ESPACIOS VECTORIALES. VARIEDADES LINEALES, APLICACIONES ENTRE ESPACIOS VECTORIALES. TEOREMAS DE ISOMORFIA.

Índice de contenido

1. Espacio vectorial.....	1
Estructura de espacio vectorial.....	1
Subespacios vectoriales.....	2
Combinaciones lineales. Sistemas de generadores.....	3
Bases de un espacio vectorial.....	4
Suma directa de subespacios vectoriales.....	8
Variedades lineales. Espacios cocientes.....	8
2. Aplicaciones lineales.....	11
El concepto de aplicación lineal.....	11
Propiedades de las aplicaciones lineales.....	11
Otras propiedades.....	12
Isomorfismos.....	15

1. Espacio vectorial.

Estructura de espacio vectorial.

☞ Sea K un cuerpo conmutativo. Un conjunto no vacío V se denomina **ESPACIO VECTORIAL** V sobre el cuerpo K ¹. Si existen dos operaciones (*una interna y otra externa*) en V , denominadas *suma* y *producto por elementos de K* :

$$+ : V \times V \rightarrow V : (x,y) \rightarrow x + y.$$

$$* : K \times V \rightarrow V : (\alpha,x) \rightarrow \alpha * x.$$

Tal que se cumple:

1.- $(V, +)$ es un grupo conmutativo. Es decir dicha operación cumple las propiedades:

Asociativa: $x + (y + z) = (x + y) + z; \forall x, y, z \in V.$

Conmutativa: $x + y = y + x; \forall x, y \in V.$

$\exists$ de neutro 0 : $x + 0 = x; \forall x \in V.$

$\exists$ de simétrico de x : $-x \in V$ tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0.$

2.- El producto $*$ de elementos de K cumple:

¹ En caso de que K sea un anillo A conmutativo con elemento unidad se denomina *módulo*

$$\begin{aligned} \alpha * (x + y) &= \alpha * x + \alpha * y; & \forall \alpha \in K. \forall x, y \in V. \\ (\alpha + \beta) * x &= \alpha * x + \beta * x; & \forall \alpha, \beta \in K. \forall x \in V. \\ (\alpha \beta) * x &= \alpha * (\beta * x); & \forall \alpha, \beta \in K. \forall x \in V. \\ (1_K) * x &= x; & \forall x \in V. \end{aligned}$$

- Los elementos del cuerpo K se denominan **escalares** y suelen representarse por símbolos griegos, y los elementos del grupo V se denominan **vectores** y suelen representarse por letras del alfabeto.
- El espacio vectorial V sobre el cuerpo K suele representarse como $(V, +, *)_K$, o si no hay riesgo de confusión mediante V. En el caso de que $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$, se denomina espacio vectorial real y complejo respectivamente.

En el caso de que K sea solamente anillo, se denomina **MODULO** (submodulo si es subanillo), y si el grupo $(V, +)$ está dotado de una segunda operación que le dé estructura algebraica de cuerpo, se denomina **ÁLGEBRA**.

Ejemplos.-

a) Si en $\mathbb{R}^n$ definimos las operaciones:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

$$\alpha * (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha * x_1, \alpha * x_2, \dots, \alpha * x_n).$$

Siendo α un número real arbitrario. Es fácil comprobar que $\mathbb{R}^n$ se convierte en un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

b) Sea $\mathbb{R}[x]$ el conjunto de polinomios $p = p(x)$ con coeficientes reales. Con las operaciones de suma de polinomios y producto de números reales por polinomios, es inmediato comprobar que $\mathbb{R}[x]$ adquiere estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

c) Si V es el conjunto de matrices (m filas, n columnas), con coeficientes reales, con la suma de matrices y producto números reales por matrices, V es espacio vectorial real.

d) Dado un sistema de ecuaciones homogéneas, con coeficientes reales:

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0.$$

.....

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0.$$

El conjunto de sus soluciones forman un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones habituales de suma y producto por números reales.

e) Sea el conjunto $\mathbb{R}^2$ y el cuerpo de los números complejo $\mathbb{C}$, con las operaciones:

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v).$$

$$\alpha * (x, y) = (Re(\alpha)x - Im(\alpha)y, x.Im(\alpha) + y.Re(\alpha))$$

Es fácil comprobar que es un espacio vectorial complejo.

Subespacios vectoriales.

☞ Un subespacio vectorial U de un espacio vectorial $(V, +, *)_K \equiv V$ es un conjunto no vacío U que cumple:

1.- $\forall x, y \in U$ se cumple que $x + y \in U$.

2.- $\forall x \in U$ y $\forall \alpha \in K$ se cumple que $\alpha * x \in U$.

(Se suele representar como $U < V$)

- Es decir el conjunto U con las operaciones heredadas de V es un espacio vectorial sobre K .

Además, se cumple el siguiente corolario:

U es subespacio vectorial $\Leftrightarrow \forall x, y \in U \forall \alpha, \beta \in K$ es $\alpha * x + \beta * y \in U$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Si U es un subespacio vectorial de V :

Por la propiedad 2 de la definición será:

$$\alpha * x, \beta * x \in U$$

Por la propiedad 1 de la definición será

$$(\alpha * x) + (\beta * y) \in U.$$

$\Leftarrow$) Si $\forall x \in U$ y $\forall \alpha \in K$ se cumple que

$$\alpha * x + \beta * y \in U.$$

Tomando los casos particulares de $\alpha = \beta = 1$ y $\beta = 0$. Nos queda:

$$(x + y), (\alpha * x) \in U.$$

Luego U es subespacio vectorial de V .

Ejemplos.-

a) Sea el espacio vectorial real $\mathbb{R}^n$ con las operaciones:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

$$\alpha * (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha * x_1, \alpha * x_2, \dots, \alpha * x_n).$$

Siendo α un número real arbitrario. El conjunto:

$$U = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \alpha * x_1 + \alpha * x_2 + \dots + \alpha * x_n = 0 \}$$

Es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

b) Sea $\mathbb{R}[x]$ el conjunto de polinomios $p = p(x)$ con coeficientes reales. Con las operaciones habituales de suma de polinomios y producto por números reales por polinomios es inmediato comprobar que:

$$\mathbb{R}_n[x] = \{ p(x) \in \mathbb{R}[x] : \text{Grado } p(x) \leq n \}.$$

Es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}[x]$.

Combinaciones lineales. Sistemas de generadores.

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un conjunto finito de vectores de V . Diremos que $v \in V$ es **COMBINACIÓN LINEAL** de S . Cuando $\exists a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ tal que $v = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n$. Diremos que v depende linealmente de S (d. l. S.).

- **Es fácil comprobar que el conjunto:**

$$\langle S \rangle = \langle \{ x_1, x_2, \dots, x_n \} \rangle = \{ a_1 x_1 + \dots + a_n x_n : a_1, a_2, \dots, a_n \in K \}.$$

Es un subespacio vectorial de V.

Demostración:

Si $\alpha, \beta \in K$; $u = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n, v = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n \in \langle S \rangle$. Será:

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta v &= \alpha(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n) + \beta(b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n) = \\ &= (\alpha a_1 + \beta b_1) x_1 + \dots + (\alpha a_n + \beta b_n) x_n \in \langle S \rangle. \end{aligned}$$

- Al subespacio vectorial $\langle S \rangle$ se le denominamos subespacio vectorial de V generado por S, en particular, es el espacio vectorial más pequeño que contiene al conjunto S. El conjunto S se dice que es un sistema generador. De hecho, se puede comprobar que dicho subespacio vectorial, es el más pequeño que contiene al conjunto S.

Ejemplo.

Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}[x]$ de los polinomios de una indeterminada con coeficientes reales con la operación + (suma de polinomios) y $\cdot$ (producto de un número real por un polinomio) y sea el vector $f(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$. Entonces si S es el conjunto:

$$S = \{f(x), f'(x), f''(x), f'''(x)\}$$

Es un sistema generador del subespacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$.

- Cuando un sistema generador S tiene un número finito de elementos, decimos que es **finito**.
- En el caso de que S y T sean dos sistemas generadores de un mismo subespacio vectorial ($\langle S \rangle = \langle T \rangle$) se dice que S y T son **equivalentes**.

Ejemplo.

El espacio vectorial $\mathbb{R}[x]$ no es finitamente generado, ya que si suponemos que el conjunto $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ es un sistema generador de $\mathbb{R}[x]$ existirá un número finito de números reales $a_1, a_2, \dots, a_n$, tales que :

$$\langle S \rangle = \{ a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n : a_1, a_2, \dots, a_n \in K \}.$$

Y puesto que los vectores u_i son polinomios, existirá un número natural q, tal que:

$$q = \max \{ \text{grado}(u_1(x)), \dots, \text{grado}(u_n(x)) \}.$$

Luego, $\forall$ polinomio $f(x)$ tal que $\text{grado}(f(x)) > q$ no pertenecerá a $\langle S \rangle$. En contra de lo supuesto.

Luego, S está infinitamente generado. Una base de $\mathbb{R}[x]$ puede ser el conjunto $T = \{1, x, \dots, x^n, \dots\}$

Un sistema generador de $\mathbb{R}[x]$ sería $T (\neq S)$.

Bases de un espacio vectorial.

☞ Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un conjunto finito de vectores de V. Diremos que los vectores de S son **linealmente independientes (l. i.)** cuando no sean dependientes.

Es decir: $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ son vectores linealmente independientes si $\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in K$, tal que:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = \bar{0} \text{ (vector nulo)} \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0.$$

Ejemplo.

Sea el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$, el conjunto de vectores: $\{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$. Son linealmente independientes ya que:

$$a \cdot (1,0,0) + b \cdot (1,1,0) + c \cdot (1,1,1) = 0$$

Es equivalente al sistema:

$$\{a + b + c = 0; b + c = 0; c = 0\}.$$

Es decir: $a = b = c = 0$.

☞ Un conjunto B del espacio vectorial V es BASE de V si verifica las propiedades:

1.- B es un conjunto linealmente independiente.

2.- $\langle B \rangle = V$ (B es un sistema generador de V).

- **Teorema.-** Un subconjunto B de un espacio vectorial V es una base de V si y solo si todo elemento de V admite una única representación como combinación lineal de elementos de B.

Demostración:

a) Supongamos que $B = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es una base vectorial de V.

Como $\langle B \rangle \subset V$; todo elemento u de V se expresa como combinación lineal única de elementos de B. Ya que si existiera más de una, sería:

$$u = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n.$$

$$u = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n.$$

Y tomando diferencia de ambas expresiones se obtiene:

$$0 = (a_1 - b_1) x_1 + (a_2 - b_2) x_2 + \dots + (a_n - b_n) x_n.$$

Y dado que el conjunto B es linealmente independiente se cumplirá:

$$(a_1 - b_1) = (a_2 - b_2) = \dots = (a_n - b_n) = 0.$$

Es decir:

$$a_1 = b_1; a_2 = b_2; \dots; a_n = b_n.$$

Y por tanto dicha expresión es única.

b) Si para todo elemento u de V se puede expresar de forma única como combinación lineal de elementos de B, entonces $u \in \langle B \rangle$, luego $\langle B \rangle = V$.

Además si $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$ tal que $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = \bar{0}$.

Como $\bar{0}$ es un vector de V, y por hipótesis que se expresará de forma única, se cumplirá:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0.$$

- De la propia definición de base de un espacio vectorial V, se deduce que si S es un subconjunto linealmente independiente de un espacio vectorial V, entonces S es base de $\langle S \rangle$.

Conviene destacar los siguientes teoremas:

1. Teorema de Steinitz.- Si B es una base de un espacio vectorial finito V de dimensión n y C es un conjunto linealmente independiente de m vectores de V. Entonces se verifica que $m \leq n$.

2. Teorema de la base.- Sea V un espacio vectorial no vacío de dimensión finita. Entonces:

- a) Existe una base B de V con un número finito de vectores.
- b) Todas las bases de V tiene el mismo número de vectores.

3. Teorema de prolongación de la base.- Si la dimensión de un espacio vectorial V es n y S es una sistema de r vectores linealmente independiente de V , con $r \leq n$. Entonces existe una base B de V de la forma $B = \{S \cup L\}$, siendo L un sistema linealmente independiente de $n - r$ vectores.

Demostración.

1. Si B es una base de dimensión n de V y $C = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ es un sistema de m vectores linealmente independientes de V . Si $w \in \langle C \rangle$, se cumple que $w \in V = \langle B \rangle$, y como $\langle C \rangle$ es un subespacio vectorial de V , será $\langle C \rangle \subset \langle B \rangle$. Además, como B y C son conjuntos linealmente independientes de n y m vectores respectivamente, será $m = \text{Card } C \leq \text{Card } B = n$.

2.a) Si V es finito, existirá un sistema finito $S = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ de generadores, de m vectores de V tal que $\langle S \rangle = V$. Si S es linealmente independiente, por definición, S es una base B de V de la forma indicada, y si no es linealmente independiente entonces existirá un vector $v \in S$ tal que:

$$\langle S \rangle \subset \langle S - \{v\} \rangle.$$

Si $S - \{v\} = S'$ es un sistema linealmente independiente, entonces, será S' una base B de $m - 1$ vectores de V de la forma indicada, y si no es linealmente independiente, entonces, existirá un vector $v' \in S'$ tal que:

$$\langle S' \rangle \subset \langle S' - \{v'\} \rangle.$$

Siguiendo este procedimiento, encontraremos un sistema generador de $m - r$ vectores linealmente independientes de V :

$$e = \{S - \{v, v', \dots, v^r\}\} \text{ con } 0 < r < m$$

que sería una base B con un número finito de vectores.

2.b) Si B fuera una base de n vectores de un espacio vectorial V y B' fuera otra base de V de m vectores. Entonces, como $\langle B \rangle = \langle B' \rangle = V$, se cumplirá :

I) Para cada vector $u \in \langle B \rangle$, será $u \in \langle B' \rangle$ Es decir $\langle B \rangle \subset \langle B' \rangle$.

II) Para cada vector $u \in \langle B' \rangle$, será $u \in \langle B \rangle$ Es decir $\langle B' \rangle \subset \langle B \rangle$.

Como B y B' son sistemas l. i., se cumplirá por I) y por II) que $n \leq m$ y $m \leq n$.

Es decir $m = n$.

3. Si S es un sistema l. i. de r vectores de V , será S una base del subespacio vectorial $\langle S \rangle \subset V$.

Si $r = n$ entonces por 2) S es una base B de V de la forma $\{S \cup \emptyset\}$.

Si $r < n$, S no es un sistema generador de V , como por 2, tenemos que todas las base de V tiene n vectores. Luego, bastará con que encontremos un conjunto L de $n-r$ vectores linealmente independientes tal que para cada vector $u \in L$ sea $u \notin S$.

☞ **La dimensión de un espacio vectorial FINITO es el número de elementos de una cualquiera de sus bases. (Se representa por $\text{Dim}(V) = n$).**

Ejemplos.

a) Como el conjunto $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$, siendo :

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0). \quad \text{Dim } \mathbb{R}^n = n.$$

b) Como en el conjunto $B = \{x^n : n \geq 0\}$ es una base de $\mathbb{R}[x]$, y el número de elementos de esta base es el cardinal de los números naturales, será de dimensión $\text{dim } \mathbb{R}[x] = \aleph_0$.

☞ **Las coordenadas del vector $u \in V$ (espacio vectorial sobre un cuerpo K) respecto de la base $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, es el conjunto de escalares $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ tal que:**

$$u = a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + \dots + a_n \cdot e_n.$$

Las coordenadas de los vectores de V , vienen dadas por la función:

$$x: V \rightarrow K^n : u = a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + \dots + a_n \cdot e_n \rightarrow x(u) = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Ejemplo.

Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}_4[x]$ de los polinomios de grado menor o igual que 4, con coeficientes reales y el polinomio cero. El polinomio: $p(x) = 4x + 5$

tiene de coordenadas $X(p(x)) = (3, 4, 0, 0, 0)$ respecto de la base $(3, (x-1), x^2, x^3, x^4)$. ya que

$$p(x) = 3 \cdot 3 + 4 \cdot (x-1) + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4.$$

- Dadas dos bases e y e' de un espacio vectorial finito V , como cada vector de una base se puede poner como combinación lineal de vectores de la otra base, si denominamos $x(v)$ a las coordenadas del vector v respecto de la base e , y denominamos $y(v)$ a las coordenadas del vector v respecto de la base e' , podremos cambiar de coordenadas mediante:

$$x(v) = y(v) \cdot x(e') \quad \text{y} \quad y(v) = x(v) \cdot y(e); \quad \text{Donde: } x(e') = \begin{pmatrix} x(e'_1) \\ \dots \\ x(e'_n) \end{pmatrix}, \quad y(e) = \begin{pmatrix} y(e_1) \\ \dots \\ y(e_n) \end{pmatrix}$$

Ejemplo.

Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, con las bases $e = \{(1,0), (0,1)\}$ y $e' = \{(1,0), (1,1)\}$. Dado, que para cada (u,v) de $\mathbb{R}^2$, tiene de coordenadas respecto de e : $x(u,v) = (u,v)$. Y los vectores de e $(1,0)$ y $(0,1)$ tienen de coordenadas respecto de e' , $y(1,0) = (1,0)$; $y(0,1) = (-1,1)$. Las coordenadas del vector (u,v) respecto a la base e' serán: $y(u,v) = x(u,v) \cdot y(e) = (u,v) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (u-v, v)$.

Suma directa de subespacios vectoriales.

Sean $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ subespacios vectoriales del espacio vectorial V , fácilmente podemos comprobar que:

$$V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n = \{u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n : u_1, u_2, u_3, \dots, u_n \in V\}$$

$$V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap \dots \cap V_n = \{u \in V_1, u \in V_2, u \in V_3, \dots, u \in V_n\}$$

$$W^\perp = \{u \in V : u \notin W\}$$

Son subespacios vectoriales, denominados:

SUMA de $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$

INTERSECCIÓN de $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$

COMPLEMENTARIO de V .

☞ En particular el subespacio vectorial $V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$, es el menor subespacio que contiene al conjunto $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \dots \cup V_n$, ya que dicho conjunto no es necesariamente subespacio vectorial.

Ejemplo.

Tomando los subespacios vectoriales $V = \langle (1,0) \rangle$ y $W = \langle (1,1) \rangle$, de $\mathbb{R}^2$, si fuera el conjunto $V \cup W$ subespacio vectorial, para cualquier combinación lineal de vectores de $V \cup W$ sería también un vector de $V \cup W$. Tomando el caso particular de $(1,1) - (1,0) = (0,1)$, se ve, que no pertenece ni a V ni a W .

☞ Es evidente comprobar que $(W^\perp)^\perp = W$. Y teniendo en cuenta el teorema de prolongación de la base como $W^\perp \cap W = \emptyset$, Será: **$\dim V = \dim(V) - \dim(W^\perp)$**

Un espacio vectorial V es SUMA DIRECTA² de los subespacios vectoriales U y W si se cumple:

$$V = U + W \quad \text{y} \quad \emptyset = U \cap W.$$

Representamos mediante $V = U \oplus W$.

Ejemplo.

Sean los subespacios vectoriales $V = \langle (1,0,0) \rangle$ y $W = \langle (0,1,0), (0,0,1) \rangle$ de $\mathbb{R}^3$, Será

$$V^\perp = W \quad \mathbb{R}^3 = V + W \quad \emptyset = V \cap W$$

Luego

$$\mathbb{R}^3 = V \oplus W.$$

Variedades lineales. Espacios cocientes.

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y sea F un subespacio vectorial de V . Como $(V,+)$ es un grupo conmutativo si definimos la relación R en V dada por:

$$u R v \quad \Leftrightarrow \quad u - v \in F \quad (\text{que es relación de equivalencia}).$$

² El concepto de suma directa se puede generalizar sin dificultad a n subespacios vectoriales. $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$, si para cada vector u de V , u se escribe de manera única como: $u = u_1 + \dots + u_n$.

El conjunto cociente V/F , que representamos por V/F , con la operación $+$ es otro grupo conmutativo, donde los elementos son las clases de equivalencia de la forma:

$$[u] = \{ v \in V : u - v \in F \}.$$

Y la operación $+$ se define como:

$$[u] + [v] = [u + v].$$

Que está bien definida y es independiente de los representantes elegidos de la clase y cumple las propiedades de grupo conmutativo. Y para cada $u \in V$, al conjunto

$$[u] = \{ u + x : x \in F \}$$

Lo denominamos Variedad lineal que pasa por u y que posee un espacio de direcciones F ,

Teniendo en cuenta la definición de espacio cociente y que el vector 0 pertenece a F , es evidente que

$$[u] = [v] \Leftrightarrow u - v \in F.$$

☞ La variedad corresponde al resultado de la operación de trasladar el subespacio vectorial F según el vector de traslación u . Por esta razón las variedades lineales se denominan espacios lineales trasladados.

Si $\dim F = m$ se dice que m es la dimensión lineal de la variedad $[u]$.

Si $m = 0 \Rightarrow [u]$ es un punto de V . Si $m = 1 \Rightarrow [u]$ es una recta de V .

Si $m = 2 \Rightarrow [u]$ es un plano de V . Si $m = \dim V - 1 \Rightarrow [u]$ es un hiperplano de V .

☞ Si $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ sea una base del subespacio vectorial F , entonces:

$$[u] = \{u + x : x \in F\} \Leftrightarrow (u_1, u_2, \dots, u_n) = \{u + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_m \cdot x_m : a_1, a_2, \dots, a_m \in K\}$$

Se denomina ecuación vectorial de la variedad lineal $[u]$.

• En forma vectorial será:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = (u, x_1, x_2, \dots, x_m) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$$

Si $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es una base del espacio vectorial V , entonces podemos descomponer los

vectores: $y = \sum_{j=1}^n z_j \cdot e_j$, $u = \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot e_j$, $x_i = \sum_{j=1}^n \beta_{ji} \cdot e_j$.

Y la ecuación vectorial se convierte en:

$$(z_1, z_2, \dots, z_n) = \left\{ \beta_1 + \sum_{i=1}^m \beta_{1i} \cdot a_i, \beta_2 + \sum_{i=1}^m \beta_{2i} \cdot a_i, \dots, \beta_n + \sum_{i=1}^m \beta_{ni} \cdot a_i : a_1, a_2, \dots, a_m \in K \right\}$$

Que se denomina ecuaciones paramétricas de la variedad lineal $[u]$.

Y en forma matricial será:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$$

Ejemplo.

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ la variedad lineal que pasa por el $(1,1,1)$ y tiene por dirección el subespacio vectorial $\langle(0,1,0)\rangle$. Tiene por ecuación vectorial respecto de la base de $B = \{(0,1,0)\}$ de F :

$$(y_1, y_2, y_3) = (1,1,1) + a \cdot (0,1,0); a \in \mathbb{R}$$

El conjunto de variedades lineales de espacio de direcciones F , con las operaciones heredadas de V :

$$[u] + [v] = [u+v] \quad \text{y} \quad a*[v] = [a*v] \quad (\forall u, v \in V, \forall a \in K)$$

Está bien definida, y son independiente de los representantes de la clase elegidos. Además, es un espacio vectorial denominado **espacio vectorial cociente V de módulo F** y que se denota por V/F .

Teorema.- Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y F un subespacio vectorial de V , entonces se cumple: $\dim(V/F) = \dim V - \dim F$.

#Demostración:

Basta tener en cuenta que si $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ es una base de F , por el teorema de ampliación de la base, podemos hallar una base B de V de la forma: $B = \{e_1, e_2, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$ con $e_{m+1}, \dots, e_n \notin F$

Y como para cada $u \notin F \exists$ una representación respecto de la base B :

$$u = a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + \dots + a_n \cdot e_n$$

Y como $[u] \in V/F$. Teniendo en cuenta, $e_1, e_2, \dots, e_m \in F \Rightarrow [e_1] = [e_2] = \dots = [e_m] = [0]$.

Se cumplirá:

$$[u] = a_1 \cdot [e_1] + a_2 \cdot [e_2] + \dots + a_n \cdot [e_n] = a_{m+1} \cdot [e_{m+1}] + a_{m+2} \cdot [e_{m+2}] + \dots + a_n \cdot [e_n]$$

Por tanto

$$\{[e_{m+1}], [e_{m+2}], \dots, [e_n]\}$$

es un sistema generador de V/F . Y si se cumple

$$0 = a_{m+1} \cdot [e_{m+1}] + a_{m+2} \cdot [e_{m+2}] + \dots + a_n \cdot [e_n]$$

Se cumplirá que

$$a_{m+1} \cdot e_{m+1} + a_{m+2} \cdot e_{m+2} + \dots + a_n \cdot e_n \in F$$

Por tanto, se podrá poner como combinación lineal de elementos de la base de F :

$$a_{m+1} \cdot e_{m+1} + a_{m+2} \cdot e_{m+2} + \dots + a_n \cdot e_n = b_1 \cdot e_1 + b_2 \cdot e_2 + \dots + b_n \cdot e_n$$

Pero por ser B base de V esto solo es posible si

$$a_{m+1} = a_{m+2} = \dots = a_n = 0$$

Luego

$$\{[e_{m+1}], [e_{m+2}], \dots, [e_n]\} \text{ es un sistema linealmente independiente de } V/F$$

Es decir

$$\{[e_{m+1}], [e_{m+2}], \dots, [e_n]\} \text{ es una base de } V/R \text{ de dimensión } n - m.$$

2. Aplicaciones lineales.

El concepto de aplicación lineal.

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo K . Una aplicación $f : V \rightarrow W$ es **APLICACIÓN LINEAL** de V en W si se verifica:

$$1.- f(x+y) = f(x) + f(y); \quad \forall x, y \in V.$$

$$2.- f(ax) = a f(x); \quad \forall a \in K; \quad \forall x \in V.$$

Como consecuencia de esta definición, se obtiene el teorema:

$$f: V \rightarrow W \text{ es aplicación lineal} \Leftrightarrow f(ax+by) = af(x)+bf(y) \quad \forall a, b \in K \quad \forall x, y \in V.$$

Demostración:

$\Rightarrow$) Si f es aplicación lineal:

$$f(ax + by) = \text{“ por propiedad 1 “} = f(ax) + f(by) = \text{“ por propiedad 2 “} = \\ = a f(x) + b f(y). \quad \forall a, b \in K. \quad \forall x, y \in V.$$

$$\Leftarrow) \text{ Si } f(ax + by) = a f(x) + b f(y). \quad \forall a, b \in K. \quad \forall x, y \in V.$$

Para $a = b = 1$ Se cumple la propiedad 1. De la definición.

Para $a = 1$ y $b = 0$. Se cumple la propiedad 2. De la definición.

Ejemplo .

Si $V = \mathbb{R}[x]$ y $W = \mathbb{R}^2$. Podemos definir la aplicación lineal.

$$f: V \rightarrow W \text{ dada por } f(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = (a_1, a_0)$$

Que evidentemente cumple las dos propiedades de aplicación lineal.

Propiedades de las aplicaciones lineales.

1.- $f(0) = 0$ “vector cero“.

2.- $f(-x) = -f(x)$.

3.- $f(V)$ es subespacio vectorial de W .

4.- Si S es un Sistema generador de $V \Rightarrow f(S)$ es un Sistema generador de $f(V)$ ³.

Demostración:

$$1.- f(x) = f(0+x) = f(0) + f(x) \Rightarrow f(0) = 0.$$

$$2.- f(-x) = f((-1).x) = (-1).f(x) = -f(x).$$

³ A partir de 4.- se demuestra el Teorema fundamental de homomorfismos:

Si $B = \{u_1, \dots, u_r\}$ es base de V y $v_1, \dots, v_r \in W$, $\exists!$ homomorfismo f : de $V \rightarrow$ en W : $f(u_i) = v_i$. Además:

$\{v_1, \dots, v_r\}$ es l. i. $\Leftrightarrow f$ es monomorfismo.

$\{v_1, \dots, v_r\}$ es generador de $W \Leftrightarrow f$ es epimorfismo.

$\{v_1, \dots, v_r\}$ es base de $W \Leftrightarrow f$ es isomorfismo.

3.- Si $a, b \in K$ y $f(x), f(y) \in f(V)$.

Por ser f aplicación lineal $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$.

Y por ser V espacio vectorial $ax + by \in V$. Luego $f(ax + by) \in f(V)$.

Por lo tanto por definición $f(V)$ es subespacio vectorial de W .

4.- Si $S = \{s_1, s_2, \dots, s_r\}$ es un sistema generador de V .

Para cada vector $v \in V$, $\exists a_1, a_2, \dots, a_r \in K$ con $(a_1, a_2, \dots, a_r) \neq 0$:

$$v = a_1 s_1 + a_2 s_2 + \dots + a_r s_r .$$

Y como f es aplicación lineal para cada $v \in V$:

$$f(v) = a_1 f(s_1) + a_2 f(s_2) + \dots + a_r f(s_r).$$

Luego $f(S)$ es un sistema generador de $f(V)$.

☞ Decimos que una aplicación lineal f es:

Un **monomorfismo** cuando f es inyectiva.

Un **epimorfismo** cuando f es sobreyectiva.

Un **isomorfismo** cuando f es biyectiva.

- A las aplicaciones lineales de V en si mismo se les denomina **endomorfismos**. Que en el caso de que sean isomorfismos, se les denomina **automorfismos**.

☞ Se denomina **Núcleo de una aplicación lineal f** al conjunto:

$$\text{Ker } f = \{v \in V : f(v) = 0\} = \text{Nuc } f.$$

Otras propiedades.

1.- **Ker f es subespacio vectorial de V .**

Pues si $u, v \in \text{Ker } f$ y $a \in K$, se cumple:

$$f(u + v) = f(u) + f(v) = 0 + 0 = 0$$

$$f(a.u) = a.f(u) = a.0 = 0.$$

2.- **f es una aplicación inyectiva SI Y SOLO SI $\text{Ker } f = \{0\}$.**

Ya que se cumple:

a) Si f es inyectiva, como $f(0) = 0$ si $x \in V$ tal que $f(x) = 0$ será $x = 0$.

b) Si $\text{Ker } f = \{0\}$ y sean $x, y \in V$ tales que $f(x) = f(y)$.

Entonces:

$$f(x - y) = f(x) - f(y) = 0. \Rightarrow x - y \in \text{Ker } f.$$

Por tanto $x = y$.

Es decir f es inyectiva.

☞ Se denomina **Conjunto Imagen de f** a conjunto:

$$\text{Img } f = \{w \in W : \text{existe un } v \in V, f(v) = w\}.$$

Ejemplo.

Sea la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: f(x, y, z) = x + y + z$. Como para cada $w \in \mathbb{R}$ existen $x, y, z \in \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z) = w$. Será f una aplicación sobreyectiva e $\text{Im } f = \mathbb{R}$.

Evidentemente no es una aplicación inyectiva ya que:

$$\text{Ker } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x + y + z = 0\} = \langle (1, -1, 0), (1, 0, -1) \rangle \neq 0.$$

Sean E y F , dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K y sea el conjunto

$$\mathbf{L(E,F)} = \{f: E \rightarrow F: \text{tal que } f \text{ es aplicación lineal}\}.$$

Podemos definir las operaciones interna $+$, y externa $\cdot$ en $\mathbf{L(E,F)}$:

$$+ : \mathbf{L(E,F)} \times \mathbf{L(E,F)} \rightarrow \mathbf{L(E,F)} : (f, g) \rightarrow f + g.$$

$$f + g \text{ es el homomorfismo tal que } (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in E.$$

$$\cdot : K \times \mathbf{L(E,F)} \rightarrow \mathbf{L(E,F)} : (\alpha, f) \rightarrow \alpha f.$$

$$\alpha f \text{ es el homomorfismo tal que } (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad \forall x \in E \quad \forall \alpha \in K.$$

$(\mathbf{L(E,F)}, +, \cdot) = (\mathbf{L(E,F)}, +, \cdot)_K$ es un espacio vectorial.

Además, si $\dim(E) = n$ y $\dim(F) = m$, $\Leftrightarrow \dim(\mathbf{L(E,F)}) = m n$.

Pues si $\{u_1, \dots, u_n\}$ es una base de E , y $\{v_1, \dots, v_m\}$ es una base de F , entonces, si definimos el conjunto de aplicaciones lineales: $\{f_{ij}\}_{i,j=1,2,3,\dots,m}$. Dadas por:

$$f_{ij}(u_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ v_j & \text{si } k = i \end{cases}$$

Se tiene, que:

$$\langle \{f_{ij}\}_{i,j=1,2,3,\dots,m} \rangle = \mathbf{L(E,F)}.$$

Ya que para cualquier aplicación lineal $f: E \rightarrow F$ tal que:

$$f(u_k) = \sum_{j=1,2,\dots,m} \alpha_k^j \cdot v_j \quad \forall k = 1, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1,2,\dots,n} a_i^j \cdot f_{ij} \right) (u_k) = \sum_{i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,m} a_i^j \cdot f_{ij}(u_k) = \sum_{j=1,2,\dots,m} a_k^j \cdot v_j = f(u_k)$$

Y además, el conjunto $\{f_{ij}\}_{i,j=1,2,3,\dots,m}$ es linealmente independiente, ya que:

$$\sum_{i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,m} a_i^j \cdot f_{ij}(u_k) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,m} a_i^j \cdot f_{ij}(u_k) = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,m} a_i^j \cdot v_j = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow a_k^j \cdot v_j = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Si $E = F$, $\mathbf{L(E,E)} = \mathbf{L(E)}$. Y definiendo la operación interna producto $f g$ tal que $(f g)(x) = f(x) g(x)$.

Y el espacio vectorial $\mathbf{L(E)}$, tiene estructura de **Álgebra de endomorfismos**.

Al subespacio vectorial de $\mathbf{L(E)}$, tal que las funciones son biyectivas se denomina **espacio vectorial de automorfismos** de E ($\mathbf{A(E)}$).

☞ Si V es un espacio vectorial sobre un cuerpo K . Entonces, el conjunto:

$$V^* = \{ \varphi : V \rightarrow K : \varphi \text{ es una aplicación lineal} \}.$$

es espacio vectorial denominado **ESPACIO VECTORIAL DUAL de V** .

Además, si $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$ es una base de V . Entonces, la correspondiente base dual viene dada por $B^* = \{u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*, \dots\}$.

Donde, $u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*, \dots$ viene dado por las ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ u_3^* \\ \dots \\ u_n^* \\ \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1^* & u_2^* & u_3^* & \dots & u_n^* & \dots \end{pmatrix} = Id$$

Utilizando las matrices asociadas (en caso de dimensiones finitas):

$$M_{B^*} = ((M_B)^{-1})^t$$

Ejemplos.

1.- Sea $V = \mathbb{R}^3$ y la base (en vectores columnas): $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

Se tiene que la base B^* en vectores columna será: $B^* = (B^{(-1)})^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2.- Sea V el espacio vectorial $\mathbb{R}_1[x]$ y sean $\varphi_1, \varphi_2 : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(\varphi_1(p(x)), \varphi_2(p(x))) =$
 $(\int_0^1 p(x) \cdot dx = \int_0^1 (a \cdot x + b) \cdot dx = \frac{a}{2} + b, \int_0^2 p(x) \cdot dx = \int_0^2 (a \cdot x + b) \cdot dx = 2 \cdot a + 2 \cdot b)$

Comprobar que (φ_1, φ_2) es una base dual de V^* y hallar la base $(p(x), q(x))$ de V que tiene como base dual (φ_1, φ_2)

Solución: Como para algún A, B, C y D ., existen: $p(x) = Ax + B$; $q(x) = Cx + D$

Será

$$(\varphi_1(p(x)), \varphi_2(p(x))) = (A/2 + B, 2A + 2B)$$

$$(\varphi_1(q(x)), \varphi_2(q(x))) = (C/2 + D, 2C + 2D)$$

Utilizando matrices se debe de cumplir:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Es decir: $B = \{p(x), q(x)\} = \{-2x + 1, 2x - \frac{1}{2}\}$

☞ NOTA.- Al espacio vectorial dual del dual, se le denomina **BIDUAL**, y se representa por V^{**} .

Isomorfismos.

☞ Un **isomorfismo** entre dos espacios vectoriales V y W sobre un mismo cuerpo K , es una aplicación lineal biyectiva $f: V \rightarrow W$. (Si $V = W$, f es automorfismo)

Cuando existe una aplicación lineal biyectiva entre V y W , decimos que V y W son espacios vectoriales isomorfos y se denota por $V \approx W$.

☞ Algunos teoremas importantes sobre aplicaciones lineales son:

- Si $f: V \rightarrow W$ es una aplicación lineal: $V/\text{Ker } f \approx \text{Im } f$.
- Si V y W tienen dimensión finita: $V \approx W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$.

Demostración:

- Los elementos de $V/\text{Ker } f$ son de la forma

$$[u] = \{u + x : x \in \text{Ker } f\}, u \in V.$$

Para cada $u \in [u]$, se cumple

$$f(u+x) = f(u) + f(x) = f(u) + 0 = f(u).$$

Si definimos la aplicación

$$g: V/\text{Ker } f \rightarrow \text{Im } f: [u] \rightarrow g([u]) = f(u).$$

Comprobamos que es una aplicación sobreyectiva, pues $\forall v \in \text{Im } g, \exists [u] \in V/\text{Ker } f$ tal que

$$g([u]) = v. \quad (\text{basta que tomemos } [u] \text{ tal que } f(u) = v).$$

Además, la aplicación g es también inyectiva, ya que si $g([u]) = 0$. Entonces

$$f(u) = 0. \quad (\text{Pues si } [u] \neq [v] \Rightarrow g([u]) = f(u) \neq f(v) = g([v])),$$

Luego

$$V/\text{Ker } f \approx \text{Im } f.$$

- $\Rightarrow$ Si V y W son isomorfos, existe un isomorfismo $f: V \rightarrow W$.

Sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V , como f es inyectiva

$$f(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) = 0 \Rightarrow a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2) + \dots + a_n f(v_n) = 0.$$

Es decir:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0.$$

luego, $f(B)$ es linealmente independiente

Por ser f suprayectiva, para todo $w \in W$, existirá un $u \in V = \langle B \rangle$. Tal que $f(u) = w$. Luego

$$W = \langle f(B) \rangle, \text{ y } f(B) \text{ es sistema generador de } W.$$

Como $f(B)$ es un sistema generador y linealmente independiente, $f(B)$ es una base de W de n vectores. Por tanto

$$\dim V = \dim W.$$

⇐ Si $\dim V = \dim W$, existirán bases con el mismo número de elementos

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ en V y W respectivamente.

Poniendo v como combinación lineal de vectores de sus bases, y definiendo:

$$f(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_n w_n.$$

Determina un isomorfismo $f: V \rightarrow W$.

Luego V y W son isomorfas.

☞ Corolario: Si F y G son subespacios de E

$$(F + G) / F \approx G / F \cap G.$$

Demostración:

La aplicación:

$$f: G \rightarrow (F+G)/F : v \rightarrow [v]$$

es lineal.

Su núcleo está formado por aquellos $v \in G$ tales que $[v] = F$, es decir, tales que $v \in F$. Por tanto:

$$\text{Nuc } f = F \cap G.$$

Como f es exhaustiva, ya para cada $[u]$, podemos escribir $u = w + v$ con $w \in F, v \in G$;

$$[u] = [v] = f(v).$$

Y por el teorema visto anteriormente, se tiene:

$$(F + G) / F \approx G / F \cap G.$$

☞ Corolario: Si $F \subset G$ son subespacios de E , entonces: $(E/F) / (G/F) \approx E/G$

Demostración:

Como $F \subset G \Rightarrow$ si una clase $[u] \in E/F$ tiene un representante en G , todos sus elementos son de G . Por tanto, G/F es un subconjunto de E/F . Definimos, ahora,

$$\begin{aligned} f: E/F &\rightarrow E/G \\ [u] &\rightarrow \{u\}. \end{aligned}$$

donde $\{u\}$ indica la clase de u módulo G .

La aplicación está bien definida, ya que los elementos equivalentes respecto a F también lo son respecto a G .

f es una aplicación lineal y exhaustiva y su núcleo está formado por las clases $[u]$ tales que $\{u\} = \bar{0}$ es decir, tales que $u \in G$. Así pues, $\text{Nuc } f = G/F$, aplicando el teorema anterior, se tiene:

$$(E/F) / (G/F) \approx E/G.$$

Observación: Si la dimensión del espacio E es finita, $\text{Im } f$ y $E/\text{Nuc } f$ tienen la misma dimensión, y son, por tanto, espacios isomorfos. Además, se pueden definir un isomorfismo de una manera muy natural y sin intervención de bases.

*Una aplicación lineal definida sin utilizar ninguna base, se denomina aplicación canónica.
Todos los isomorfismos establecidos en las tres proposiciones anteriores son isomorfismos canónicos.*

Usando el teorema de prolongación de la base se puede demostrar:

☞ Si E es un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces, si F y G son subespacios vectoriales de E .

F , G y $F \cap G$ son subespacios de dimensión finita, se cumple:

$$\text{Dim } F + \text{Dim } G = \text{Dim } (F+G) + \text{Dim}(F \cap G).$$