

Arbeitsblatt 3 – Der Regenwassertank (Integralrechnung)

Lernform:	Teamarbeit
Gruppengröße:	2 Personen
Zeitaufwand:	15 Minuten

Heimo baut sich eine kugelförmige Regenwasserzisterne in seinem Garten. Auf den Grund derselben stellt er eine Pumpe, deren Ansaugvorrichtung sich in 20 cm Höhe befindet, damit kein Schmutz vom Boden angesaugt wird. Der Tank hat einen Durchmesser von 2 Meter.

Nachdem es 2 Tage lang geregnet hat, möchte Heimo wissen, wieviel Wasser sich in der Zisterne befindet. Er nimmt dazu einen Zollstock und misst den Wasserstand, der 165 cm beträgt.

Wieviel Wasser steht Heimo nun zur Verfügung?

Hinweis: Querschnittsflächenfunktion der Kugel: $A(x) = \pi(r^2 - x^2)$

1. Überlege dir alleine eine passende Lösungsstrategie und berechne den verfügbaren Wasserinhalt. Der Einsatz von Technologie ist nicht erlaubt. Du hast dazu 10 Minuten Zeit.
2. Vergleiche dein Ergebnis mit deinem Sitznachbarn und prüft euer Ergebnis auf Plausibilität!
3. Bereitet gemeinsam eine kurze Präsentation des Ergebnisses samt Lösungsweg vor.

Lösung:

Das Volumen der Kugel entspricht dem Integral der Flächenfunktion im Bereich von -r bis +r. Die Höhe des nutzbaren Wasserinhalts geht demnach von -0,8 m bis +0,42m.

$$V = \int_{-0,8}^{0,65} \pi(r^2 - x^2) dx = \pi \int_{-0,8}^{0,65} (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-0,8}^{0,65}$$

$$V = \pi \cdot \left[1^2 \cdot 0,65 - \frac{0,65^3}{3} - \left(1^2 \cdot (-0,8) + \frac{0,8^3}{3} \right) \right] = \pi \cdot [0,65 - 0,092 + 0,8 - 0,171] = 3,73$$

Die nutzbare Wassermenge beträgt demnach 3 730 Liter.

Plausibilitätsprüfung:

Gesamtvolumen der Kugel: $V = \frac{4r^3\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi = 4,19 \text{ m}^3$

Der Tank ist aufgrund der Angabe schätzungsweise zumindest $\frac{3}{4}$ gefüllt, wobei ein Teil des Wassers am Boden nicht genutzt werden kann.

$$4,19 \cdot 0,75 = 3,15 \cong 3,73$$

Das Ergebnis ist plausibel.