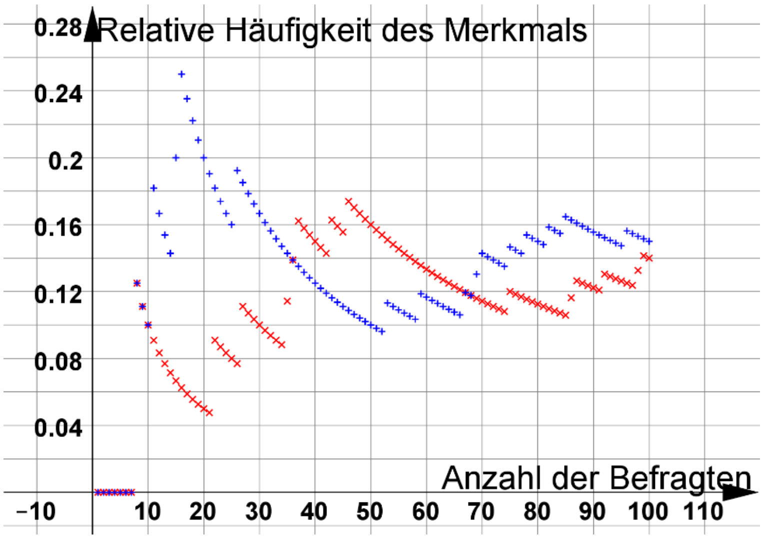
Eine Wissenschaftlerin beabsichtigt eine große Untersuchung zu einem bestimmten Merkmal durchzuführen.

Im Vorfeld der Untersuchung hat sie zweimal 100 Person nach dem Merkmal befragt.

Bei beiden Untersuchungen hat sie jeweils nach der Befragung einer Person die relative Häufigkeit des Merkmals notiert und in ein Koordinatensystem eingetragen.



Die beiden Verläufe sind rot und blau dargestellt.

a) Die Wissenschaftlerin geht nun bei ihren folgenden Überlegungen davon aus, dass das Merkmal bei etwa 15% der Bevölkerung vorkommt.

(1) Erläutern Sie das Gesetz der großen Zahlen anhand der Grafik

Das Gesetz der großen Zahlen besagt, dass die relative Häufigkeit eines Zufallsexperimentes bei einer sehr großen Anzahl an Versuchen gegen eine feste Zahl strebt. Diese feste Zahl wird als Wahrscheinlichkeit des Ereignisses interpretiert.

In diesem Fall erkennt man, dass die relative Häufigkeit des Merkmals bei beiden Untersuchungen gegen 0,15 strebt. Es liegt also die Annahme nahe, dass die Wahrscheinlichkeit 0,15 beträgt. Allerdings ist $n = 100$ eine recht geringe Zahl um eine Wahrscheinlichkeit vorhersagen zu können.

(2) Die Wissenschaftlerin hat insgesamt 200 Personen befragt. Wenn tatsächlich $p = 0{,}15$ richtig ist, dann gilt für n=200

$$P(X \leq 25) \approx 19\%$$

Dabei ordnet X jeder Befragung von 200 Personen die Anzahl der Personen mit dem Merkmal zu.

Interpretieren Sie das Ergebnis und beurteilen Sie die Aussage der Wissenschaftlerin.

Die berechnete Wahrscheinlichkeit gibt an, dass die Wahrscheinlichkeit, dass unter den 200 Befragten weniger als 25 das Merkmal aufweisen ungefähr 19 % ist. Eine absolute Häufigkeit von 25 bedeutet eine relative Häufigkeit von 12,5 %. Die Wissenschaftlerin hätte bei einer Befragung von 200 Personen von 19 % eine Wahrscheinlichkeit von 12,5 % für das Merkmal vorhergesagt, auch wenn das Merkmal tatsächlich mit 15 % in der Bevölkerung vorkommt. Das zeigt noch einmal, dass eine Befragung von 200 Personen für die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit nur sehr grob geeignet ist.

Sie dürfen im Folgenden davon ausgehen, dass $p = 0{,}15$ gesichert ist.

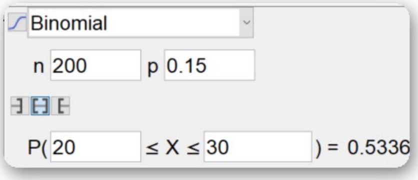
a) Schon in a(2) und auch im Folgenden wird die Befragung als binomialverteilt angenommen. Begründen Sie, warum diese Annahme eigentlich nicht richtig ist, in Ausnahmefällen aber doch gemacht werden darf.

Ein Zufallsexperiment, welches Binomialverteilung ist, kann als Bernoullikette beschrieben werden. Eine Bernoullikette ist ein Bernoulliexperiment, welches mehrfach hintereinander ausgeführt wird. Ein Bernoulliexperiment hat 2 mögliche Ergebnisse. Die Wahrscheinlichkeiten der beiden Ergebnisse werden mit p und q bezeichnet. p nennt man auch die Trefferwahrscheinlichkeit. Bei einer Bernoullikette darf sich die Trefferwahrscheinlichkeit p nicht ändern. Das ist streng genommen bei einer Befragung aber nicht der Fall, da es sich um ein „Ziehen ohne Zurücklegen" handelt. Wenn die Personenzahl, aus der man die Grundgesamtheit aller Befragten entnimmt, viel größer ist als die Anzahl der Befragten, ändert sich die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer nur sehr wenig und man darf näherungsweise von einer Binomialverteilung ausgehen.

b) Berechnen Sie für n=200

(1) $P(X = 30)$

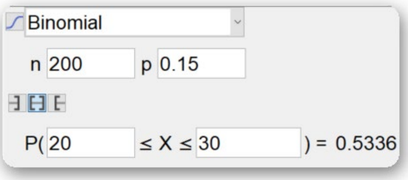
Mithilfe des Wahrscheinlichkeitsrechners findet man $P(X = 30) \approx 0{,}0788 = 7{,}88\%$.



(2) $P(20 \leq X \leq 30)$

ebenfalls mithilfe des Wahrscheinlichkeitsrechners ergibt sich

$P(20 \leq X \leq 30) \approx 0{,}5336 = 53{,}36\%$



auch wenn es in diesem Aufgabenteil nicht verlangt ist, ist es sinnvoll das Ergebnis während der mündlichen Prüfung zu interpretieren:

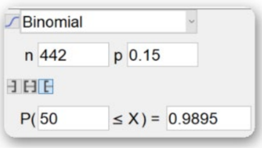
Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 7,88 % wird die Anzahl der Personen mit dem Merkmal exakt 30 betragen.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 53,36 % wird die Anzahl der Personen mit dem Merkmal zwischen 20 und 30 liegen.

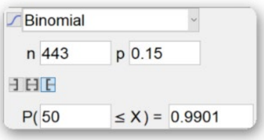
c) Bestimmen Sie rechnerisch n, so dass

$$P(X \geq 50) \geq 0.99$$

und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachkontext.



$n = 442$	$P(X \geq 50) \approx 0{,}9895 < 0{,}99$
$n = 443$	$P(X \geq 50) \approx 0{,}9901 > 0{,}99$



Ab einer Anzahl von 443 Befragten ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens 50 Personen mit dem Merkmal in der Befragung zu haben größer als 99 %. Mit anderen Worten: wenn die Wissenschaftlerin mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % davon ausgehen will, dass sie mindestens 50 Personen mit dem Merkmal in der Befragung hat, so muss sie mindestens 443 Personen befragen.

d) Bestimmen Sie rechnerisch μ und σ für $n = 450$ und $p = 0{,}15$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachkontext.

$$\mu = n \cdot p = 450 \cdot 0{,}15 = 67{,}5$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{450 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85} \approx 7{,}5746$$

der Erwartungswert für die Anzahl der Personen mit Merkmal beträgt 67,5 Personen, wenn insgesamt 450 Menschen befragt werden.
Wenn man die Befragung von 450 Personen sehr häufig durchführen würde, dann würde man im Mittel mit 67,5 Personen rechnen, die das Merkmal aufweisen.
Die Standardabweichung beträgt 7,5746.
Wenn man die Befragung von 450 Personen häufiger durchführen würde, dann würde man eine Abweichung vom erwarteten Mittel von durchschnittlich 7,5 Personen erwarten.
Aus der σ $-$ ***Regel*** kann man auch noch entnehmen, dass man mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 68 % damit rechnen kann, dass die Anzahl der Personen mit Merkmal zwischen
67,5 - 7,5746 und 67,5 + 7,5746 liegt.

Sigma-Regeln
Bei einer [redacted] Zufallsgröße X beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Stichprobenwert im 1σ-Intervall $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ um den Erwartungswert liegt, ca. 68 %, denn es gilt:
$P(\mu - \sigma \leqq X \leqq \mu + \sigma) =$ [redacted] $= 0{,}6827.$
Entsprechend erhält man die 2σ- und die 3σ-Regel:
$P(\mu - 2\sigma \leqq X \leqq \mu + 2\sigma) =$ [redacted] $= 0{,}9545$
$P(\mu - 3\sigma \leqq X \leqq \mu + 3\sigma) =$ [redacted] $= 0{,}9973$

Aus Lambacher Schweizer Oberstufe
die verpixelten Bereiche enthalten Begriffe, die sie nicht kennen und auch nicht kennen müssen