

Problemas – Tema 4

CCSS Problemas resueltos - 12 - patrones en potencias de matrices

1. Sea A una matriz cuadrada de orden 3 con elementos reales, tal que $A^2 = I$ (siendo I la matriz identidad de orden 3). Obtener A^n para cualquier número natural n .

$$A = A$$

$$A^2 = I$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot I = A$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = I \cdot I = I$$

Con estos primeros resultados podemos inferir:

$$A^n = A, \text{ si } n \text{ es impar}$$

$$A^n = I, \text{ si } n \text{ es par}$$

Demostremos esta expresión de A^n por inducción matemática.

Comprobamos para $n=1 \rightarrow A = A$

Suponemos cierta para $n \rightarrow A^n = A, \text{ si } n \text{ es impar}, A^n = I, \text{ si } n \text{ es par}$

Demostramos para $n+1$ a partir de los resultados anteriores de A^n y A^n .

Si $n+1$ es par $\rightarrow n$ es impar $\rightarrow A^{n+1} = A^n \cdot A = A \cdot A = A^2 = I$.

Si $n+1$ es impar $\rightarrow n$ es par $\rightarrow A^{n+1} = A^n \cdot A = I \cdot A = A$.

Como queríamos demostrar.

2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix}$

a) Halla la matriz X que verifica $A X + B = 2 A$.

b) Calcular B^2 y B^{2016} .

a) $A X + B = 2 A \rightarrow A X = 2 A - B \rightarrow A^{-1} A X = A^{-1} (2 A - B) \rightarrow X = A^{-1} (2 A - B)$

Donde hemos aplicado matriz inversa de A a la izquierda de cada miembro de la igualdad, y recordado que una matriz multiplicada por su inversa es igual a la matriz identidad.

La matriz A admite inversa siempre que su determinante sea distinto de cero. En efecto:

$$|A| = -1 + 0 + 0 - (-2 + 0 + 0) = 1 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$$

Vamos a obtener la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow F'_3 = F_3 - 2F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow F'_3 = F_3 + F_2 \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow F'_1 = F_1 + F_3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow F'_1 = F_1 - F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow F'_1 = -F_1, F'_3 = -F_3 \rightarrow \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En efecto, se comprueba que $A A^{-1} = A^{-1} A = I$, siendo I la matriz identidad de orden tres.

$$2A - B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 8 & -5 & -4 \\ -12 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Y la matriz incógnita resulta:

$$X = A^{-1}(2A - B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 8 & -5 & -4 \\ -12 & 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -9 & -5 \\ 8 & -5 & -4 \\ 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } B^2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B^2 = I \rightarrow B^3 = B^2 \cdot B = I \cdot B = B$$

Donde recordamos que el producto de una matriz cuadrada por la matriz identidad, resulta la misma matriz.

$$B^4 = B^3 \cdot B = B \cdot B = B^2 = I$$

$$B^5 = B^4 \cdot B = I \cdot B = B$$

$$B^6 = B^5 \cdot B = B \cdot B = B^2 = I$$

En general:

$$\text{Si } n = \text{impar} \rightarrow B^n = B$$

$$\text{Si } n = \text{par} \rightarrow B^n = I$$

$$\text{Como } 2016 \text{ es par} \rightarrow B^{2016} = I$$

3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ hallar $B = A + A^2 + A^3 + \dots + A^n$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 & 0 \\ 0 & 3^3 & 0 \\ 0 & 0 & 4^3 \end{pmatrix}$$

Podemos inferir que la potencia n-ésima será:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

Demostremoslo por inducción matemática.

Comprobamos para $n=1 \rightarrow A^1 = \begin{pmatrix} 2^1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = A$

Suponemos cierto el término n-ésimo $\rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$

Demostramos: ¿ $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{n+1} \end{pmatrix}$? . A partir de A^n y de A operamos.

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{n+1} \end{pmatrix} \rightarrow \text{Como queríamos demostrar.}$$

Por lo tanto la matriz suma de los n primeros términos será:

$$B = A + A^2 + A^3 + \dots + A^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4^2 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2+2^2+2^3+\dots+2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3+3^2+3^3+\dots+3^n & 0 \\ 0 & 0 & 4+4^2+4^3+\dots+4^n \end{pmatrix}$$

Por lo tanto tenemos suma de términos que se diferencian, de forma consecutiva, en el producto por una razón r . Estamos ante la suma de los términos de una progresión geométrica de razón r .

Por ejemplo, en la primera fila, tenemos el número 2 más 2·2 más 2·2·2 más ... así hasta el término n-ésimo. ¿Cómo obtener el resultado final de esta suma?

Podemos acordarnos de la fórmula que suma los n primeros términos de una progresión geométrica de razón r :

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{2^n \cdot 2 - 2}{2 - 1} = 2 \cdot (2^n - 1)$$

O bien obtener este valor con el siguiente razonamiento:

$$S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$$

$$-2 \cdot S_n = -2^2 - 2^3 - 2^4 - \dots - 2^{n+1}$$

Sumando ambas expresiones:

$$S_n - 2S_n = 2 - 2^{n+1} \rightarrow -S_n = 2 - 2^{n+1} \rightarrow S_n = 2^{n+1} - 2 \rightarrow S_n = 2(2^n - 1)$$

Llegando al mismo resultado obtenido en la fórmula anterior.

Si aplicamos este razonamiento para el resto de filas de la matriz B :

$$S_n = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n$$

$$-3 \cdot S_n = -3^2 - 3^3 - 3^4 - \dots - 3^{n+1}$$

Sumando:

$$S_n - 3S_n = 3 - 3^{n+1} \rightarrow -2S_n = 3 - 3^{n+1} \rightarrow S_n = \frac{3^{n+1} - 3}{2} \rightarrow S_n = \frac{2(2^n - 1)}{2}$$

Y análogamente para la fila tercera:

$$S_n = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^n$$

$$-4 \cdot S_n = -4^2 - 4^3 - 4^4 - \dots - 4^{n+1}$$

Sumando:

$$S_n - 4S_n = 4 - 4^{n+1} \rightarrow -3S_n = 4 - 4^{n+1} \rightarrow S_n = \frac{4^{n+1} - 4}{3} \rightarrow S_n = \frac{4(4^n - 1)}{3}$$

Y la matriz B queda:

$$B = \begin{pmatrix} 2(2n-1) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3(3n-1)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4(4n-1)}{3} \end{pmatrix}$$

4. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ **hallar** A^n .

En primer lugar, vamos a intuir una regla general para la matriz n-ésima:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 24 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 24 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 64 & 16 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 64 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 160 & 32 \end{pmatrix}$$

Inducimos por tanto que: $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n \cdot 2^n & 2^n \end{pmatrix}$

Lo demostramos por inducción matemática:

- Se cumple para $n=1 \rightarrow A^1 = A = \begin{pmatrix} 2^1 & 0 \\ 1 \cdot 2^1 & 2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
- Supongo cierto el término n-ésimo $\rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n \cdot 2^n & 2^n \end{pmatrix}$
- Demuestro $\nexists A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ (n+1) \cdot 2^{n+1} & 2^{n+1} \end{pmatrix}$? a partir de A^n y A .

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n \cdot 2^n & 2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^n & 0 \\ 2 \cdot n \cdot 2^n + 2 \cdot 2^n & 2 \cdot 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ (n+1) \cdot 2^{n+1} & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

Así queda demostrado por inducción matemática que $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n \cdot 2^n & 2^n \end{pmatrix}$