial" para distinguirlo del concepto genérico de "derivada". Una forma sencilla de entender en que consiste una derivada parcial de una función de varias variables es la siguiente:

Cuando decimos varias variables, nos referimos a los datos numéricos que tengan incertidumbre o sea de los que se conoce su error absoluto. Por ejemplo, los valores obtenidos en una medida de las variables "m", "n, y "p" son los siguientes:

$$m = \langle m \rangle \pm \varepsilon_a(m); \qquad n = \langle n \rangle \pm \varepsilon_a(n); \qquad p = \langle p \rangle \pm \varepsilon_a(p);$$

- *<u>Error absoluto de una expresión con varias variables</u>*

Supongamos que la variable final que queremos determinar es:

$$Q = Q(m,n,p)$$

Se dice que 'Q' es función de 'm', 'n' y 'p'.

Y si lo que quiero es saber cuál es la variabilidad "$\varepsilon_a(Q)$" del valor de Q(m,n,p), lo podré determinar a partir de la derivada total de la función Q(m,n,p) que la expresamos D[Q(m,n,p)] que se resuelve, en nuestro caso, de la siguiente forma:

$$D[Q(m,n,p)] = \varepsilon_a(Q) = \left|\frac{\partial Q(m,n,p)}{\partial m}\right| \cdot \varepsilon_a(m) + \left|\frac{\partial Q(m,n,p)}{\partial n}\right| \cdot \varepsilon_a(n) + \left|\frac{\partial Q(m,n,p)}{\partial p}\right| \cdot \varepsilon_a(p)$$

- ***Error absoluto en sumas y diferencias***

Si lo aplicamos al caso:

$$Q(m,n,p) = m + n - p$$

Obtenemos:

$$\varepsilon_a(Q) = \left|\frac{\partial(m+n-p)}{\partial m}\right| \cdot \varepsilon_a(m) + \left|\frac{\partial(m+n-p)}{\partial n}\right| \cdot \varepsilon_a(n) + \left|\frac{\partial(m+n-p)}{\partial p}\right| \cdot \varepsilon_a(p)$$

Las derivadas parciales $\frac{\partial(m+n-p)}{\partial m}$ lo que quieren decir es que derivaremos la expresión solo respecto a la variable indicada en el denominador, considerando el resto de las variables como constantes (cuya derivada es cero, por lo que se ignoran a efectos de derivación):

$$\left|\frac{\partial(m+n-p)}{\partial m}\right| = \left|\frac{\partial(m)}{\partial m} + \frac{\partial(n)}{\partial m} - \frac{\partial(p)}{\partial m}\right| = |1+0-0| = |1| = 1$$

Repitiendo esto en cada sumando queda:

$$\varepsilon_a(Q) = |1| \cdot \varepsilon_a(m) + |1| \cdot \varepsilon_a(n) + |-1| \cdot \varepsilon_a(p) = \varepsilon_a(m) + \varepsilon_a(n) + \varepsilon_a(p)$$

$$\boxed{\varepsilon_a(Q) = \varepsilon_a(m) + \varepsilon_a(n) + \varepsilon_a(p)}$$

Esta expresión se puede usar de forma genérica siempre que se quiera determinar el error absoluto de una expresión donde solo haya sumas y diferencias.

- ***Error absoluto en productos y cocientes***

Supongamos que la variable final que queremos determinar es:

$$Q = \frac{m \cdot n}{p} = Q(m,n,p)$$

Siguiendo el procedimiento anterior:

$$\varepsilon_a(Q) = \left|\frac{\partial(\frac{m \cdot n}{p})}{\partial m}\right| \cdot \varepsilon_a(m) + \left|\frac{\partial(\frac{m \cdot n}{p})}{\partial n}\right| \cdot \varepsilon_a(n) + \left|\frac{\partial(\frac{m \cdot n}{p})}{\partial p}\right| \cdot \varepsilon_a(p) = \left|\frac{n}{p} \cdot \frac{\partial(m)}{\partial m}\right| \cdot \varepsilon_a(m) + \left|\frac{m}{p} \cdot \frac{\partial(n)}{\partial n}\right| \cdot \varepsilon_a(n) + \left|m \cdot n \cdot \frac{\partial(\frac{1}{p})}{\partial p}\right| \cdot \varepsilon_a(p)$$

$$\varepsilon_a(Q) = \left|\frac{n}{p}\cdot 1\right|\cdot\varepsilon_a(m)+\left|\frac{m}{p}\cdot 1\right|\cdot\varepsilon_a(n)+\left|m\cdot n\cdot\left(-\frac{1}{p^2}\right)\right|\cdot\varepsilon_a(p)$$

$$\boxed{\varepsilon_a(Q) = \frac{n}{p}\cdot\varepsilon_a(m)+\frac{m}{p}\cdot\varepsilon_a(n)+\frac{m\cdot n}{p^2}\cdot\varepsilon_a(p) = \frac{p\cdot n\cdot\varepsilon_a(m)+p\cdot m\cdot\varepsilon_a(n)+m\cdot n\cdot\varepsilon_a(p)}{p^2}}$$

Si solo hubiera productos Q = $m\cdot n\cdot p$ = Q(m,n,p) obtendríamos:

$$\boxed{\varepsilon_a(Q) = n\cdot p\cdot\varepsilon_a(m)+m\cdot p\cdot\varepsilon_a(n)+m\cdot n\cdot\varepsilon_a(p)}$$