

Anmerkungen zum Aufbau eines dynamischen Grundverständnisses von Symmetrie und Spiegelungen

Hans-Jürgen Elschenbroich

Zusammenfassung: Es wird an Schulbuch-Beispielen gezeigt, wie Fehlvorstellungen zur Symmetrie insbesondere durch die begriffliche Vermischung von Abbildung und Symmetrie erzeugt werden. Abschließend werden dynamische DGS-Arbeitsblätter vorgestellt, mit denen diese Fehlvorstellungen vermieden werden können.

Zur Vorgeschichte

Achsenpiegelungen und Achsensymmetrie bzw. Punktspiegelungen und Punktsymmetrie sind Standardthemen in der Klasse 5 und 6. In Lehrerfortbildungen habe ich zu diesem Thema immer wieder Fehlvorstellungen vorgefunden. Wenn ich diese angesprochen hatte, bin ich oft auf Unverständnis gestoßen und sogar auf die Äußerung „Das steht aber so bei uns im Lehrbuch!“. Meist ging es dabei um den oft unklaren Unterschied zwischen Spiegelachse und Symmetrieachse. Nachdem dies wiederholt auftrat, habe ich mir diverse Lehrbücher¹ der Klassen 5 und 6 angesehen.

Zur Begriffsklärung Symmetrie

*Mit dem geometrischen Begriff **Symmetrie** (altgriechisch $\sigma\upsilon\mu\mu\epsilon\tau\rho\acute{\iota}\alpha$ symmetria „Ebenmaß, Gleichmaß“, aus $\sigma\acute{\upsilon}\nu$ syn „zusammen“ und $\mu\acute{\epsilon}\tau\rho\nu$ metron „Maß“) bezeichnet man die Eigenschaft, dass ein geometrisches Objekt durch Bewegungen auf sich selbst abgebildet werden kann, also unverändert erscheint. Eine Umwandlung, die ein Objekt auf sich selbst abbildet, heißt Symmetrieabbildung oder **Symmetrieoperation**.*

Manchmal werden auch zwei (oder mehr) verschiedene geometrische Objekte als zueinander² symmetrisch bezeichnet, wenn sie, zusammen betrachtet, eine symmetrische Figur bilden.

[http://de.wikipedia.org/wiki/Symmetrie_\(Geometrie\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Symmetrie_(Geometrie))

¹ Es sei noch angemerkt, dass die Auswahl der Lehrbücher eher zufällig erfolgte, aber nicht untypisch ist. Auch findet man manche Probleme immer wieder.

² Das entscheidende Wort *zueinander* wird in der Praxis dann aber übergangen! An dieser Stelle sollte man besser ‚zueinander *spiegelbildlich*‘ sagen.

Es geht also um eine (nichttriviale) *Abbildung*, „die ein Objekt *auf sich selbst* abbildet“. Dann heißt das Objekt *symmetrisch*.

Ein regelmäßiges Fünfeck ist z. B. achsensymmetrisch. Es wird durch eine Achsenspiegelung an der gestrichelten Geraden auf sich selbst abgebildet.

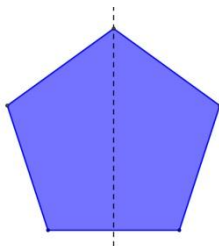


Abb. 1: Symmetrisches Fünfeck

Natürlich gibt es hier noch vier weitere Symmetrieachsen.

In der folgenden Figur ist das linke Dreieck, die Urbild-Figur, offensichtlich nicht symmetrisch. Wenn es an der Geraden gespiegelt wird erhält man als Bild-Figur ein Dreieck, das ebenfalls nicht symmetrisch ist.

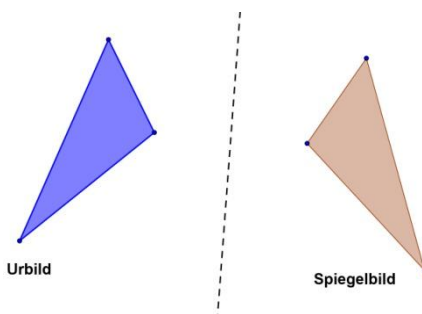


Abb. 2: Urbild und Spiegelbild

Wenn man jetzt aber beide Figuren zusammen als *ein* neues Objekt auffasst, erhält man eine symmetrische Figur und die Spiegelachse ist dabei die Symmetrieachse. Das ist mathematisch eigentlich trivial. Problematisch wird es, wenn die Rollen von Urbild, Spiegelbild, zusammengesetzter Figur sowie Spiegelachse und Symmetrieachse durcheinander geworfen werden. Dann werden leicht Fehlverständnisse erzeugt.

Symmetrie, Falten und Spiegeln

Häufig wird Symmetrie anschaulich oder handlungsorientiert eingeführt, indem man Klecksbilder erzeugt oder Schmetterlingsbilder etc. betrachtet.

4 Falte ein Blatt Papier in der Mitte und tropfe auf eine Seite oder die Faltlinie Tinte oder Wasserfarbe. Drücke dann beide Seiten fest zusammen. Falte das Blatt wieder auseinander und beschreibe dein Arbeitsergebnis. Versuche mit diesem Verfahren, bestimmte Bilder herzustellen, die du der Klasse präsentierst. Welche Probleme treten hierbei auf?




Abb. 3: Zahlen und Größen 6 (2009), S. 199

Dieser Zugang ist schön und beliebt, aber auch Quell späterer Fehlverständnisse, weil hier eine nicht-zusammenhängende Figur mit zwei Teilen und einer Faltlinie erzeugt wird und dies zum Prototypen für Symmetrie wird. Damit wird der Grundstein gelegt, bei einer Achsenspiegelung nicht Urbild und Spiegelbild als Objekte auseinander zu halten, sondern stets an das zusammengesetzte Bild als Objekt höherer Ordnung zu denken. Anders formuliert: Dieser Zugang ist für das Verstehen der Achsenspiegelung gut geeignet, für das Verstehen von Achsensymmetrie bräuchte aber eher etwas wie in Abb. 1.

Die Problematik sieht man auch bei folgendem Zugang:

2 Spiegelungen in der Zeichenebene erzeugen achsensymmetrische Bilder. Die grüne Vogelschablone wurde auf das Zeichenpapier gelegt und die Figur hellblau ausgemalt. Dann wurde die Schablone entlang der roten Linie umgeklappt. Die neue Figur wurde dunkelblau ausgemalt. Die dunkelblaue Figur ist das Bild, das bei der **Achsen Spiegelung** der hellblauen Figur an der **Spiegelachse s** entsteht.

**Achsen-
spiegelung**

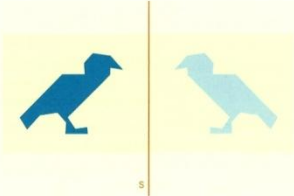


Abb. 4: MatheNetz 6 (2006), S. 120

Am Rand ist von Achsenspiegelung die Rede, d. h. es geht um ein Urbild (hellblauer Vogel) und ein daraus erzeugtes Spiegelbild (dunkelblauer Vogel). Laut Überschrift geht es aber um die Erzeugung achsensymmetrischer Bilder, d.h. um die Komposition der hellblauen und dunkelblauen Vogelfigur zu einer neuen Figur.

Solche zusammengesetzten Figuren sind zwangsläufig symmetrisch und dabei sind Spiegelachse und Symmetrieachse untrennbar eins. Was natürlich erschwert, diese später auseinander zu halten.

Die Nachhilfe-Plattform bettermarks greift statt zu falten zur Veranschaulichung auf einem aufgestellten Spiegel zurück:



The screenshot shows a web browser window with the URL de.bettermarks.com/mathe-portal/mathebuch/symmetrie-und-bewegungen.html. The page header includes the bettermarks logo with the tagline 'ERFOLGREICH MATHE LERNEN' and navigation links for 'START', 'LERNEN', 'LEHREN', and 'PREISE'. The main heading is 'Achsen Spiegelung'. The text explains that an 'Abbildung' is called 'Achsen Spiegelung' if it has the following properties: a point P and its mirror image P' lie on a line perpendicular to the axis, and both are at the same distance from the axis. Points on the axis are mapped to themselves and are called 'Fixpunkte'. The text also states that an 'Achsen Spiegelung' can be visualized as a 'Bewegung' where figures are 'umgeklappt' (flipped) across a line called the 'Spiegelachse'. It concludes by saying that a mirror image can be created by placing a mirror on the axis and drawing the reflected figure.

Abb. 5: bettermarks

Stellen wir uns vor, es wird tatsächlich ein Spiegel aufstellt und eine Figur gespiegelt. Mal abgesehen von der perspektivischen Verzerrung: Wo und wie soll sie dann ‚nachgezeichnet‘ werden? Auf dem (zur Urbild-Ebene *senkrecht* stehenden) Spiegel? Oder dahinter?

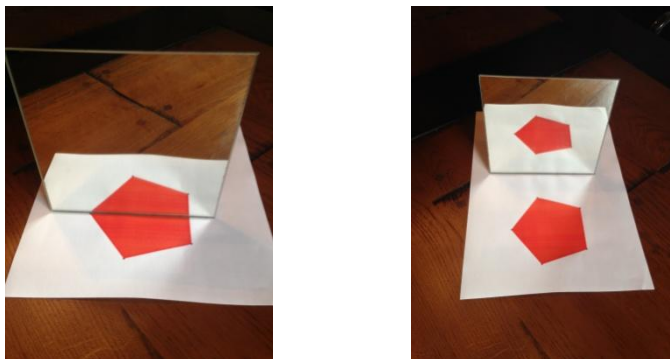


Abb. 6a, b: Spiegeln (Foto: H.-J. Elschenbroich)

Die Abb. 6b eignet sich - ähnlich wie beim Falten – für einen Zugang zur Achsen**spiegelung**. Für einen Zugang zur Achsen**symmetrie** bräuchte man aber eher eine Spiegelung wie in Abb. 6a.

Für einen Einstieg ins Thema Symmetrie sind auch Bilder von Spiegelungen am Wasser beliebt.

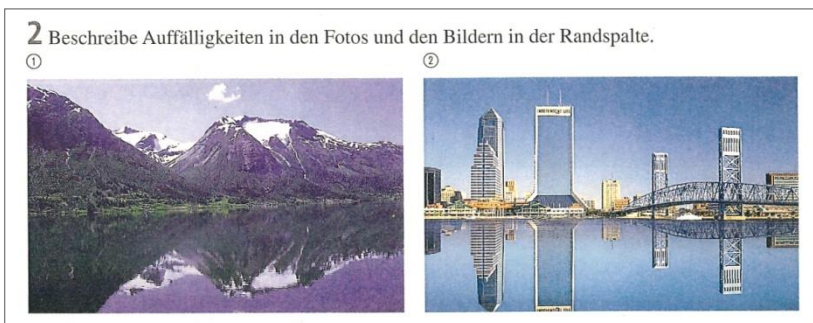


Abb. 7: Zahlen und Größen 6 (2009), S. 199

Hier haben wir eine versteckte Problematik, die auch von vielen Lehrkräften nicht gesehen wird: Die Wasseroberfläche dient hier als Spiegel. Das Urbild (Gebirge oder Skyline) ist dabei 3D, das Bild ist aber 2D und das ganze wird in einem 2D-Foto abgebildet. Und die Symmetrieachse ist eine in der Regel nicht gerade verlaufende Uferlinie.

Eine ebenfalls etwas versteckte Problematik, die Fehlvorstellung begünstigen kann, besteht darin, dass eine *ebene* symmetrische Figur durch ein Operieren im Raum (Falten) erzeugt wird:

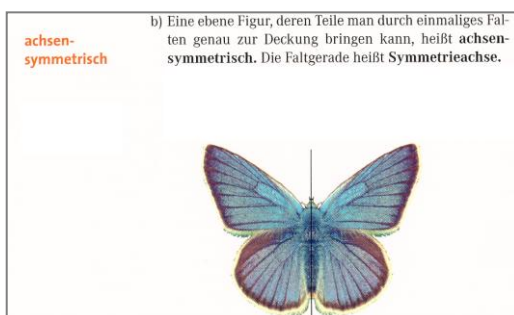


Abb. 8: MatheNetz 6 (2006), S. 20

Die Symmetrieachse wäre hier die Faltlinie. Wenn man aber das Bild des Schmetterlings längs der eingezeichneten Geraden faltet – wie will man dann noch überprüfen, ob die Teile der Figur genau zur Deckung kommen? Wer dies einmal versucht, wird feststellen, dass man nach dem Falten nur noch die äußere weiße Seite des Papiers sieht.

Spiegelachse oder Symmetrieachse?

Dies geht oft durcheinander, wie man hier exemplarisch sieht:

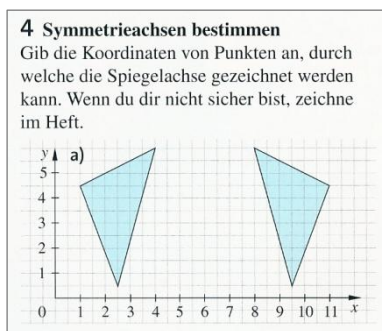


Abb. 9: Mathematik real 6 (2012), S: 104

Im Aufgabentext geht es um eine *Spiegelachse* (was eine sinnvolle Frage ist), in der Überschrift um *Symmetrieachsen*. So werden Achsenspiegelung als Abbildung einer Figur *auf eine andere* und Achsensymmetrie als Eigenschaft *einer* Figur vermengt. In einer früheren Ausgabe des Buches von 2007 heißt es sogar explizit: „Bei Spiegelbildern nennt man die Symmetrieachse auch Spiegelachse“ (S: 99). Damit wird der Zusammenhang zwischen Spiegelung und Symmetrie geradezu auf den Kopf gestellt.

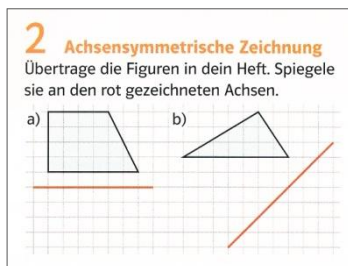


Abb. 10: Mathe live 5 (2014), S. 169

In dieser Aufgabe (Abb. 10) haben wir eine vergleichbare Problematik. Dass den Autoren dabei doch unwohl gewesen sein könnte, sieht man daran, dass klammheimlich als neuer Begriff achsensymmetrische *Zeichnung* für die Komposition von Urbild und Bild eingeführt wird.

Auch in der folgenden Aufgabe findet man ein begriffliches Durcheinander von Spiegelung und Symmetrie:

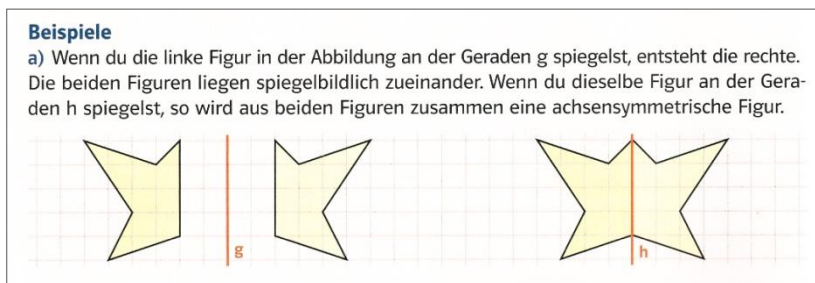


Abb. 11: Schnittpunkt 6 (2011), S. 84

Wenn man den linken halben Stern an g spiegelte, erhält man den rechten halben Stern und beide Halbsterne liegen spiegelbildlich zueinander. Das ist korrekt, von Symmetrie ist keine Rede. Dann wird aber suggeriert, Achsensymmetrie entstünde dadurch, dass die Spiegelachse h die Figur berührt!

Endgültig geht es mit Achsenspiegelung und Symmetrieachse im Fokus 6 (2006) durcheinander. Dort findet man auf S. 56:

*Eine Figur, die durch eine **Achsen Spiegelung** entstanden ist oder bereits eine **Symmetrieachse** hat, ist **achsensymmetrisch**.*

In aktuellen Schulbüchern wird gerne unter dem Druck der Stundenkürzungen und Themen'verschlangung' nur noch die Achsensymmetrie in den Vordergrund gestellt. So heißt es im Schnittpunkt Plus 5 (2013) auf S. 71:

*Eine Figur, die aus spiegelbildlichen Hälften besteht, ist **achsensymmetrisch**. Die Linie, an der gespiegelt wird, heißt **Symmetrieachse** oder **Faltachse**.*


Das ist so ja nicht falsch. Das Problem liegt darin, dass es vorab keine Thematisierung von Spiegelung gibt, der Begriff *spiegelbildlich* ist hier rein anschaulich. Es wird auch anschließend nicht die Achsenspiegelung als geometrische Abbildung mittels Geodreieck behandelt. Es geht nur um die Ergänzung zu einer achsensymmetrischen Figur, was durch Kästchenaus-

zählen auf kariertem Papier mit Achsen durch diese Karos umgesetzt wird. Bemerkenswerterweise tauchen die Begriffe Spiegelachse und Achsenspiegelung noch im Register auf. Sie verweisen aber auf Seiten, in denen von Symmetrie und Symmetrieachse die Rede ist! Auch später ist im gesamten Buch von Achsenspiegelungen als Abbildungen keine Rede. Dann ist es auch nicht verwunderlich, wenn Spiegelachsen und Symmetrieachsen nicht mehr auseinander gehalten werden können.

Punktspiegelung und Punktsymmetrie

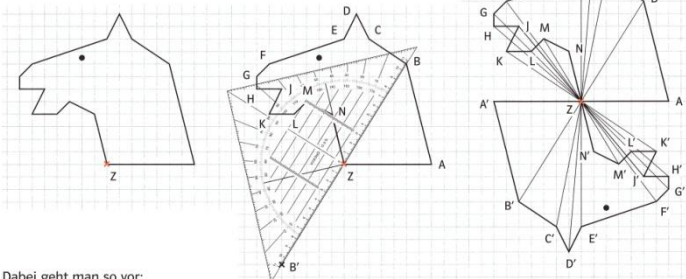
Im Lambacher-Schweizer von 2013 kommt (wie in vielen aktuelle Schulbüchern) Punktspiegelung als Abbildung nicht mehr explizit vor. Es wird nur noch Punktsymmetrie angesprochen. Implizit ist die Punktspiegelung noch dadurch Thema, dass gezeigt wird, wie man punktsymmetrische Figuren herstellen könne.

Hier wird wieder eine nicht symmetrische Figur (Pferdekopf) punktgespiegelt. Das gespiegelte Bild ist natürlich auch nicht punktsymmetrisch. Die zentrale Idee, dass man eine Figur durch eine Halbdrehung um einen Punkt auf sich selbst abbilden kann, kann dabei nicht aufkommen.



Obwohl die Windmühlenflügel regelmäßig angeordnet sind, ist keine Symmetrieachse zu finden. Verbindet man je zwei gegenüberliegende Punkte, so schneiden sich die Verbindungslinien alle in einem Punkt. Eine solche Figur ist **punktsymmetrisch**. Der Schnittpunkt ist das **Symmetriezentrum**.

Auch punktsymmetrische Figuren kann man durch Zeichnen herstellen. Diesen Vorgang nennt man Punktspiegelung.



Dabei geht man so vor:

1. Man legt ein Spiegelzentrum Z fest.
2. Man verbindet einen Punkt der Figur (z.B. B) mit dem Spiegelzentrum Z und verlängert die Strecke über den Punkt Z hinaus.
3. Man legt den Spiegelpunkt B' so auf der Hilfslinie fest, dass der Punkt B und der Spiegelpunkt B' den **gleichen Abstand** vom Spiegelzentrum Z haben.
4. Man wiederholt die Schritte 2 und 3 mit allen Eckpunkten der Figur.
5. Zum Schluss verbindet man die Punkte in der richtigen Reihenfolge.

Abb. 12: Lambacher-Schweizer (2013), S. 64

Zur Punktspiegelung findet man im Schulbuch Zahlen und Größen 6:

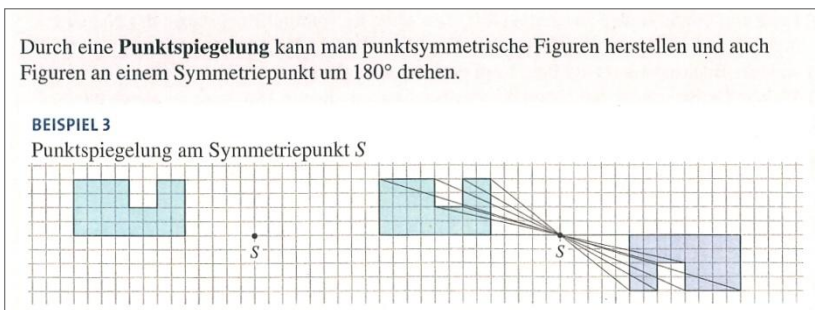


Abb. 13: Zahlen und Größen 6 (2009), S. 204

Durch eine Punktspiegelung wird aber eine *punktgespiegelte* Figur hergestellt und keine *punktsymmetrische* Figur. Punktsymmetrisch wäre die Kombination aus Urbild und Spiegelbild.

Eindeutig den Vogel abgeschossen hat aber die Firma Texas Instruments.

Im Menü des TI-Nspire™ heißt die Abbildung Achsenspiegelung auch so, aber die Abbildung Punktspiegelung heißt hier *Punktsymmetrie* (Abb. 11)!

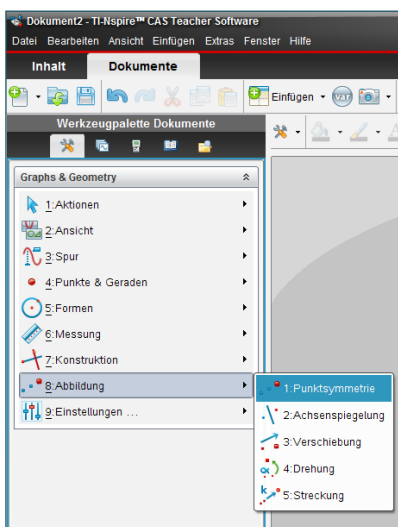


Abb. 14: Menü TI-Nspire™

Sach(un)logische Trennung

In manchen Schulbüchern werden Achsenspiegelung und Achsensymmetrie thematisch getrennt. Im MatheNetz 6 heißt es beispielsweise:

*„Eine ebene Figur, deren Teile man durch einmaliges Falten genau zur Deckung bringen kann, heißt **achsensymmetrisch**. Die Faltachse heißt **Symmetrieachse**.“ (S. 20)*

Das ist korrekt. Die Achsenspiegelung als Abbildung kommt aber erst 100 Seiten (!) später und ohne Bezug zur Achsensymmetrie.

Ähnlich im Schnittpunkt 6: Auch hier kommt die Achsensymmetrie vor der Achsenspiegelung (S. 83) und die Achsenspiegelung erst im Anschluss, ohne Bezug zur Achsensymmetrie.

Es geht auch anders!

Im früheren Lambacher-Schweizer (Ausgabe NRW 1998) findet man (meines Erachtens mustergültig³) erst die Achsenspiegelung (S. 170) und dann die Achsensymmetrie (S. 173). Weiter wird definiert:

*„Figuren, die durch eine Achsenspiegelung auf sich selbst abgebildet werden können, nennt man **achsensymmetrisch**. Die Achse der Spiegelung nennt man auch **Symmetrieachse** der Figur.“*

Dies ist die gleiche mathematische Definition von Achsensymmetrie wie in Wikipedia. Sie führt zu einer dynamischen Sicht von Symmetrie: Es werden Spiegelungen darauf untersucht, ob dabei das Bild mit dem Urbild zur Deckung kommt. Dies ist zugegebenermaßen auf dem Papier nicht immer sonderlich gut zu untersuchen, wohl aber mit Folien auf dem OHP.

Ein dynamischer Zugang zur Symmetrie mit DGS

Heutzutage lässt sich das hervorragend mit dynamischen Arbeitsblättern mit GeoGebra (oder einer anderen Dynamischen Geometrie-Software) umsetzen. Elschenbroich & Seebach (2014) haben dies bei Achsensymmetrie und Punktsymmetrie anhand von Flaggen und Verkehrszeichen realisiert.

³ Was leider in der Ausgabe von 2013 nicht mehr so ist.

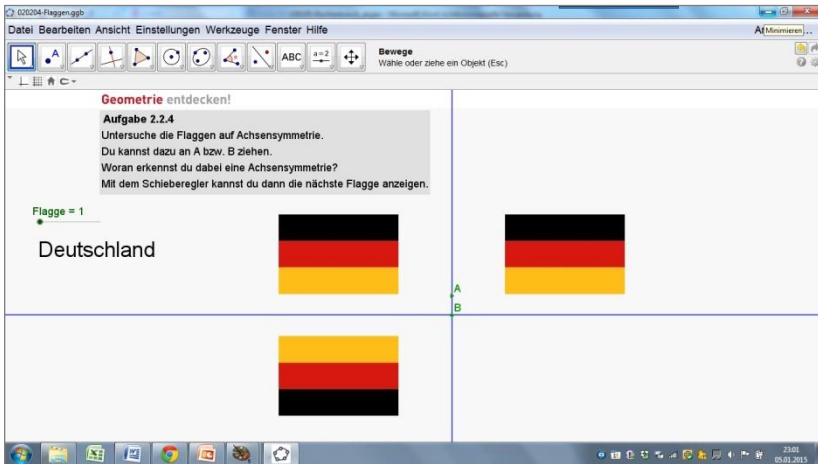


Abb. 15: Geometrie entdecken! Teil 1 (2014). Ausgangssituation

Hier werden zu einer Flagge zwei achsenspiegelte Bilder erzeugt. Die Spiegelachsen liegen parallel zu den Flaggenrändern und können bewegt werden, so dass man unmittelbar überprüfen und sehen kann, ob dabei Urbild und Bild zur Deckung kommen oder nicht.

Wenn man dann eine Situation findet, in der das der Fall ist, ist die Figur achsensymmetrisch und *diese spezielle* Spiegelachse ist dann eine Symmetrieachse der Figur.

Im Falle der Deutschland-Flagge kommt man durch Ziehen an der vertikalen Spiegelachse in diese Situation (Abb. 16a).

Hingegen kann man durch Ziehen an der horizontalen Achse diesen Zustand nicht erreichen (Abb. 16b).

Da die Flaggen-Bilder halbtransparent sind, kann man im GeoGebra-Arbeitsblatt beim Ziehen an den Spiegelachsen schön erkennen, ob sich die Bilder überdecken. Falls ja, bleiben die Farben, falls nein, entstehen unschöne ‚schmutzige‘ Mischfarben.

In weiteren Beispielen finden die Schüler dann andere Flaggen, die auch mehrere Symmetrieachsen haben können oder auch gar keine.

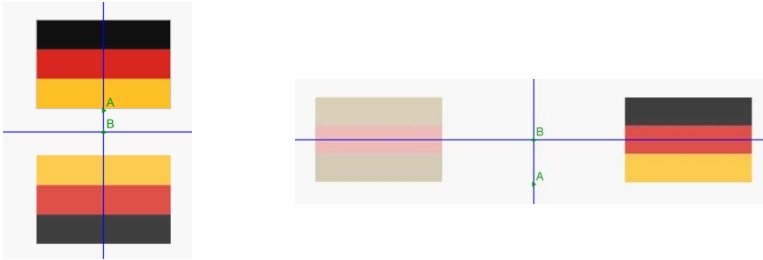


Abb. 16a,b : Geometrie entdecken! Teil 1. Vertikal Symmetrie/ horizontal keine Symmetrie

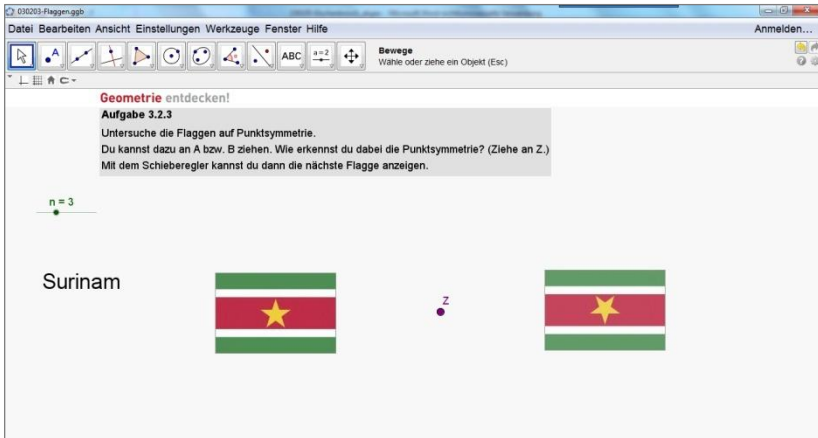


Abb. 17: Geometrie entdecken! Teil 1 (2014). Ausgangssituation

Entsprechend wird für die Suche nach einer Punktsymmetrie zu einer Flagge ein punktgespiegeltes Bild erzeugt. Der Punkt Z, an dem gespiegelt wird, kann bewegt werden, so dass man auch hier unmittelbar überprüfen kann, ob Urbild und Bild zur Deckung kommen oder nicht. Wenn man eine solche Situation findet, ist die Figur punktsymmetrisch und *dieser spezielle* Spiegelpunkt ist der Symmetriepunkt der Figur! In diesem Fall erkennt man, dass Urbild und Spiegelbild nicht zur Deckung gebracht werden können.



Abb. 18: Geometrie entdecken! Teil 1. Keine Überdeckung möglich!

Fazit

Leider tragen viele Schulbücher beim Thema Symmetrie eher zu Verwirrung und Unklarheit bei als zum Aufbau eines sauberen Grundverständnisses. Typische Fehler sind:

- Handlungsorientierte Einstiege mit Falten und Spiegeln werden so durchgeführt, dass sie ein Verständnis für den späteren Zusammenhang zwischen Achsensymmetrie und Achsen Spiegelung behindern, weil sie so konzipiert werden, dass sie für die Hinführung zur Spiegelung geeignet sind, aber nicht für Symmetrie.
- Es werden häufig Spiegelung als (ebene) Abbildung einer Figur auf eine andere und Symmetrie als Eigenschaft einer Figur durcheinander gebracht.
- Es wird häufig nicht Urbild, Bild und die Komposition von beiden als neue ‚ergänzte Figur‘ höherer Ordnung auseinander gehalten.
- Es wird gelegentlich der Zusammenhang von (Achsen-)Spiegelung und (Achsen-)Symmetrie getrennt und die Spiegelung erst nach der Symmetrie und unabhängig davon thematisiert.
- Ein dynamisches Verständnis von Symmetrie und das Erkennen einer Symmetrieachse als einer besonderen Spiegelachse, mit der die Figur mit sich zur Deckung gebracht wird, ist nur selten zu finden.
- Die stillschweigende Vermischung von 3D- und 2D-Aspekten in den anschaulichen Beispielen kann eine zusätzliche Hürde bedeuten.

All das führt dazu, dass bei Schülern mindestens der Aufbau einer stimmigen Grundvorstellung behindert wird, wenn nicht sogar aktiv Fehlvorstellungen aufgebaut werden.

Mit dynamischen Geometrie-Arbeitsblättern kann man aber heute schüleraktiv ein tragfähiges Verständnis von Symmetrie als Ergebnis einer speziellen Achsen- oder Punktspiegelung aufbauen.

Literatur

- bettermarks: <http://de.bettermarks.com/mathe-portal/mathebuch/symmetrie-und-bewegungen.html>. Zugriff am 10.9.2014
- Elschenbroich, H.- J. & Seebach, G. (2014). Geometrie entdecken! Mit GeoGebra – Teil 1. Rosenheim: co.Tec Verlag.
- Fokus 6 (2006). Berlin: Cornelsen
- Lambacher-Schweizer 6, Nordrhein-Westfalen (1998). Stuttgart: Ernst Klett Verlag
- Lambacher-Schweizer 5, Nordrhein-Westfalen (2013). Stuttgart: Ernst Klett Verlag
- Mathe live 5 (2014). Stuttgart: Ernst Klett Verlag
- MatheNetz 6 (2006). Braunschweig: Bildungshaus Schulbuchverlage, Westermann
- Mathematik real 6 (2007). Berlin: Cornelsen
- Mathematik real 6 (2012). Berlin: Cornelsen
- Schnittpunkt 6 (2011). Stuttgart: Ernst Klett Verlag
- Schnittpunkt 5 Plus (2013). Stuttgart: Ernst Klett Verlag
- Texas Instruments (2006 - 2014): TI-Nspire™ CAS, Version 3.09.0
- Zahlen und Größen 6, Gesamtschule Nordrhein-Westfalen (2009). Berlin: Cornelsen.

Adresse des Autors:

Hans-Jürgen Elschenbroich
Kirchstr. 26
41352 Korschenbroich
elschenbroich@dynamische-geometrie.de