Funções de várias variáveis*

*Material elaborado por Raiane Lemke na sua pesquisa de mestrado.

Objetivos

- Definir funções de duas variáveis e dar exemplos práticos;
- Construir o gráfico de funções de duas variáveis;
- Observar paraboloides hiperbólicos em obras arquitetônicas;
- Descrever e representar geometricamente o domínio de funções de duas e três variáveis.

Introdução

- **Definição:** Uma função f é uma correspondência que a cada elemento de um conjunto X associa um único elemento de um conjunto Y. Sendo X o domínio de f e Y o contradomínio.
- Estamos interessados em estudar funções tais que $X \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, e $Y \subset \mathbb{R}$, ou seja, funções reais de n variáveis reais.
- Notação: $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \Rightarrow (x_1, x_2, \cdots, x_n) \to f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.
- Em geral estudaremos funções reais de duas variáveis reais cuja notação usual é

$$z = f(x, y).$$

Que exemplos de funções de duas variáveis você conhece?

Pense em situações em que uma grandeza depende simultaneamente de duas outras grandezas.

Exemplos

- A área z de um retângulo de lados x e y depende dos valores de x e y .
- A temperatura T em um ponto da superfície da Terra em dado instante de tempo depende da longitude x e da latitude y do ponto.
- A pressão P de um certo gás ideal confinado, depende do seu volume V e da sua temperatura T .
- O volume de um cilindro circular depende de seu raio e de sua altura .
- Quando um poluente é emitido por uma chaminé de h metros de altura, a concentração do poluente depende da distância da origem da emissão (x) e da altura da emissão (h).
- O índice de massa corporal humano (IMC) é um valor que depende do peso e da altura do indivíduo.
- Estes exemplos serão discutidos com mais detalhes na sessão de aplicações de funções de duas variáveis.
- Quádricas vistas em Geometria Analítica.

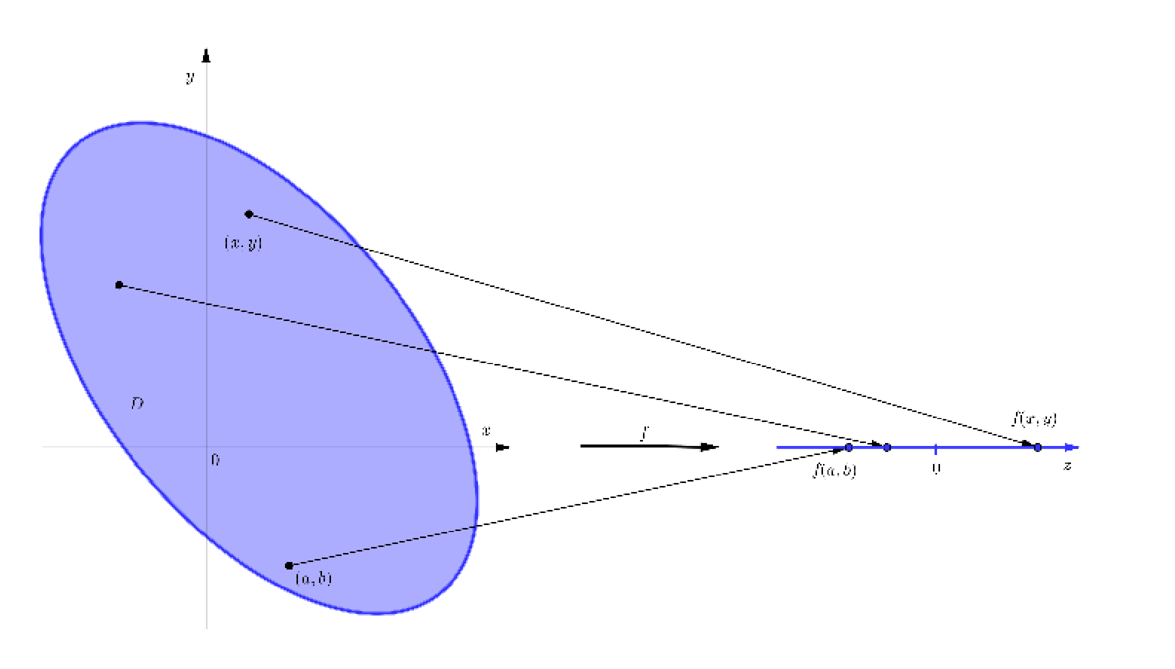
Relembrando

- **Definição:** Uma função f é uma correspondência que a cada elemento de um conjunto X associa um único elemento de um conjunto Y. Sendo X o domínio de f e Y o contradomínio.
- Estamos interessados em estudar funções tais que $X \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, e $Y \subset \mathbb{R}$, ou seja, funções reais de n variáveis reais.
- Notação: $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \Rightarrow (x_1, x_2, \cdots, x_n) \to f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.
- Em geral estudaremos funções reais de duas variáveis reais cuja notação usual é

$$z = f(x, y).$$

Gráfico de funções reais de duas variáveis reais

Uma função de duas variáveis é aquela cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ e cuja imagem é um subconjunto de $\mathbb{R}$. Uma maneira de visualizar essa função é pelo diagrama de setas, como na figura ao lado, no qual o domínio é representado como um subconjunto do plano.



Fonte: Raiane Lemke, 2017

Gráfico de funções reais de duas variáveis reais

- **Definição:** Se f é uma função de duas variáveis com domínio D, então o **gráfico** de f é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ tal que $z = f(x, y)$ e (x, y) pertença a D.

- Seja $f: D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de n variáveis. Definimos o gráfico de f como o subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ formado por todos os pontos da forma

$(x_1, x_2, \cdots, x_n, f(x_1, x_2, \cdots, x_n)) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, onde $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

No caso $n = 2$, o gráfico de f é uma superfície em $\mathbb{R}^3$. Quando $n \geq 3$, não é mais possível visualizar o gráfico de f, pois este está no subconjunto de $\mathbb{R}^4$.

Gráfico de funções reais de duas variáveis reais

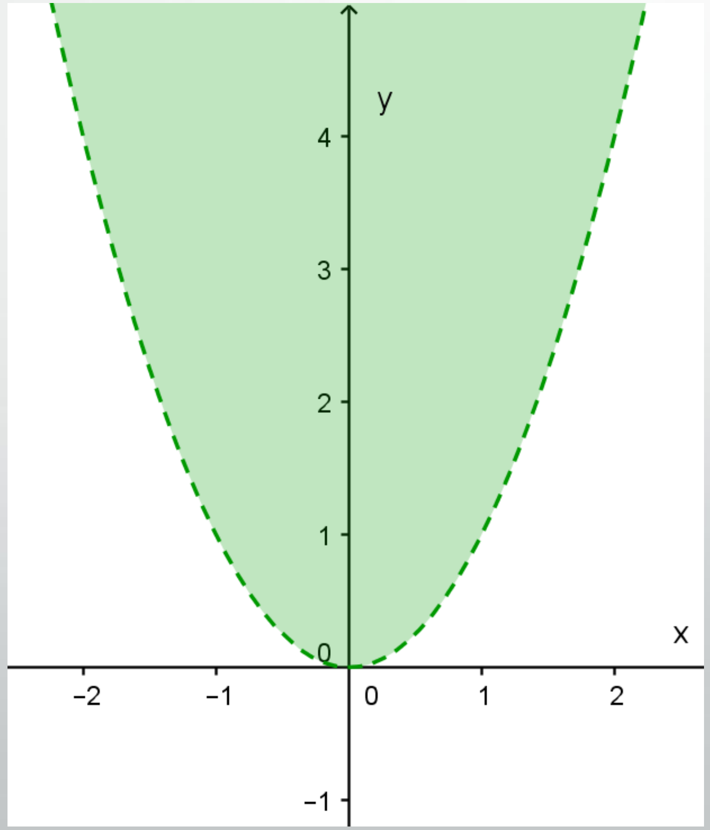
- Para representação gráfica de superfícies ou gráficos de funções é conveniente observar os seguintes passos:
- 1. Domínio da função;
- 2. Interseções com os eixos coordenados;
- 3. Interseções com os planos coordenados;
- 4. Curvas de nível: $z = k$, com $k \in \mathbb{R}$;
- 5. Se necessário, traços em $x = k$ e $y = k$.

Gráfico de funções reais de duas variáveis reais

- Para representação gráfica de superfícies ou gráficos de funções é conveniente observar os seguintes passos:
- 1. Domínio da função;
- 2. Interseções com os eixos coordenados;
- 3. Interseções com os planos coordenados;
- 4. Curvas de nível: $z = k$, com $k \in \mathbb{R}$;
- 5. Se necessário, traços em $x = k$ e $y = k$.

Exemplo: Domínio de $f(x, y) = \frac{xy-5}{2-\sqrt{y-x^2}}$

- $y - x^2 > 0 \Longrightarrow y > x^2$
- Todos os pontos do plano xy acima (ou no interior) do gráfico de $y = x^2$



Exercício 1

Determine o domínio das funções abaixo e represente-o geometricamente:

$a) f(x, y) = \frac{\sqrt{y-x+2}}{y-1}$

$b) f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{\ln(4-x^2-y^2)}$

$c) f(x, y) = \ln(16 - x^2 - y^2 - 4z^2)$

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{y - x + 2}}{y - 1}$$

- $y - x + 2 \geq 0 \implies y \geq -2 + x$ e $y \neq 1$
- Todos os pontos do plano xy à direita (ou acima) e sobre a reta $y = -2 + x$ excluindo a reta $y = 1$

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x + y + 1}}{\ln(4 - x^2 - y^2)}$$

$$f(x, y) = \ln(16 - x^2 - y^2 - 4z^2)$$

Determine o gráfico das seguintes funções:

- $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-1}}{2}$
- $f(x, y) = \frac{1}{4x^2+y^2}$

Funções de várias variáveis

- Capítulo no GeoGebraBook: https://ggbm.at/wH5csMQp

Obrigado!