

UD1 – ELS NOMBRES NATURALS

S2 - SISTEMES DE NUMERACIÓ

[Font: III Setmana de la Ciència: El llegat del món àrab]

Des dels inicis de la història, l'home es va valer de les mans, de marques en bastons o de nusos en una corda per anar passant d'un número a un altre. Aquest mètode es quedava obsolet a mesura que les quantitats anaven creixent.

- L'aparició de les civilitzacions a l'antiga Mesopotàmia i a Egipte, va obligar a aquests pobles a desenvolupar un sistema de símbols per representar números més grans.

Varen sorgir **dos sistemes de numeració:**

els posicionals i els additius.

- Els sistemes de recompte més primitius es basaven en el 5, el 10 o el 20 com a número base, per estar relacionats amb els cinc dits d'una mà, el deu que hi ha en ambdues o els vint si sumem els dels peus. A aquest nombre se l'anomena **base** i se li afegeixen unitats fins que es torna a assolir un número anterior per segona vegada, i llavors, s'afegeix una altra marca de segona classe i així successivament.

- La primera civilització en optar per un sistema de numeració additiu va ser l'egípcia. Va emprar signes anomenats jeroglífics que es repetien tantes vegades com fos necessari per representar un número. Cada unitat era una línia vertical, fins arribar a la desena, que era un arc, la centena que era un rotlle, el miler, una flor de lotusUna altra cultura que basa el seu sistema numèric en l'addició va ser la grega. Els símbols numerals utilitzats corresponen a dos sistemes: **l'àtic**, similar al romà i **l'alfabètic**, que amb un total de 27 minúscules, representava les unitats simples, les desenes, les centenars, els milers.

- El sistema romà es una evolució del grec. És una mescla dels sistemes decimal i pentacimal. Els símbols es divideixen en dos grups: **els principals** (que representen el sistema decimal) i **els secundaris** (que adopten com a base el número 5).

- El sistema numèric de l'antiga Babilònia era un sistema de base 10, additiu fins al 60 i posicional pels números superiors. Per la unitat, s'utilitzava la marca vertical que es feia amb un punxó en forma de cunya.

- Els signes que més van utilitzar els maies per formar els seus numerals van ser el punt per les unitats i la barra que tenia valor de cinc. Cal multiplicar el valor de cada xifra d'aquest sistema per un, segons el lloc que ocupi i després

sumar el resultat de l'operació. És un sistema posicional que s'escribia de dalt a baix, començant per l'ordre de major magnitud.

- El sistema actual va ser inventat pels indis i va ser transmès a Europa pels àrabs. El gran mèrit va ser la introducció del concepte i del símbol del zero, el que permet un sistema en el que només deu símbols puguin representar qualsevol número per gran que sigui i simplificar la forma d'efectuar les operacions.

EL SISTEMA HINDÚ-ARAB

L'any 773 va arribar a Bagdad una caravana procedent de l'Índia. Entre els regals que portaven per al califa Almansor es trobava el manuscrit anomenat SIDDHANTA. Era un tractat d'astronomia amb les seves taules i les deu xifres amb què comptem actualment, inclosa el zero: **eka, dva, traia, txatur, panytxa, shat, sapta, ashat, nava i shunya**, que vol dir “ buit ” i es representava amb una petita rodona.

Els àrabs la van traduir per sifr que els llatins convertiren en zephirum i d'aquí arribem a zero. SFR va servir per anomenar a tots els números: XIFRA.

Van combinar tres principis bàsics usats des d'abans en altres sistemes de notació numèrica: la base decimal, la notació posicional i una forma xifrada per a cadascun dels deu numerals bàsics.

El matemàtic encarregat de traduir el Siddhanta fou **Mohamed Ibn Musa Al Hwarizmi**. Quan aquesta traducció va arribar segles més tard a Europa, es va atribuir tot el sistema de numeració a Al Hwarizmi. El seu nom es va anar deformant successivament i es va acabar donant lloc al mot “**algoritme**” que, en matemàtiques, és el mètode de resolució de problemes complicats mitjançant un ús repetit d'un altre mètode de càlcul més senzill. En l'actualitat, el terme algoritme s'aplica a molts dels mètodes per resoldre problemes que empren una seqüència mecànica de passos.

MUHAMMED MUSA AL-KHWARIZMI

És un dels més famosos matemàtics de la civilització aràbiga-islàmica . Va néixer l'any 783 a Jiva i va morir a Bagdad el 850. Va viure a la cort del califa AlMamun. Fou membre d'un grup de matemàtics i astrònoms que treballaven a la Casa de la Saviesa, l'Acadèmia de Ciències de Bagdad.

Va ser famós per dues obres que varen contribuir a conèixer i vulgaritzar les xifres i els mètodes de càlcul, així com els procediments algebraics d'origen indi, tant en el món musulmà com en l'Occident cristià.

La primera d'aquestes obres anomenada **Al jabr wa'l muqabala (Transposició i reducció)**, estava dedicada als procediments fonamentals de la ciència

algebraica. A aquest llibre es deu el nom de la branca matemàtica que s'anomena àlgebra.

El seu títol comença per una paraula àrab que designa una de les operacions preliminars que s'han de fer abans de resoldre una equació algebraica. “**Al muqabala**” designa l'operació de reduir tots els termes semblants d'una equació, mentre que “**al jabr**” es refereix a l'operació que consisteix en fer passar els termes de l'equació d'un membre a l'altre de manera que no hi hagi més que termes positius a ambdós costats de la igualtat.

Al jabr > àlgebra

L'altra obra s'anomena **Kitab al jami wa'l tafriqi hisab al hind (Llibre de la addició i la sostracció segons els càlculs dels indis)**. És el primer llibre àrab conegut en el que es donen explicacions detallades de la numeració posicional i els mètodes de càlcul d'origen indi.

Al Khuwarizmi > Alchoarismi > Algorismi > Algorithmus
> Algorisme > Algoritme

Aquest nom designava inicialment, el sistema format pel zero, les nou xifres significatives i els mètodes de càlcul procedents de l'Índia, abans d'adquirir el significat més ampli i abstracte que avui té.

CRONOLOGIA MATEMÀTICA

Segles IV –V - Descobriment del zero i de la numeració decimal de posició d'origen indi que donarien pas a la idea generalitzadora del número i per tant a l'expansió de l'àlgebra i les matemàtiques contemporànies.

628 El matemàtic indi Brahmagupta revela un perfecte domini de la notació decimal de posició mitjançant les nou xifres i el zero.

820-850 Època d'**Al Khuwarizmi** que va contribuir al coneixement i a la propagació dels números, dels mètodes de càlcul i dels procediments algebraics d'origen indi. El seu nom llatinitzat donarà origen a la paraula algoritme, que reservada primerament a les regles de càlcul escrit mitjançant els números, en oposició als mètodes de càlcul amb l'àbac de fitxes, adquirirà finalment el sentit de “procediment sistemàtic de càlcul”.

El seu llibre d'àlgebra exposa l'art de la transposició i la comparació (transposició d'un terme negatiu d'un membre a un altre d'una equació i la reducció dels termes semblants).

Segle X .

Abu Kamil, continuador dels treballs d'Al Khuwarizmi **Abu'l Wafa al Bujzani** que dona als àrabs accés a l'aritmètica de Diofanto amb els seus estudis d'àlgebra i teoria de números.

Al Uqlidisi que publica una important exposició sobre les fraccions decimals.

Fi del segle X. Època de **Al Karaji** que realitza importants treballs sobre l'aritmètica de fraccions. Treballarà certes equacions de segon grau.

Segle XI .

Kushiyar Ibn Labban al Gili, on els seus treballs es recolzen en l'aritmètica índia i el càlcul sexagesimal d'origen babilònic.

Omar al Khayyam realitza treballs importants sobre la teoria de proporcions. Va escriure un tractat sobre les equacions cúbiques titulat "Demostracions de problemes d'al jabar i d'almuqàbala", que comprèn una classificació de les equacions. Per a cada tipus d'equació cúbica, dona una construcció geomètrica de les arrels.

Tot i emprar complicats procediments per resoldre les equacions cúbiques no trobava mai totes les solucions perquè descartava les negatives.

Segle XII.

As Samaw' al Ibn Yahya al Maghribi continuador de l'obra d'Al Karaji.

Fibonacci, matemàtic italià viatja al nord d'Àfrica, on s' inicia en l'art del càlcul mitjançant les nou xifres i publica Tractat de l'àbac.

Segle XIII.

Nasir ad din at Tusi és autor d'importants treballs d'aritmètica i àlgebra.

Segle XV

Ulugh Bek és l'autor de taules trigonomètriques, que figuren entre les taules numèriques més exactes elaborades pels savis de l'Islam.

Ghiyat ad din Ghamshid al Kashi realitza importants treballs sobre àlgebra, càlcul sexagesimal i aritmètica, en particular sobre la fórmula del binomi, el càlcul de fraccions decimals, les potències d'exponent enter, les arrels n.èssimes, els números irracionals.....

EL LLEGAT DEL MÓN ÀRAB

1.- Defineix els dos sistemes de numeració

Sistema posicional: Segons la posició del signe, aquest indica un nombre o un altre.

Sistema additiu: fa servir signes que es repeteixen tantes vegades com sigui necessari per representar un número

2.- Quina és la primera civilització que va tenir un sistema de numeració additiu ? En què consistia ?

L'egípcia, feia servir jeroglífics que es repetien tantes vegades com fos necessari per representar un número.

3.- Quins són els sistemes de la cultura grega?

L'àtic, similar al romà i l'alfabètic, amb 27 minúscules per representar les unitats, les desenes....

4.- I els de la cultura romana?

Els principals que representen un sistema decimal i els secundaris que adopten com a base el 5.

5.- Per qui va ser inventat el nostre sistema actual i per qui va ser transmès a Europa?

Pels indis i va ser transmès a Europa pels àrabs.

6.- Per què va ser tant important?

Per la introducció del concepte i del símbol del zero que permet un sistema on amb només 10 símbols podem representar qualsevol número.

7.- Com s'anomenava el manuscrit on va aparèixer les deu xifres actuals? Com s'anomenaven?

Siddhanta i les xifres són: eka, dva, traia, txatur, panytxa, shat, sapta, ashat, nava i shunya.

8.- A qui s'atribueix l'actual sistema de numeració?

A Mohamed Ibn Musa Al Hwarizmi.

9.- Quins principis van combinar el hindús?

La base decimal, la notació posicional i una forma xifrada per a cada un dels 10 numerals bàsics.

10.- Per quines obres és conegut el matemàtic Al Hwarizmi?

Transposició i reducció i el llibre de l'addició i la sostracció segons els càlculs dels indis.

11.- Què significa la paraula “ Al- mugabala “ ?

L'operació de reduir tots els termes semblants d'una equació.

12.- Explica que vol dir la paraula “ Al. Jabar “?

És l'operació que consisteix en fer passar els termes de l'equació d'un membre a l'altre de manera que només hi hagi termes positius.

13.- Quin matemàtic va resoldre equacions de grau 3 ?

Omar al Khayyam

14.- Què és un quadrat màgic?

Són quadrats dividits en la mateixa quantitat de files que de columnes i on hi ha nombres distribuïts en les seves caselles de manera que la suma dels nombres de la mateixa línia donen el mateix resultat.

15.- Quin és el primer quadrat màgic que és coneix i com es diu? Dibuixa'l.

Lo Shu

8	1	6
3	5	7
4	9	2

16.- Què és el nombre màgic d'un quadrat màgic? I l'ordre?

. Nombre màgic. Resultat de les sumes d'una línia.

. Ordre. És el nombre de files o columnes.

17.- Quin és l'ordre del quadrat màgic d'Alà? Quina particularitat té? Dibuixa'l.

D'ordre 3. Totes les seves files, columnes i diagonals sumen 66 que és el valor numèric d'Alà.

18	38	10
14	22	30
34	6	26

18.- Enumera diferents tipus de quadrats màgics segons les seves característiques.

. Els **semimàgics** no igualen les sumes de les diagonals. Se'n diu diabòlics dels que presenten altres propietats sorprenents.

. Els **bimàgics o satànics**, continuen essent màgics si es canvien els nombres pels seus quadrats.

. **Trimàgic** és aquell que continua complint amb les seves propietats si canviem els nombres pels seus cubs. Els **geomètrics** igualen els productes de les seves files, fileres i diagonals.

. Un quadrat màgic es diu **pandiagonal** quan totes les seves diagonals, les dues principals i les trencades en tots dos sentits sumen la xifra buscada.

Un quadrat màgic es denomina **associatiu** quan les parelles de nombres oposades al centre sumen $n^2 + 1$.

19.- Quin és el quadrat màgic de Dürer i on es troba?

Dibuixa'l.

Es troba a la seva obra Melencolia 1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

20.- Quant sumen les diagonals A,B,C i D del quadrat de Franklin?

A = 260 B = 260 C = 260 D = 260 E = 260

21.- Completa la taula següent:

Quadrats màgics:

Nom	ordre	Nº màgic	Suma files	Suma colum	Suma diag 1	Suma diag 2	Nº elemen
Diví	10	1010	1010	1010	1010	1010	100
Satànic	6	666	666	666	666	666	36
Apostòlic	12	1728	1728	1728	1728	1728	144
Tauler escacs	8	260	260	260	260	260	64
Pandigital	4	412960 7358	412960 7358	412960 7358	412960 7358	412960 7358	16
Apocalíptic	6	666	666	666	666	666	36
Doble	5	75	75	75	75	75	25
Franklin	8	260	260	260	260	260	64
Euler	8	260	260	260	282	210	64
Dürer	4	34	34	34	34	34	16
Lo Shu	3	15	15	15	15	15	6
Alà	3	66	66	66	66	66	6

22.- Aquests dos quadrats són d'ordre 5. Són màgics? En cada quadrat, quant sumen les files? I les columnes? I les diagonals? Tenen alguna cosa en comú?

Sí són màgics. Files = 65 , Columnes = 65, Diagonals = 65 23.- Construeix un quadrat màgic d'ordre 3.

$a + b$	$a - (b + c)$	$a + c$
$a - (b - c)$	a	$a + (b - c)$
$a - c$	$a + (b + c)$	$a - b$